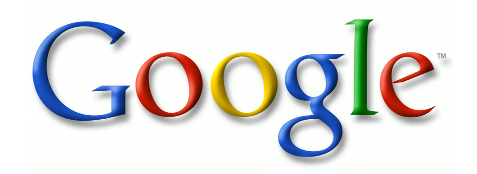
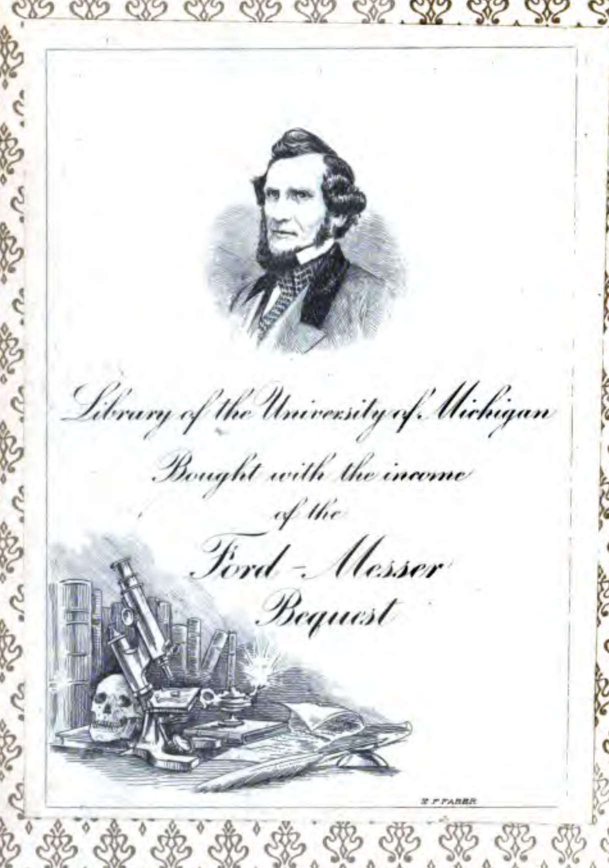
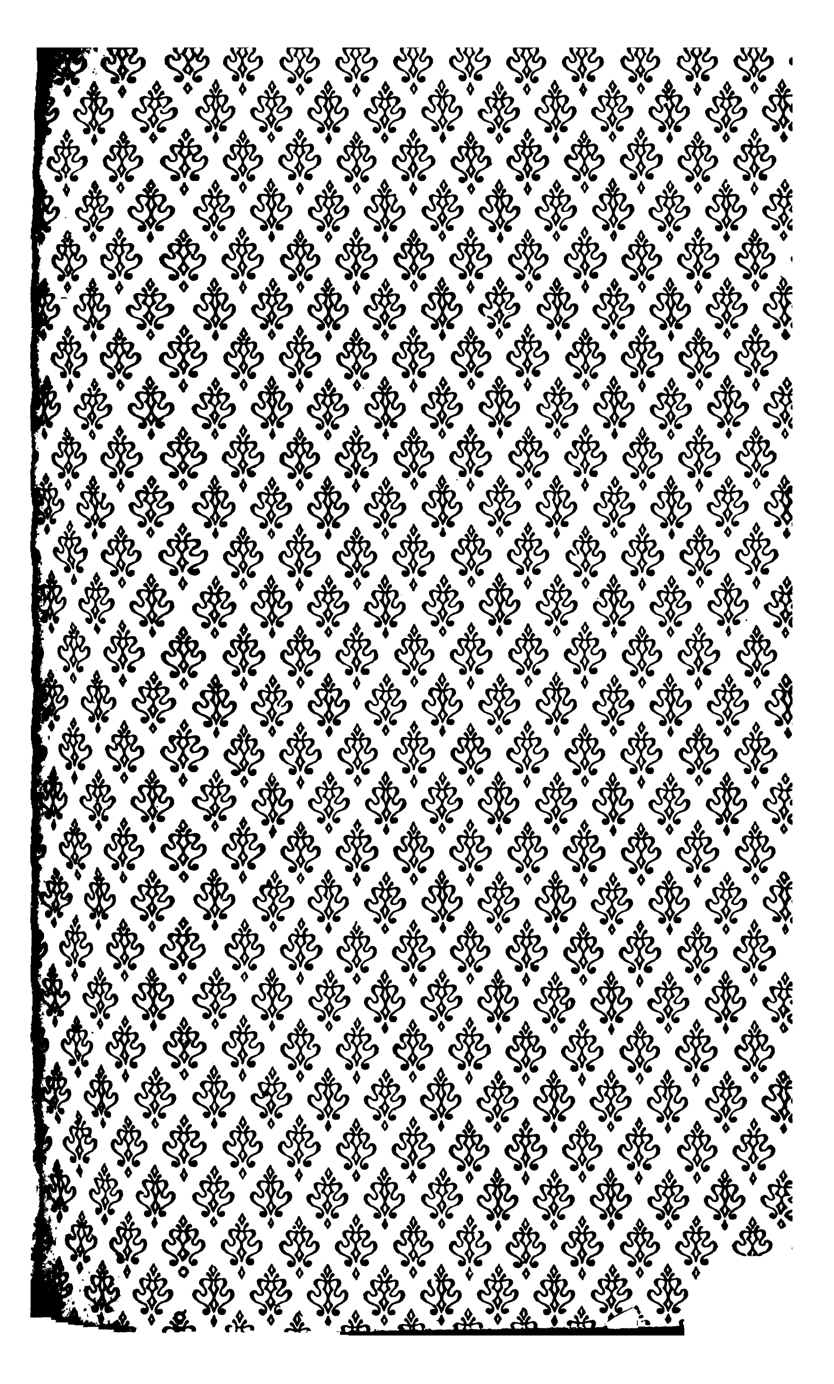






Nachrichten

von der

K. Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

aus dem Jahre 1872.

Göttingen.
Verlag der Dieterichschen Buchhandlung.
1872.

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

10. Januar. | № 1. | 1872.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 6. Januar.

Marx, über die Anfälle mit dem Gefühle des Verscheidens, den intermittirenden chronischen Herzschlag, »das Leiden des Philosophen Seneca«. (Erscheint in den Abhandlungen).

Benfey, die sanskritische Femininalendung *knî* (vermittelst *tknî*) für *tnî* von einem masculinoneutralen *tna* = dem griechischen *τνο* oder *δνο*.

Enneper, über die Flächen mit einem System sphärischer Krümmungslinien.

Die sanskritische Femininalendung *knî* (vermittelst *tknî*) für *tnî* von einem masculinoneutralen *tna* = dem griechischen *τνο* oder *δνο*.

Von

Th. Benfey.

§. 1.

Die Hauptaufgabe des folgenden Aufsatzes wird den Kennern bezüglich des Resultats wenig Neues bringen. Einen gewissen Werth kann er überhaupt nur insofern in Anspruch nehmen, als der Versuch gemacht wird dieses Resultat

streng zu beweisen; und in der That scheint uns in einer jungen Wissenschaft — wie die des Indogermanischen Sprachstammes, trotz aller bedeutenden Ergebnisse, welche ihr schon verdankt werden, in Rücksicht auf die grosse Anzahl der noch ungelösten Probleme, noch immer genannt werden muss — der Werth einer entschieden erwiesenen, wenn selbst geringfügigen, Thatsache bedeutend genug, um ihrer Feststellung einige Worte widmen zu dürfen. Fehlt es doch dieser Disciplin keineswegs an mehr oder weniger geglaubten, oder selbst, wie man zu sagen pflegt, plausibel gemachten Annahmen, während die Zahl der streng erwiesenen bis heute noch so gering ist, dass selbst das ganze Princip, auf welchem sie beruhen, noch jüngst in Frage gestellt ward.

Ausserdem berührt sich der zu behandelnde Gegenstand mit einer weitgreifenden Conjectur des scharfsinnigen und hochverdienten Sprachgelehrten Professor Theodor Aufrecht, welcher wir bei dieser Gelegenheit um so mehr gedenken müssen, da Manchem scheinen möchte, dass das Resultat dieses Aufsatzes in Bezug auf das Affix *tna* geeignet sei, ihr eine nicht unerhebliche Wahrscheinlichkeit zu verleihen.

Aufrecht bemerkt nämlich in einer Note zu S. 275 nr. 90 des Appendix, welchen er seiner trefflichen Ausgabe von *Ujjvaladatta's* Commentary on the U*n*âdisûtra's, Bonn 1859 angefügt hat, in Bezug auf das sanskritische Affix *ta* des Participii Perfecti Passivi:

'The change of *ta* and *na* in the past partic. [1]) combined with the fact that some names

1) Man vgl. z. B. vom Verbum *sad* 'sitzen' vedisch *satta* (für *sad* + *ta*) gewöhnlich *sanna* (für *sad* + *na*).

of colours ending in *ta* form their fem. in *nî* [1]) gives rise to the conjecture that the original form of *ta* was *tna*. Comp. the affix *sna*. (Dieses wird nämlich zwei Seiten weiter = *tna* gesetzt). The remark applies also to the termination *ti* [2]).

Doch zur Sache!

§. 2.

Albrecht Weber hat in seiner Ausgabe des Vâjasaneyi-Prâtiçâkhya (im 4ten Bande der 'Indischen Studien' S. 65—171 und S. 177—331) zu IV, 114 S. 248 eine eigenthümliche Schreibweise angemerkt, welche in den Chambers'schen Handschriften der Vâjasaneyi-Saṁhitâ nr. 27. 28. 31 und 32 (beziehungsweise 160. 161. 155 und 156 der neuen Bezeichnung) erscheint. Es wird nämlich zwischen *t* und einem nachfolgenden *m* oder *n* durchweg ein *k* eingefügt. Weber giebt davon folgende Beispiele: *tkmanâ* für *tmanâ*, *âtkman* für *âtman*, *patkman* für *patman*, *garutkmant* für *garutmant*, *pratkna* für *pratna*, *ratkna* für *ratna*, *vitatknire* für *vitatnire*, *patknî* für *patnî*, *adhipatknî* für *adhipatnî*, *sapatkna* für *sapatna*, *pâtknîvata* für *pâtnîvata*.

Von dieser Schreibweise giebt das Vâjasaneyi-Prâtiçakhya keine Kunde, eben so wenig, so viel bisher bekannt, irgend ein andres grammatisches Werk. Wir wissen aber schon aus manchen anderen Beispielen, dass es in Indien man-

1) Man vergleiche *éta* 'bunt' fem. *étâ* und *énî*.

2) Statt des primären Abstractaffixes *ti* tritt nämlich wesentlich in denselben Fällen, wo statt *ta* im Ptcp. Pf. Pass. *na* erscheint, *ni* ein (vgl. Vollst. Gramm. d. Sskrit S. 161, 2 *ti* und S. 165 *ni*).

che Verschiedenheiten, insbesondre in Bezug auf Schreibweise, aber auch, wenn gleich seltener, auf andre grammatische Erscheinungen, giebt, von welchen die bekannten Grammatiker keine Notiz nehmen. Uebrigens kann bei einer so systematisch durchgeführten Schreibweise schon an und für sich kein Zweifel darüber entstehn, dass sie wenigstens einer bestimmten Schule angehörte. Ja! die dadurch sich ergebende Erklärung der eigenthümlichen Feminina von *asitá* 'schwarz' und *palitá* 'grau', nämlich *ásikní*, *pálikní* (s. § 4), macht es unzweifelhaft, dass die Aussprache, auf welcher diese Schreibweise beruht, einst eine allgemeinere, nicht auf eine einzelne Schule beschränkte gewesen sein muss. Weber a. a. O. fügt noch *harita* fem. *harikní* hinzu. Dieses Femininum wird zwar in der Böhtlingk'schen Ausgabe des Pân. Vârt. 2 zu IV. 1. 39 nicht angeführt, ist von mir auch sonst nicht notirt; doch beruht auf ihm entschieden *hariknikâ* im Atharva-Veda XX. 129, 3. 4.

§. 3.

Es würde unzweifelhaft sehr wichtig sein, wenn sich bestimmt nachweisen liesse, durch welche phonetische Vorgänge, speciell durch welche Eigenthümlichkeit in der Aussprache des *t*, *m* oder *n* diese Einfügung von *k* herbeigeführt ward. Wenn wir bedenken, wie ausserordentlich schwierig es ist, sich eigenthümliche Aussprachen von Lauten in zeitgenössischen fremden Sprachen ganz anzueignen und physiologisch beschreiben zu können, dann wird man, oder der Verfasser wenigstens, jede Hoffnung aufgeben, etwas sicheres über die Aussprache einer uns so fremden Sprache in einer um Jahr-

tausende von uns entfernten Zeit herausbringen zu wollen. Dennoch erlaubt er sich zu bemerken, zunächst, dass die Aussprache von Nasalen eine bei den verschiedenen Völkern sehr verschiedenartige ist; ferner, dass es eine giebt, bei welcher sowohl *m* als insbesondere *n* so sehr von einem gutturalen Anklang begleitet sind, dass es sehr wohl denkbar ist, dass dieser sich aus ihnen herauszulösen und als selbstständiges *k* davor zu treten vermochte; endlich dass die physiologische Bildung desjenigen Nasals, welcher als *ng* bezeichnet wird, also jenes gutturale Element bestimmt enthält, in völlig derselben Lage der Sprachwerkzeuge gebildet wird, wie *k* (vgl. die Abbildung bei M. Müller, Lectures on the Science of Language II. 1864 p. 145 Figur 24, mit p. 139, Figur 21). Wurde demnach das *m* und *n* in Indien einst mit einem ähnlichen gutturalen Anklang gesprochen, so konnte es leicht geschehen, dass bei dem Uebergang von dem sehr verschieden gebildeten *t* (vgl. ebds. p. 139 Figur 22) zu *m* oder *n*, gewissermaassen zur Erleichterung desselben, ein *k* vielleicht zuerst leiser dann immer voller hervorbrach.

Möglich jedoch ist auch eine andre Erklärung, durch welche diese Einfügung von *k* mit der Erscheinung von *k* für auslautendes *t* im Sanskrit, z. B. *sâvishak* für *sâvishat* (A. Weber zu Vâjas. Prâtiç. IV. 114 in 'Indische Studien' IV, 248) *-dhrik* für *-dhrit* (Gött. Gel. Anz. 1860 S. 740), in Verbindung tritt. Wenn nämlich der Verschluss, durch welchen das *t* gebildet wird, mit einer gewissen Gewalt gelöst wird, dann tritt ein Laut hinzu, welcher gutturalartig klingt und leicht immer mächtiger hervortreten, sich zu *k* steigern und wie nachfolgende Laute

überhaupt vorhergehende bedrängen und zu verdrängen geneigt sind, das *t* eliminiren konnte, also gewissermassen aus *-dhrit* zuerst *dhrit*$_k$, dann *dhri*^{t}*k*, endlich *-dhrik* machen konnte. Derselbe Vorgang konnte wie im Wortauslaut auch im Sylbenauslaut Statt finden, so dass z. B. *pratna*, im Fall *t* die Sylbe auslautete, zuerst *pra*^{t}*k-na*, dann *pratkna*, ohne Einbusse des *t* ward, *palitnî* aber, ganz wie *-dhrit*, erst *palit*$_k$*-nî*, dann *pali*^{t}*k-nî*, endlich *paliknî*. Bei dieser Erklärung bleibt zwar die Einfügung des *k* in *tmanâ*, nämlich *tkmanâ*, unbegreiflich, da hier *t* die Sylbe entschieden nicht auslautet; allein, bei der vorherrschenden Neigung der Inder überhaupt und der Indischen Grammatiker insbesondre zur Systematisirung, wäre es möglich, dass hier die Einfügung des *k* nur nach Analogie der in andern Fällen zwischen *t* und *m* eingetretenen Statt gefunden habe; möglich auch, dass, da *tmanâ* von den Indern als Verstümmelung von *âtmanâ* gefasst wird und höchst wahrscheinlich auch wirklich ist, die in diesem nach obigem erklärbare Einfügung (*âtk-manâ*) auch auf die verstümmelte Form ausgedehnt ward. Stärker möchte vielleicht gegen die Verbindung des inlautend eingefügten *k* mit dem auslautend angetretenen der Umstand sprechen, dass die inlautende Einfügung auf das Zusammentreffen von *t* mit *m* und *n* beschränkt ist. Allein es entsteht die Frage, ob nicht diess vielleicht nur Folge davon ist, dass sie hier etwas stärker in's Ohr fiel. Denn, wenn wir im Latein dem grundsprachlichen Suffix *tra* nicht selten *cro* gegenübertreten sehen, z. B. dem griech. *λοϝετρόν* lat. *lavacrum*, (vgl. auch Gött. Gel. Anz. 1858 S. 629), was ebenfalls aus einer Einfügung von *k* hinter *t* zu erklären ist (nämlich aus *tcro* für

tro), so dürfen wir nicht verkennen, dass die Einfügung eines *k* hinter *t* auch sonst möglich war, ja wir werden dadurch zu einer dritten Erklärung getrieben, nämlich zu der Annahme, dass es wohl überhaupt eine Aussprache des *t* geben muss, welche den Zutritt eines zuerst parasitischen dann unter günstigen Umständen vorherrschend werdenden *k* ermöglicht; ferner dass dieser Zutritt nichts weniger als durch die Stelle des *t* im Sylben- oder Wort-Auslaut bedingt ist. Denn im Latein ist *t* in *tro* sicherlich Sylbenanlaut und vielleicht ebenso im sskr. *tma, tna, tnî* (vgl. jedoch Rv. Pr. I. 26, Vâj. Pr. I. 102, Ath. Pr. I. 56 ff., Tait. Pr. XXI, 4 ff.).

Doch unterlässt es der Verfasser, im Bewusstsein seines dilettantischen Standpunktes auf dem Gebiete der Physiologie der menschlichen Sprachlaute, näher darauf einzugehen, welche von diesen drei Erklärungen vorzuziehen, oder ob noch nach andern zu forschen sei, kann aber nicht umhin, darauf aufmerksam zu machen, dass die graphische Bezeichnung aller drei Laute in der erwähnten Schreibweise, zumal durch die mit so feinem Ohr begabten, die feinsten Nüancen der Aussprache bezeichnenden, Inder, auch die einstige Aussprache aller drei, wenigstens in einem bestimmten, wenn auch vielleicht beschränkten, Kreise, über allen Zweifel erhebt.

§. 4.

Es bedarf aber wohl kaum einer Ausführung, dass die Aussprache von drei Lauten, unter denen *t* und *k* so heterogenen Classen angehören, zumal wenn der k-Laut mächtiger hervortrat, in unmittelbarer Folge aufeinander mit Schwierigkeiten verbunden war, welche zwar geringer sind, wenn dem *t* ein Vokal vorher-

ging, so dass es also möglicherweise den Silbenschluss bilden konnte, aber z. B. in *tknand*, wenigstens durch unsere Sprechorgane, nicht ohne einen schwer zu überwindenden Zwang vollständig lautbar gemacht werden kann. Es ist also nicht unwahrscheinlich, dass — bei dem steten Streben der Indogermanischen Sprachen die Wörter zu einer leichteren Aussprache zu befähigen — einer der Laute wich, und trat dieses Bestreben in Bezug auf diese Lautverbindung zu einer Zeit ein, wo in einem oder dem andern Worte das *k* in vollster Kraft hervortrat, so war diess nach den Lautgesetzen, welche uns im Kreise der Sanskritischen (indoarischen) Sprachen entgegentreten, das *t*; denn *tk* werden sowohl im Pâli, als in den Prâkritsprachen zu *kk* (vgl. Fr. Müller Beiträge zur Kenntniss der Pâli-Sprache, in den Sitzungsber. d. Wiener Akad. 1867, October S. 12; Lassen Inst. l. Pracr. p. 240).

Demgemäss dürfen wir, wenn gleich zunächst nur hypothetisch, annehmen, dass die Feminina *paliknî*, *asiknî*, nach Analogie von *pratkna* u. s. w. (§. 2), für einstige *palitknî asitknî* stehen und diese wiederum, nach Analogie von *pratkna* u. s. w. aus *pratna* u. s. w., durch Einfügung von *k* aus *palitnî*, *asitnî* entstanden sind.

Diese Hypothese wird aber zur unzweifelhaften Thatsache durch folgenden weiteren Schluss und eine Parallelform der griechischen Sprache.

Da nämlich die Feminina auf *î* im Sanskrit im weitesten Umfang aus masculinoneutralen Themen auf *a* gebildet werden, so dürfen wir für **palitnî*, **asitnî* als solche **palitna* 'grau', **asitna* 'schwarz' vermuthen. Diese Vermuthung erhält aber ihre vollste Bestätigung durch den griechischen Reflex des angenommenen skr.

palitna, nämlich attisch *πελιτνό*, gewöhnlich *πελιδνό* 'grau'. Wir erhalten dadurch unbedenklich das Recht ein schon grundsprachliches *palitna* aufzustellen. Was in Bezug auf das Sanskrit für *paliknî* erwiesen ist, gilt natürlich auch für *asiknî* und etwaige andre Feminina auf *knî* von Farbnamen; für alle wird im Sanskrit als masculinoneutrales Thema eine Form auf *tna* anzunehmen sein, also auch **asitna* **haritna*. Dass auch diese schon in der Grundsprache existirten, kann natürlich nicht behauptet werden, da sich bisjetzt keine Parallelen in den verwandten Sprachen nachweisen lassen. Derselbe Grund entscheidet aber auch gegen die bei Fick (Vglchdes Wörterb. d. Indog. Spr. 2. Ausg. S. 121) sich findende Aufstellung eines grundsprachlichen *palita*; denn auch diese sanskritische Form wird in keiner der verwandten Sprachen widergespiegelt und kann desshalb nicht mit Sicherheit als grundsprachliche hingestellt werden.

§. 5.

Liesse sich nun erweisen, dass das sanskritische *palitá*, wie es hier als masculino-neutrales Thema zu *páliknî* für ursprüngliches **palitnî* erscheint, so ebenfalls für ursprünglisches *palitná* = *πελιτνό* stehe und durch Einbusse des *n* zu *palitá* geworden sei, dann hätten wir einen entschiedenen Fall der Entstehung des Suffixes *ta* aus *tna*, welcher für die Richtigkeit der von Aufrecht ausgesprochenen Vermuthung (s. §. 1) ein bedeutendes Gewicht in die Wagschale werfen würde. Und wenn es sich hierbei um das Sanskrit allein handelte, würden sich in der That einige Gründe für die Annahme der Einbusse des *n* hinter *t* geltend machen lassen; so z. B. findet sich Rigveda I. 83, 5 *tate* für *tatne* in

yajńaír Átharvâ prathamáh patháṡ tate freilich, wie das Metrum zeigt (——v—/—vv—/v—v—/), einzig um die zum Schluss nöthige Dipodia iambica zu gewinnen. Doch giebt es zwar auch andre, allein sie sind von keinem Belang, weil sich sowohl *ta* als *na* als Affixe von Farbnamen schon in der Grundsprache nachweisen lassen; man vergleiche z. B. einerseits sskr. *çveta* 'licht, weiss' altsl. *svetŭ* m. 'licht', welche für ein grdspr. *kvaita* entscheiden, sskr. *harita* 'grün, gelb' und **harta*, welches Fick (S. 69) so schön aus *hâta-ka* 'Gold' gefolgert hat, lit. *gelta-s* 'gelb', goth. *gulþa-* 'Gold'; andrerseits sskr. *çyena* (neben *çyeta*) 'weiss' altsl. *sinĭ* 'bläulich' (vgl. auch sskr. *cyena* 'Falke' griech. *ἰκτῖνο*, Fick 47, höchst wahrscheinlich nach der Farbe benannt, vgl. in dem Anhang S. 13 *pingala*), welche auf einer grundsprachlichen Form mit der Endung *na*, wahrscheinlich *kyaina*, beruhen. Man müsste demgemäss nachzuweisen vermögen, dass schon in der Grundsprache das in ihr nachgewiesene Affix von Farbnamen *tna* sich, durch Einbusse bald von *t* bald *n*, in *ta* und *na* gespalten habe und alle drei auseinander entstandene Formen zur Zeit der Trennung neben einander existirt hätten. Ein derartiger Beweis ist aber schwerlich zu führen, und da sich in der Grundsprache viele verschiedenartig entstandene Bildungen für Begriffs-Categorien und einzelne Begriffe nachweisen lassen, so liegt bisjetzt die Annahme viel näher, dass in der Grundsprache Farbnamen sowohl durch *ta* als *na* und endlich *tna* (wohl durch Anfügung von *na* an solche auf *ta*) gebildet wurden, vielleicht ursprünglich mit leicht differirenden Bedeutungen, die aber später zusammenfielen. Derartige bedeutungsgleich gewordene Formen pflegen im

Laufe der Sprachgeschichte nach und nach bis auf eine ausgeschieden zu werden, bleiben bisweilen aber auch theilweis neben einander bestehen, oder werden im Gebrauch geschieden; so ist *ta* und *na* im Sskr. bisweilen neben einander bewahrt z. B. in *hárita*, *hariná*; oder *na* nur in der Femininalform *nî* z. B. in *róhinî* von *róhita* (neben welchem *róhitâ* nicht zu belegen); oder nur *ta* z. B. in *çveta* [1]); *tna* endlich nur in dem Femin. *knî* (aus *tknî*).

Eben so ist auch *ta* und *na* als Bildungselement des Ptcp. Perf. Pass. schon in der Grundsprache nachweisbar (vgl. z. B. lat. *mag-no* neben *mac-to* beide vom grundspr. Verbum *magh*, griech. *σιυγ-νό* und episch *φυκ-τό* (von *φυγ*) gegenüber von sskr. *bhug-ná* (von *bhuj*), beide letztere vom grdsprchl. Verbum *bhugh* 'biegen'. Wenn Aufrecht *sna* in *çlakshna* (wohl von *çlâgh*) und *tîkshna* (von *tij*) mit Recht für *tna* nimmt, so erhalten wir zwar dadurch zu *cyautna* und *ratna* (Vollst. Gramm. d. Sskr. S. 103, nr. CCXIII), so wie zu **palitna*, **asitna*, **haritna* noch zwei sskrit. Beispiele mit primärem Affix *tna*, aber so wenig wie bezüglich der Farbnamen einen Grund für die Entstehung der schon grundsprachlichen *ta* und *na* aus demselben.

Anhang zu S. 3, n. 1:
éta, *αἰόλο*. — *ἄκολο*, *épula*.

In Bezug auf das in der angeführten Note hervorgehobene sskr. *éta* 'bunt', fem. *étâ* und *énî*, erlauben wir uns anzumerken, dass, — da es keinem Zweifel unterliegt, dass in diesem

1) Ich benutze diese Gelegenheit, einen Fehler in meiner vollständigen Grammatik des Sskr. §. 689, 4 und in meinem Sanskrit-English Dictionary s. v. *çveta* zu tilgen. Dieses ist nämlich Oxytonon und hat in Femin. nur *çvetâ*.

Worte *tá*, *tâ* und *nî* dem Suffixe angehören, also nur *e* das radikale Element repräsentirt, ferner, dass sskritischem *e*, welches bekanntlich gewöhnlich für grundsprachliches *ai* eintritt, griechisches *αι* mehrfach entspricht — man mit höchster Wahrscheinlichkeit annehmen darf, dass das *αι* in dem, mit *eta* gleichbedeutenden, griech. *αἰ-όλος* mit dem *e* in *e-ta* zu identificiren sei.

Für diese Annahme spricht auch der Umstand, dass die andre Bedeutung von *αἰόλος* 'beweglich' dem sskrit. Worte ebenfalls angehört haben muss. Wir folgern diess daraus, dass es als subst. m. gen. (in der Form *éta*) eine Antilopenart (Petersb. Wtbch.: 'ein durch Schnelligkeit sich auszeichnendes Thier') bezeichnet (schon in den Veden). Gegen diesen Schluss kann nicht geltend gemacht werden, dass das Wort in derselben Bedeutung mit lingualem *n* statt des *t* (*ena* m. *enî* fem.) erscheint. Denn die Farbnamen lauten im Ssskr. mehrfach sowohl auf ssk. *ta* als *na* aus (vgl. oben §. 5 und z. B. *çyeta*, *çyena* 'weiss'); für das dentale *n* trat aber in mehreren Volkssprachen regelmässig das linguale *n* ein (vgl. Lassen, Inst. ling. Pracr. p. 196 und sonst), also für **ena* = *eta* volkssprachlich *ena* und für das alte fem. *enî* volksthümlich *enî*. Diese beiden Formen mit erscheinen nur in späteren Schriften, in deren Sanskrit der Einfluss der Volkssprachen sich schon in den zahlreichsten Fällen geltend gemacht hat. Dieser Einfluss reicht aber auch schon in weit ältere Zeiten hinauf, ist selbst, wenn auch nur vereinzelt, in den vedischen Gedichten nachweisbar, und es ist darum nicht im Geringsten auffallend, wenn eines der hieher gehörigen Derivate, nämlich *aineya* auch in Âçvalâyana's Grihyasûtra's erscheint.

Ist dem gemäss in sskr. *e* und griech. *ai* = einem grundsprachlichen *ai* das radikale Element von *e-ta*, *ai-ólo* anzuerkennen, so ist als das Verbum, von welchem diese Nomina stammen, höchst wahrscheinlich *i* 'gehn, sich bewegen', anzusetzen, so dass der Begriff 'bunt' aus 'beweglich' hervorging und zunächst eigentlich 'in einander übergehend, schillernd' bezeichnete, dann die Verbindung von mehreren Farben.

Das in *ai-όλο* auslautende *όλο* entspricht grundsprachlichem *ála* und dieses erscheint auch in dem schon grdsprchl. Farbnamen *paikala* (s. Fick, Vglchd. Wtbch. d. Indog. Spr. 2. Ausg. S. 127); diesem entspricht im Sanskrit *peçalá* mit Oxytonirung; im Griechischen ist zwar das anlautende *a* des Suffixes zu *ι* geworden, der Accent aber ist derselbe wie in *αἰόλο*, so dass als Reflex *ποικίλο* erscheint. Ein anderes Farbwort auf *'ala* ist sskr. *piñgalá*, im Sskr., wie *peçalá*, ebenfalls oxytonirt. Es hat die Bedeutung 'röthlich braun' und als Substantiv bezeichnet es 'Affe, Ichneumon, eine Eulenart und eine Schlangenart'. In Analogie mit dieser Verwendung zur Bezeichnung von Thieren, hat Fick gewiss mit vollem Recht (ebds. S. 124) griech. *πίγγαλος* 'Eidechse' damit identificirt, wodurch sich auch dieses Wort als ein schon grundsprachliches ergiebt. Aus dem Sskr. allein erwähne ich noch *kapilá* 'bräunlich, röthlich'. Dieses ist wohl unzweifelhaft von sskr. *kapi* 'Affe' abgeleitet und zwar durch Suffix *la*, also eigentlich wohl 'affenfarbig'. In ähnlicher Weise schliessen sich die grdsprachlichen *pingala* und *paikala* an die Nomina *pinga* und *paika* (s. Fick a. a. O.) und ebenso lat. *rutilo* (nach demselben S. 69) an *rutlo* für *hrutlo* 'Gold', so dass sich auch in diesen nur *la* als Suffix ergiebt und

zwar als secundäres. Demgemäss ist nicht zu bezweifeln, dass, wie für *ποικιλο* = grdsprchl. *paikala*, ein Nomen *ποικο* = sskr. *peça*, grdsprchl. *paika*, zu Grunde zu legen ist, so auch als Basis von *αἰο'λο* ein Nomen **αἰο* anzusetzen ist.

Was den Accent betrifft, so steht die sanskritische Oxytonirung mit dem logischen Accentuationsprincip der indogermanischen Grundsprache, wonach die erste Sylbe des den Begriff der Basis modificirenden Elements acuirt wird, in Uebereinstimmung und ist also aller Wahrscheinlichkeit nach die ursprüngliche Accentuation. Die Paroxytonirung in *αἰόλο ποικίλο* ist Folge des musikalisch-rhythmischen Charakters des Accents, welcher schon, wenn gleich seltener, in der Grundsprache, häufig aber im Griechischen, Vorziehung des Accents von seiner logischen Stelle herbeiführte; so z. B. in *θυγάτηρ* für grdsprchl. *dhughatárs* (vgl. sskr. Nom. sing. *duhitā́*, Accus. *duhitáram* = *θυγατέρα*, Dativ sskr. *duhitré* = griech. *θυγατρί* für ursprünglicheres *θυγατρεί*, vgl. die trefflichen 'Homerischen Studien' von W. Hartel in den Sitzungsberichten der Wien. Akad. histor.-phil. Cl. 1871 Juni S. 39). Die Proparoxytonirung in *πίγγαλος* gegenüber von sskr. *pingalá* liesse sich vielleicht aus demselben Grunde erklären (vgl. die schon in der Grundsprache eingetretene Vorrückung des Accents von den ursprünglich accentuirten Personalendungen des Sing. Präs. Activi und der damit zusammengehörenden Formen auf die unmittelbar vorhergehende Silbe, während sie im Griech. wo es der Wortrhythmus zulässt, noch eine Silbe weiter vorschreitet, z. B. sskr. *rinó-ti*, aber giech. *δείκνυ-σι*; eben so in der a-Conjugation, in welcher schon alle Personalendungen den Accent eingebüsst haben, sskr. *bhuj-á-ti*,

bódh-a-ti, griech. nur *φεύγει* für *φεύγετι*; vgl. auch die homerische Vorrückung in *θύγατρα*, *θύγατρες*, *θύγατρας* gegenüber dem schon erwähnten *θυγάτηρ* für ursprüngliches *θυγατήρ* und den gewöhnlichen Formen mit der schon grdsprachlichen Accentuation *θυγατέρα*, *θυγατέρες*, *θυγατέρας*). Doch ist es wahrscheinlicher, dass die Accentvorrückung in *πίγγαλος* auf einem logischen Grund beruht, nämlich auf dem Bedeutungswechsel (vgl. z. B. *δράκων* 'Drache' mit *δρακών* 'sehend' wohl aus der energischen Bed. 'scharf sehend').

Uebrigens besteht auch ein grundsprachliches Suffix *ala* und zwar ein primäres, vgl. sskr. (vedisch) *tripála*, griech. *τράπελο* (s. Fick a. a. O. S. 83 unter *trapara*). Auch hier stimmt die sskr. Accentuation mit dem Accentuationsprincip (Acut auf der ersten Sylbe des modificirenden Elements), während im Griechischen hier ebenfalls der Accent vorgerückt ist. In einem Falle zeigt sich dies vielleicht auch im Sskr., nämlich in dem *ἀπ. λεγ. játhala*; doch ist das Wort noch dunkel und daher auch sein Suffix nicht genau zu bestimmen. Im Griechischen erscheint das Affix noch in *ἄκ-ολος* 'Bissen', mit *o* für dessen anlautendes *a*. In *ακ* ist der Reflex von sskr. *aç* zu erkennen und wir erhalten dadurch noch ein schon grundsprachliches Verbum *ak* 'essen', welches bei Fick noch nicht aufgeführt ist. Da nicht bezweifelt zu werden vermag, dass im Latein Wörter vorkommen, in denen grundsprachliche Gutturale durch lateinische Labiale, speciell *k* durch *p*, wiedergespiegelt werden, und nur noch fraglich sein kann, ob dieser Reflex ein ächt lateinischer sei, oder die hieher gehörigen Wörter aus verwandten Dialekten oder Sprachen, in denen er herrschte, in das Latein

eingedrungen seien [1]), so dürfen wir unbedenklich als Femininum von *ἀκολο* betrachten lat. *ĕpula* 'Speise' in *ĕpulae*, eigentlich 'eine grössere Anzahl von Gerichten' somit 'ein glänzendes Gastmahl'. Von dem dem radikalen Element *ἀκ* in *ἀκολο*, *ĕp* in *ĕpula* entsprechenden sskr. *aç* ist natürlich ebenfalls ein Nomen gebildet, welches eine ähnliche Bed. wie das latein. und griech. hat, nämlich *aç-ana*, n. 'Essen' 'und Speise'.

1) vgl. jedoch Ascoli, Fonologia comparata del Sanscrito del Greco e del Latino. Torino e Firenze 1870, p. 78 ff.

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

17. Januar. № 2. 1872.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Ueber die Flächen mit einem Systeme sphärischer Krümmungslinien.

Von

A. Enneper.

In dem vierten Theile seiner grossen Abhandlung über die Flächen, deren Krümmungslinien plan oder sphärisch sind, hat Bonnet für den Fall, dass nur ein System sphärisch sein soll, sich auf die Behandlung von zwei besondern Fällen beschränken müssen. Es scheint nicht, dass der von Bonnet eingeschlagene Weg sich mit Erfolg auf die Lösung des allgemeinen Problems anwenden lässt, abgesehn davon, dass der Mangel an Symmetrie in den Formeln, dieselben wenig übersichtlich macht (Journ. de l'école polyt. tome XX, p. 277—306). Es ist gar nicht erforderlich für das in Rede stehende Problem eine partielle Differentialgleichung integriren zu sollen, die Integration lässt sich durch diejenige einer gewöhnlichen Differentialgleichung

ersetzen, nur dass die Constanten, welche die Integration involvirt, keine absoluten Constanten sind, sondern als Functionen einer Variabeln erscheinen. Diese Auffassung, welche weiter unten kurz motivirt werden soll, findet sich auch bei Serret (Comptes rendus t. XLI und XLII). Die von Serret gegebene Behandlung leidet, wie nachher gezeigt werden soll, an zwei wesentlichen Uebelständen, nämlich, dass erstens das gefundene Resultat lange nicht den Character von Allgemeinheit hat, wie es beim ersten Anblick den Anschein haben könnte und zweitens, zur Erhaltung eines möglichst einfachen Resultates, in Beziehung auf eine Constante, der oben bemerkten Art, eine ganz willkührliche Annahme gemacht wird. Es ist einleuchtend, dass wenn durch besondere Behandlung eines Problems in der Lösung drei Parameter erscheinen, während man a priori weiss, dass nur zwei arbiträre Constanten vorkommen können, man nach einer Relation zwischen den drei Parametern suchen muss und nicht beliebig einen der Parameter annulliren darf. Diesen Fehler begeht Serret, zudem mitten im Laufe der Rechnung, der Erfolg ist, dass seine finale Lösung, nach genauerer Untersuchung, statt zweier willkührlichen Functionen einer Variabeln, nur noch die Variabele selbst enthält. Durch ein einfaches Verfahren ist eine Differentialgleichung dritter Ordnung vollständig integrirt und dadurch die Lücke, welche Serret in seiner Lösung gelassen, ausgefüllt.

Die im Folgenden angewandten Bezeichnungen stimmen mit denen der »analytisch-geometrischen Untersuchungen« überein (Nachrichten v. d. K. G. d. W. 1867 p. 237).

I.

Das System der Krümmungslinien, für welches v allein variirt, sei sphärisch. Der Radius der osculatorischen Kugelfläche der sphärischen Krümmungslinie sei R, ferner (ξ, η, ζ) der Mittelpunct und σ der Winkel, welchen der Radius der Kugelfläche mit der Normalen zur Fläche im Puncte (x, y, z) bildet. Setzt man zur Abkürzung:

1) $$R \,.\, \cos\sigma = p, \quad R \sin\sigma = p,$$

so finden folgende Gleichungen statt:

2) $$1 = \frac{p}{r''} + \frac{q}{\sqrt{E.G}}\,\frac{d\sqrt{G}}{du},$$

3) $$\begin{cases} \xi = x + p\cos a - q\cos a' \\ \eta = y + p\cos b - q\cos b' \\ \zeta = z + p\cos c - q\cos c' \end{cases}$$

Der Punct (ξ, η, ζ) gehört im Allgemeinen einer beliebigen Raumcurve an, man bezeichne, wie schon bei früheren Gelegenheiten, durch α, β, γ; λ, μ, ν; l, m, n die Winkel, welche respective die Tangente, die Hauptnormale und die Axe der Krümmungsebene mit den Coordinatenaxen bilden. Durch ds ist das Bogenelement, durch ϱ der Krümmungsradius und durch r der Torsionsradius bezeichnet. In den Gleichungen 3) hängen ξ, η, ζ, p, q nur von u ab.

Es soll für die nachstehenden Entwicklungen angenommen werden, dass keine der Quantitäten

q oder $\frac{d\sqrt{G}}{du}$ verschwindet, oder ξ, η, ζ gleichzeitig constant sind.

Wenn $q = 0$, so ist nach 2) $r'' = p$. Die Fläche ist dann die Enveloppe einer Kugelfläche von variabelem Radius, deren Mittelpunct eine beliebige Curve doppelter Krümmung beschreibt. Da nach 1) für $q = 0$ auch $\sigma = 0$, so berührt in diesem Falle die Kugelfläche der sphärischen Krümmungslinie die einhüllende Fläche. Für $\frac{d\sqrt{G}}{du} = 0$ ist $\frac{dr''}{du} = 0$ und nach 2) wieder $r'' = p$. Da r'' unabhängig von u ist, so hat man $r'' = k$, wo k eine Constante bedeutet. Dieser Fall ist offenbar in dem vorhergehenden enthalten. Die Gleichungen 3) geben:

$$4)\qquad \left(\frac{d\xi}{du}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{du}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{du}\right)^2 = \left(\frac{ds}{du}\right)^2$$

gesetzt:

$$5)\qquad \begin{aligned}\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = \left(\frac{dp}{du} - q\frac{\sqrt{E}}{r'}\right)^2 + \left(\sqrt{E} - \frac{dq}{du} - p\frac{\sqrt{E}}{r'}\right)^2 \\ + \left(\frac{q}{\sqrt{G}}\frac{d\sqrt{E}}{dv}\right)^2.\end{aligned}$$

Sind ξ, η, ζ gleichzeitig constant, so verschwindet $\frac{ds}{du}$, mithin verschwindet in der Gleichung 5) auf der rechten Seite jedes der drei Quadrate. Mit Weglassung des schon erörterten Falles $q = 0$, folgt $\frac{d\sqrt{E}}{dv} = 0$, d. h. das System der Krümmungslinien für welches u allein

variirt ist plan und die Ebenen desselben enthalten die Normalen zur Fläche. Gehn die Kugelflächen der sphärischen Krümmungslinien durch einen festen Punct, welcher der Einfachheit halber zum Anfangspunct der Coordinaten genommen werde, so hat man die Gleichungen:

$$(x-\xi)^2+(x-\eta)^2+(z-\zeta)^2=R^2,$$

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2=R^2,$$

folglich:

$$x^2+y^2+z^2=2(\xi x+\eta y+\zeta z).$$

Setzt man hierin:

$$\frac{x_1}{x}=\frac{y_1}{y}=\frac{z_1}{z}=\frac{2}{x^2+y^2+z^2},$$

so folgt:

$$x_1\xi+y_1\eta+z_1\zeta=1.$$

Die Krümmungslinie der transformirten Fläche mittelst reciproker Radienvectoren ist dann plan. Dieser Fall, welcher nicht weiter ausgeführt werden soll, kommt auf die Bestimmung der Flächen mit einem Systeme planer Krümmungslinien zurück.

Die Gleichung 5) lässt sich ersetzen durch:

$$6)\quad\begin{cases}\dfrac{dp}{du}-q\dfrac{\sqrt{E}}{r'} & =\sin\theta\cos\varphi\,\dfrac{ds}{du},\\[2ex] \sqrt{E}-p\dfrac{\sqrt{E}}{r'}-\dfrac{dq}{du} & =\sin\theta\sin\varphi\,\dfrac{ds}{du},\\[2ex] \dfrac{q}{\sqrt{G}}\,\dfrac{d\sqrt{E}}{du} & =\cos\theta\,\dfrac{ds}{du},\end{cases}$$

wo θ und φ näher zu bestimmende Winkel sind. Differentiirt man die Gleichungen 3) nach u, so folgt mittelst der Gleichungen 6):

$$\cos\alpha = \cos a \sin\theta \cos\varphi + \cos a' \sin\theta \sin\varphi + \cos a'' \cos\theta,$$

$$\cos\beta = \cos b \sin\theta \cos\varphi + \cos b' \sin\theta \sin\varphi + \cos b'' \cos\theta,$$

$$\cos\gamma = \cos c \sin\theta \cos\varphi + \cos c' \sin\theta \sin\varphi + \cos c'' \cos\theta,$$

oder:

$$7) \begin{cases} \cos a \cos\alpha + \cos b \cos\beta + \cos c \cos\gamma = \sin\theta \cos\varphi, \\ \cos a' \cos\alpha + \cos b' \cos\beta + \cos c' \cos\gamma = \sin\theta \sin\varphi, \\ \cos a'' \cos\alpha + \cos b'' \cos\beta + \cos c'' \cos\gamma = \cos\theta \end{cases}$$

Die Gleichungen 7) differentiire man nach u und bilde die Summe der Quadrate. Wegen:

$$\left(\frac{d\cos\alpha}{du}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\beta}{du}\right)^2 + \left(\frac{d\cos\gamma}{du}\right)^2 = \left(\frac{1}{\varrho}\frac{ds}{du}\right)^2,$$

folgt mittelst der Gleichungen 6):

$$\left(\frac{1}{\varrho}\frac{ds}{du}\right)^2 = \left(\frac{d\theta}{du} + \frac{\cos\theta\sin\varphi}{q}\frac{ds}{du}\right)^2 +$$

$$\left(\sin\theta\left(\frac{d\varphi}{du} - \frac{1}{q}\frac{dp}{du}\right) - \frac{\cos\varphi}{q}\frac{ds}{du}\right)^2.$$

Ersetzt man diese Gleichung durch:

$$8) \begin{cases} \dfrac{d\theta}{du} + \dfrac{\cos\theta\sin\varphi}{q}\dfrac{ds}{du} = \dfrac{\cos\psi}{\varrho}\dfrac{ds}{du}, \\ \left(\dfrac{d\varphi}{du} - \dfrac{1}{q}\dfrac{dp}{du}\right)\sin\theta + \dfrac{\cos\varphi}{q}\dfrac{ds}{du} = \dfrac{\sin\psi}{\varrho}\dfrac{ds}{du}, \end{cases}$$

so geben die Gleichungen 7) nach u differentiirt:

$$9)\begin{cases}\cos a\cos\lambda+\cos b\cos\mu+\cos c\cos\nu=\cos\theta\cos\varphi\cos\psi \\ \qquad\qquad -\sin\varphi\sin\psi. \\ \cos a'\cos\lambda+\cos b'\cos\mu+\cos c'\cos\nu=\cos\theta\sin\varphi\cos\psi \\ \qquad\qquad +\cos\varphi\sin\psi. \\ \cos a''\cos\lambda+\cos b''\cos\mu+\cos c''\cos\nu=-\sin\theta\cos\psi.\end{cases}$$

Setzt man:

$$10)\quad \frac{1}{r}\frac{ds}{du}=\frac{d\psi}{du}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\left(\frac{\sin\psi}{\varrho}-\frac{\cos\varphi}{q}\right)\frac{ds}{du},$$

so geben die Gleichungen 9) nach u differentiirt mittelst der Gleichungen 6), 7), 8) und 10):

$$11)\begin{cases}\cos a\cos l+\cos b\cos m+\cos c\cos n=\cos\theta\cos\varphi\sin\psi, \\ \qquad\qquad +\sin\varphi\cos\psi, \\ \cos a'\cos l+\cos b'\cos m+\cos c'\cos n=\cos\theta\sin\varphi\sin\psi, \\ \qquad\qquad -\cos\varphi\cos\psi, \\ \cos a''\cos l+\cos b''\cos m+\cos c''\cos n=-\sin\theta\sin\psi.\end{cases}$$

Differentiirt man die erste Gleichung 7) und die erste Gleichung 9) nach v, eliminirt $\frac{\sqrt{G}}{r''}$ zwischen den so erhaltenen Gleichungen, so folgt:

$$12)\qquad \cos\theta\,.\frac{d\psi}{dv}+\frac{d\varphi}{dv}=0.$$

Lassen sich die Winkel θ, φ und ψ mittelst der Gleichungen 8) und 10) bestimmen, so findet zwischen den Constanten, welche die Inte-

gration involvirt, und welche als Functionen v anzusehn sind, die Relation 12) statt.

Statt der Winkel θ, φ, ψ lassen sich an zu bestimmende Quantitäten einführen, we unmittelbar zeigen, dass die Lösung des] blems von einer Differentialgleichung dri Ordnung abhängt.

Die Gleichung 2) in Verbindung mit Gleichung:

$$\frac{r'-r''}{r'}\,\frac{1}{\sqrt{G}}\,\frac{d\sqrt{G}}{du}=\frac{1}{r''}\,\frac{dr''}{du}$$

giebt:

$$q\frac{dr''}{du}=(r''-p)\left(\sqrt{E}-r''\frac{\sqrt{E}}{r'}\right)$$

Substituirt man hierin aus den ersten G chungen 6) für $\sqrt{E}$ und $\frac{\sqrt{E}}{r'}$ ihre Werthe, findet man:

$$q\frac{d}{du}\,\frac{p-r''}{q}=\left(1+\left(\frac{p-r''}{q}\right)^2\right)\frac{dp}{du}$$

$$+\frac{p-r''}{q}\cdot\left(\sin\varphi-\frac{p-r''}{q}\cos\varphi\right)\sin\theta\,\frac{ds}{du},$$

oder:

$$\text{13)}\qquad \frac{p-r''}{q}=\operatorname{tang} t$$

gesetzt:

$$q\frac{dt}{du}=\frac{dp}{du}+\sin t\sin(\varphi-t)\sin\theta\,\frac{ds}{du}.$$

Nimmt man zur Abkürzung:

14) $$q\frac{dt}{du}-\frac{dp}{du}=L\sin t\,\frac{ds}{du}$$

so ist:

15) $$L=\sin(\varphi-t)\sin\theta.$$

Die Gleichung 15) nach u differentiirt giebt nach 8) und 14):

$$\frac{dL}{ds}=(\cos(\varphi-t)\sin\psi+\sin(\varphi-t)\cos\theta\cos\psi)\,\frac{1}{\varrho}$$
$$-(1-\sin^2\theta\sin^2(\varphi-t))\,\frac{\cos t}{q}.$$

Der Factor von $\frac{1}{q}$ rechts ist nach 15) gleich L^2. Setzt man also:

16) $$M=\cos(\varphi-t)\sin\psi+\sin(\varphi-t)\cos\theta\cos\psi,$$

so ist:

17) $$\frac{dL}{ds}=\frac{M}{\varrho}-(1-L^2)\,\frac{\cos t}{q}.$$

Die Gleichung 16) nach u differentiirt giebt nach 8), 10) und 14):

$$\frac{dM}{ds}=[\cos(\varphi-t)\cos\psi-\sin(\varphi-t)\cos\theta\sin\psi]\,\frac{1}{r}$$
$$-\frac{\sin(\varphi-t)\sin\theta}{\varrho}$$
$$+\frac{\sin(\varphi-t)\sin\theta\cos t}{q}(\cos(\varphi-t)\sin\psi$$
$$+\sin(\varphi-t)\cos\theta\cos\varphi).$$

Nach 15) und 16) sind die Factoren auf der rechten Seite von $-\frac{1}{\varrho}$ und $\frac{\cos t}{q}$ respect gleich L und LM. Setzt man also:

18) $N = \cos(\varphi - t)\cos\psi - \sin(\varphi - t)\cos\theta\sin$

so ist:

$$\frac{dM}{ds} = \frac{N}{r} - L\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{\cos t}{q}M\right).$$

Die Zusammenstellung dieser Gleichung den Gleichungen 14) und 17) giebt:

$$19)\quad \begin{cases} L\sin t = q\dfrac{dt}{ds} - \dfrac{dp}{ds}, \\ \dfrac{M}{\varrho} = \dfrac{dL}{ds} + (1 - L^2)\dfrac{\cos t}{q} \\ \dfrac{N}{r} = \dfrac{dM}{ds} + \left(\dfrac{1}{\varrho} - M\dfrac{\cos t}{q}\right)L. \end{cases}$$

Die Gleichungen 15), 16) und 18) geben

$$20)\begin{cases} L = \sin(\varphi - t)\sin\theta \\ M = \cos(\varphi - t)\sin\psi + \sin(\varphi - t)\cos\theta\cos \\ N = \cos(\varphi - t)\cos\psi - \sin(\varphi - t)\cos\theta\sin \end{cases}$$

Aus den vorstehenden Gleichungen folgt:

21) $$L^2 + M^2 + N^2 = 1.$$

Durch diese Gleichung und die Gleichungen 19) sind t, L, M und N zu bestimmen.

Differentiirt man die beiden ersten Gleichungen 7) nach v, so folgt:

$$-\cos\theta\frac{\sqrt{G}}{r''}=\frac{d\sin\theta\cos\varphi}{dv},$$

$$\cos\theta\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{d\sqrt{G}}{du}=\frac{d\sin\theta\sin\varphi}{dv}.$$

Hierdurch lässt sich die Gleichung 2) auch schreiben:

$$\frac{p-r''}{q}\frac{d\sin\theta\cos\varphi}{dv}=\frac{d\sin\theta\sin\varphi}{dv}.$$

Setzt man wieder $p-r''=q\,\mathrm{tang}\,t$, so folgt:

$$\cos\theta\,.\sin(\varphi-t)\frac{d\theta}{dv}+\sin\theta\cos(\varphi-t)\frac{d\varphi}{dv}=0.$$

Mittelst dieser Gleichung und der Gleichung 12) geben die Gleichungen 20) nach v differentiirt:

$$22)\quad\begin{cases}\dfrac{dL}{dv}=-\cos(\varphi-t)\sin\theta\,\dfrac{dt}{dv},\\[2ex] \dfrac{dM}{dv}=(\sin(\varphi-t)\sin\psi\\ \qquad\qquad -\cos(\varphi-t)\cos\theta\cos\psi)\,\dfrac{dt}{dv}\\[2ex] \dfrac{dN}{dv}=(\sin(\varphi-t)\cos\psi\\ \qquad\qquad +\cos(\varphi-t)\cos\theta\sin\psi)\,\dfrac{dt}{dv}.\end{cases}$$

Die Summe der Quadrate der vorstehenden Gleichungen giebt:

$$23)\qquad \left(\frac{dL}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dM}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dN}{dv}\right)^2 = \left(\frac{dt}{dv}\right)^2.$$

Aus den Gleichungen 7), 9), 11), 20) und 22) ergiebt sich folgendes System von Gleichungen:

$$(\cos a \cos \alpha + \cos b \cos \beta + \cos c \cos \gamma)\frac{dt}{dv} =$$

$$-\cos t\frac{dL}{dv} - L\sin t\frac{dt}{dv},$$

$$(\cos a' \cos \alpha + \cos b' \cos \beta + \cos c' \cos \gamma)\frac{dt}{dv} =$$

$$-\sin t\frac{dL}{dv} + L\cos t\frac{dt}{dv},$$

$$(\cos a \cos \lambda + \cos b \cos \mu + \cos b \cos \nu)\frac{dt}{dv} =$$

$$-\cos t\frac{dM}{dv} - M\sin t\frac{dt}{dv}$$

$$(\cos a' \cos \lambda + \cos b' \cos \mu + \cos e' \cos \nu)\frac{dt}{dv} =$$

$$-\sin t\frac{dM}{dv} + M\cos t\frac{dt}{dv}$$

$$(\cos a \cos l + \cos b \cos m + \cos c \cos n)\frac{dt}{dv} =$$

$$\cos t\frac{dN}{dv} + N\sin t\frac{dt}{dv}$$

$$(\cos a' \cos l + \cos b' \cos m + \cos c' \cos m) \frac{dt}{dv} =$$

$$\sin t \frac{dN}{dv} - N \cos t \frac{dt}{dv}.$$

Setzt man in den Gleichungen 3) wieder $p = R\cos\sigma$, $q = R\sin\sigma$, so erhält man zur Bestimmung von x, y, z die folgenden Gleichungen:

$$\left(\frac{x-\xi}{R}\cos\alpha + \frac{y-\eta}{R}\cos\beta + \frac{z-\zeta}{R}\cos\gamma\right)\frac{dt}{dv} =$$

$$\cos(\sigma + t)\frac{dL}{dv} + \sin(\sigma + t) \,.\, L\frac{dt}{dv},$$

$$\left(\frac{x-\xi}{R}\cos\lambda + \frac{y-\eta}{R}\cos\mu + \frac{z-\zeta}{R}\cos\nu\right)\frac{dt}{dv} =$$

$$\cos(\sigma + t)\frac{dM}{dv} + \sin(\sigma + t) M\frac{dt}{dv},$$

$$\left(\frac{x-\xi}{R}\cos l + \frac{y-\eta}{R}\cos m + \frac{z-\zeta}{R}\cos n\right)\frac{dt}{dv} =$$

$$-\cos(\sigma + t)\frac{dN}{dv} - \sin(\sigma + t) N\frac{dt}{dv}.$$

Aus den Gleichungen 19) und 21) lässt sich zur Bestimmung von t eine Differentialgleichung dritter Ordnung herstellen, deren Integration drei Parameter, welche Functionen von v sind, nach sich zieht. Setzt man die Werthe von L, M, N und t in die Gleichung 23), so ergiebt sich

eine Relation zwischen den erwähnten drei Functionen von v. Die Integration der Differentialgleichung für t scheint im allgemeinen Falle auf unüberwindliche Schwierigkeiten zu stossen, wenn auch der Weg zu ihrer Herstellung der einfachste und natürlichste zu sein scheint um in besondern Fällen eine Lösung des allgemeinen Problems erwarten zu dürfen. Differentiirt man die Gleichungen 3) wiederholt nach u und bildet die Summe der Quadrate der jedesmaligen Differentialquotienten, so lassen sich beliebig viele Gleichungen zwischen:

$$\sqrt{E}, \quad \frac{\sqrt{E}}{r'}, \quad \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{d\sqrt{E}}{dv},$$

und den Differentialquotienten dieser Quantitäten nach u herstellen. Es ist selbstverständlich, dass nur drei Gleichungen nöthig sind, wie z. B. die Gleichungen 8) und 10) oder 19) und 21).

Verzeichniss der bei der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangenen Druckschriften.

December 1871.

Nature 109—112.

W. Wright, apocryphical acts of the Apostles. Vol. I. The Syriac texts, vol. II. the English translation. London 1871. 8.

Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich. Redigirt von Dr. R. Wolf. Jahrg. XV. Heft 1—4. Zürich 1870. 8.

Transactions of the Linnean Society. Vol. 27. Part. 3. London 1871. 4.

The Journal of the Linnean Society. Zoology. Vol. XI. Nr. 49—52.

— — Botany. Vol. XI. Nr. 54—56 und Vol. XIII. Nr. 65. London 1871. 8.

List of the Linnean Society. 1870. 8.

Proceedings of the Linnean Society. Session 1870—71. 8.

Additions to the library of the Linnean Society. 8.

Zeitschrift der gesammten Naturwissenschaften. Redigirt von Dr. C. G. Giebel. Neue Folge. 1871. Bd. III. Berlin 1871. 8.

Transactions and Proceedings of the Royal Society of Victoria. Part II. Vol. IX. Melbourne 1869. 8.

Dritter Bericht der naturwissenschaftlichen Gesellschaft zu Chemnitz vom 1. October 1868 — 31. Dec. 1870. Chemnitz 1871. 8.

Mémoires de la Société des Sciences naturelles de Cherbourg. T. XV. (Deuxième Série T. V). Paris. Cherbourg 1870. gr. 8.

Catalogue de la Bibliothèque de la Société Impér. des Sciences naturelles de Cherbourg. Première Partie. Cherbourg 1870. gr. 8.

Sitzungsberichte der philos.-philolog. und histor. Classe der k. b. Akademie der Wissenschaften zu München. 1871. Heft IV.

— der mathem.-physik. Classe der k. b. Akademie zu München. 1871. Heft II. Ebd. 1871. 8.

Bulletin de l'Académie R. des Sciences des Lettres, et des Beaux-Arts de Belgique. 40 année 2e série tome 32. Nr. 9. 10. Bruxelles 1871. 8.

M. C. Marignac, de l'influence prétendue de la calcination sur la chaleur de dissolution des oxydes métalliques. 8.

Annales de l'observatoire R. de Bruxelles. Bogen 6. 1871.

Dr. Rudolph Wolf, astronomische Mittheilungen. 8.

Geognostische Karte von Hainichen im Königreich Sachsen von C. Naumann.

Erläuterungen zu der geognostischen Karte. Leipzig 1871. 8.

Schriften der Gesellschaft zur Beförderung der gesammten Naturwissenschaften zu Marburg. Bd. 10. Kassel 1871. 8.

IX. Bericht der naturforschenden Gesellschaft zu Bamberg 1869—70. Bamberg 1870. 8.

I. Jahresbericht der akademischen Lesehalle in Wien über das Vereinsjahr 1871. Wien 1871. 8.
Beilage Nr. I zu den Abhandlungen des naturwissenschaftlichen Vereins zu Bremen. Bremen 1871. 4.
Natural History of New-York. Geological Survey of New-York. Palaeontology: Vol. IV. Part I. 1862—66. By James Hall. Albany. N.-Y. 1867. 4.
Gustavus Hinrichs, the principles of pure Crystallography. Davenport. Jowa. U. S. 1871. 4.
— — contributions to Molecular Science. Salem, Mass. U. S. 1870. 8.
Prof. Dr. Prestel, das Regenwasser als Trinkwasser der Marschbewohner etc. Emden 1871. 8.
Archiv des Vereins für Geschichte und Alterthümer der Herzogthümer Bremen und Verden und des Landes Hadeln zu Stade. 4. 1871. Stade 1871. 8.
Zeitschrift der deutschen morgenländischen Gesellschaft Bd. 25. Heft 3. Leipzig 1871. 8.
Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften. Philos.-histor. Classe. Bd. 66. Heft 2 und 3. Bd. 67. Heft 1. 2. 3. Bd. 68. Heft 1. Wien 1871. 8.
Mathem.-naturwiss. Classe 1870. Abth. I. Nr. 8. 9—10. Abth. II. Nr. 9—10. 1871. Abth. I. Nr. 1. 2. 3. 4. 5. Abth. II. Nr. 1. 2. 3. 4. 5. Ebd. 1871. 8.
Denkschriften. Philos.-histor. Classe. Bd. 20. Ebend. 1871. 4.
Archiv für Kunde österreichischer Geschichtsquellen. Bd. 43. Heft 2. Bd. 45. Heft 1. 2. Bd. 46. Heft 1. 2. Bd. 47. Heft 1. Ebd. 1871. 8.
Fontes rerum austriacarum. Bd. 31. 32. 34. Abth. II. Ebd. 1871. 8.
Almanach 1871. Ebd. 1871. 8.
Tabulae codicum. Vol. V. Ebd. 1871. 8.

(Fortsetzung folgt).

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

24. Januar. №. 3. 1872.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Ueber die Complexflächen und die Singularitätenflächen der Complexe

von

A. Clebsch.

In einem frühern Aufsatze (Annalen Bd. II. p. 1) habe ich bewiesen, dass die Gleichung eines Complexes jedesmal in einer und nur in einer Weise in eine Form gebracht werden kann, welche der symbolischen Darstellung

$$(abxy)^n = 0 \text{ oder } (u_a v_b - v_a u_b)^n = 0$$

oder der gleichbedeutenden Darstellung

$$(\alpha\beta uv)^n = 0 \text{ oder } (\alpha_x \beta_y - \beta_x \alpha_y)^n = 0$$

fähig ist.

Betrachtet man in diesen Formeln x und u als constant, y und v als veränderlich, so stellen sie den Complexkegel des Punctes x, beziehungsweise die Complexcurve der Ebene u dar.

Um die Gleichungen der zu einer Geraden y, v oder u, v gehörigen Complexfläche zu erhalten, verfährt man folgendermassen. Die Complexfläche ist der Ort der Durchschnitte unendlich naher Complexkegel, welche ihre Spitzen auf der Geraden haben. Ist $y + \lambda z$ irgend ein Punct der Gerade y, z, so ist sein Complexkegel

$$((a b x y) + \lambda (a b x z))^n = 0,$$

und man erhält den Ort der Durchschnitte nächster Complexkegel, indem man die Discriminante dieser Gleichung nach λ gleich Null setzt. Nun ist die Discriminante, nach λ genommen, für die Gleichung

$$(p_y + \lambda p_z)^n = 0$$

nichts anderes als die Gleichung der Fläche $p_y^n = 0$ in Liniencoordinaten; um sie zu erhalten, bildet man zunächst die Discriminante einer binären Form $n$ten Grades in ihrer symbolischen Form; sie sei, indem $p, p' \ldots$ die vorkommenden Symbole, die C aber numerische Constanten bedeuten:

$$\Sigma C \Pi (p p') = 0.$$

Sodann ersetzt man die symbolischen Determinanten (pp'), durch die Determinanten $p_y p'_z - p_z p'_y$. Die fragliche Gleichung ist also

$$\Sigma C \Pi (p_y p'_z - p_z p'_y) = 0.$$

In dieser bleibt nur noch p_y durch $(a b x y)$ etc.

zu ersetzen. Demnach wird die Gleichung der zu der Geraden y, z gehörigen Complexfläche in Punctcoordinaten:

$$1)\ \Sigma C\Pi[(abxy)(a'b'xz)-(abxz)(a'b'xy)]=0\ *).$$

Die Zahl der symbolischen Reihenpaare ab, $a'b'$ ... ist, wie der Grad der Discriminante einer binären Form $n$ter Ordnung, gleich $2(n-1)$, während jedes Reihenpaar n mal auftritt. Die Gleichung 1) ist also von der Ordnung $2n(n-1)$ in den x, und dies liefert den von Plücker gegebenen Satz:

Die Complexflächen eines Complexes $n$ter Ordnung sind von der Ordnung $2n(n-1)$.

Die Coordinaten eines Punctes y der gegebenen Geraden kommen nur in je $n(n-1)$ Determinantenfactoren vor, und alle diese Factoren verschwinden, wenn man die y den x gleich setzt. Dies giebt also der Satz Plückers:

*) Nach einer Bemerkung von Hrn. Klein giebt diese Gleichung zugleich die Brennfläche der Congruenz, welche ein Complex $n$ten Grades mit einem linearen gemein hat, sobald man nur unter y, z nicht mehr die Coordinaten von Puncten, sondern die symbolischen Coefficienten des linearen Complexes versteht. Dies gestattet eine interessante Anwendung auf die Kummersche Fläche, da dieselbe Brennfläche der Congruenz ist, welche ein Complex zweiten Grades mit einem linearen Complexe gemein hat. Für sie ergiebt sich nämlich die symbolische Gleichungsform:

$$[(abxA)(a'b'xB)-(abxB)(a'b'xA)]^2=0,$$

wo a, b und a', b' symbolische Coefficienten des Complexes zweiten Grades, A, B solche des linearen Complexes sind. Und zwar ergiebt sich diese Form auf 6 verschiedene Arten, da die Kummersche Fläche immer gleichzeitig für 6 verschiedene derartige Congruenzen Brennfläche ist.

Die gegebene Gerade ist $n(n-1)$fache Gerade ihrer Complexfläche.

Denken wir uns aber x gegeben, während y und z sich bewegen können, so ergiebt sich aus 1) sofort folgender Satz:

Die Linien, deren Complexflächen durch einen gegebenen Punct x des Raumes gehen, bilden einen Complex $n(n-1)$ten Grades,

nämlich den Tangentencomplex des Complexkegels von x.

Ersetzen wir die sämmtlichen soeben angestellten Betrachtungen durch ihre dualistischen Gegensätze, so erhalten wir als Gleichung der zu der Geraden v, w gehörigen Complexfläche in Ebenencoordinaten:

2) $\Sigma C \Pi [(\alpha\beta u v)(\alpha'\beta' u w) - (\alpha\beta u w)(\alpha'\beta' u v)] = 0.$

Dies giebt zunächst die Sätze Plückers:

Die Complexflächen eines Complexes $n$ten Grades sind von der Classe $2n(n-1)$;

Die gegebene Gerade ist Axe eines $n(n-1)$fach berührenden Büschels von Tangentenebenen für ihre Complexfläche;

sodann aber der Satz:

Die Linien, deren Complexflächen eine gegebene Ebene berühren, bilden einen Complex $n(n-1)$ten Grades,

nämlich den Complex der Geraden, welche die Complexcurve von u schneiden.

Für $n = 2$ sind die Gleichungen 1) 2) in der angeführten Note bereits gegeben. Für $n = 3$ hat man nach der bekannten Bildung der Discriminante einer binären cubischen Form als Gleichung der Complexfläche in Punctcoordinaten:

$$[(abxy)(a'b'xz) - (a'b'xz)(abxy)]^2$$
$$.[(a''b''xy)(a'''b'''xz) - (a''b''xz)(a'''b'''xy)]^2$$
$$.[(abxy)(a''b''xz) - (ab'xz)(a''b''xy)]$$
$$.[a'b'xy)(a'''b'''xz) - (a'b'xz)(a'''b'''xy)] = 0.$$

Für $n = 4$ aber nimmt die Gleichung die Form an

$$I^3 - 6J^2 = 0,$$

wo

$$I = [(abxy)(a'b'xz) - (abxz)(a'b'xy)]^4$$
$$J = [(abxy)(a'b'xz) - (abxz)(a'b'xy)]^2$$
$$.[(abxy)(a''b''xz) - (abxz)(a''b''xy)]^2$$
$$.[(a'b'xy)(a''b''xz) - (a'b'xz)(a''b''xy)]^2.$$

Da in der Theorie binärer Formen $I = 0$ anzeigt, dass vier Elemente äquianharmonisch, $J = 0$, dass sie harmonisch liegen, so ist $I = 0$ die Gleichung der Fläche, deren Puncte Complexkegel haben, welche von der Geraden y, z in äquianharmonischen Puncten geschnitten werden, und $J = 0$ die Gleichung der Fläche, bei welcher entsprechend ein harmonischer Schnitt eintritt. Man hat also folgende Sätze:

Die Puncte, deren Complexkegel bezüglich eines Complexes 4ten Grades von einer gegebenen Geraden y, z aequianharmonisch, bez. harmonisch getroffen werden, bilden eine Fläche 8ter, bez. 12ter Ordnung, welche die Gerade y, z zur 4fachen, bez. 6fachen Geraden hat. Die Geraden, welche den Complexkegel eines gegebenen

Punctes x bezüglich eines Complexes 4ten Grades aequianharmonisch bez. harmonisch schneiden, bilden Complexe 4ten, bez. 6ten Grades.

Ebenso, indem man diese Sätze dualistisch überträgt:

Die Ebenen, an deren Complexcurven bezüglich eines Complexes 4ten Grades von einer gegebenen Geraden aus aequianharmonische, bez. harmonische Büschel von Tangentenebenen gehen, umhüllen eine Fläche 8ter, bez. 12ter Classe, für welche die durch jene Gerade gehenden Ebenen ein Büschel 4fach, bez. 6fach berührender Tangentenebenen sind.

Die Geraden, von welchen an die Complexcurve einer Ebene u bezüglich eines Complexes 4tes Grades aequianharmonische bez. harmonische Tangentenebenen gehen, bilden Complexe 4ten, bez. 6ten Grades.

Man kann diese Sätze als besondere Fälle der folgenden betrachten:

Die Puncte, deren Complexkegel bezüglich eines Complexes $n$ten Grades von einer gegebenen Geraden in einem Punctsystem geschnitten werden, für welches eine Invariante $k$ten Grades verschwindet, bilden eine Fläche der Ordnung kn, welche jene Gerade zur $\frac{kn}{2}$ fachen Geraden hat.

Die Geraden, welchen den Complexkegel eines gegebenen Punctes x bezüglich eines Complexes $n$ten Grades in einem Punctsysteme schnei-

den, für welches eine Invariante $k$ten Grades verschwindet, bilden einen Complex $\frac{kn}{2}$ten Grades.

Die Ebenen, an deren Complexcurven bezüglich eines Complexes $n$ten Grades von einer gegebenen Geraden ein Büschel von Tangentenebenen geht, für welche eine Invariante $k$ten Grades verschwindet, umhüllen eine Fläche knten Grades, welche das Büschel der durch jene Gerade gehenden Ebenen zu $\frac{kn}{2}$ fachen Tangentenebenen hat.

Die Geraden, von welchen an die Complexcurve einer Ebene u bezüglich eines Complexes $n$ten Grades ein Büschel von Tangentenebenen geht, für welches eine Invariante $k$ten Grades verschwindet, bilden einen Complex $\frac{kn}{2}$ten Grades. —

Die Singularitätenfläche eines Complexes $n$ten Grades*) entsteht auf doppelte Weise. Entweder entsteht sie als Ort derjenigen Puncte, deren Complexkegel eine Doppelkante hat, oder als Ort derjenigen Ebenen, deren Complexcurve eine Doppeltangente hat. Für Complexe zweiten Grades ist die Singularitätenfläche in Punct- und Ebenencoordinaten in meinem angeführten Aufsatze gegeben. Für ein beliebiges n erhält man die Singularitätenfläche auf folgende Weise.

*) Der Begriff einer solchen, welchen Plücker für Complexe zweiten Grades aufgestellt hatte, gab für allgemeine Complexe zuerst Pasch (Habilitationsschrift, Giessen 1870).

Bezeichnen wir eine Curve $n$ter Ordnung symbolisch durch

$$\gamma_x^n = \gamma'^n_x \ldots = 0;$$

ihre Discriminante (welche, gleich Null gesetzt, die Bedingung des Doppelpuncts liefert) sei in symbolischer Form durch

$$\Delta = \Sigma C . \Pi (\gamma \gamma' \gamma'')$$

dargestellt. Der Grad der Discriminante ist $3(n-2)^2$; daher ist ebenso gross die Zahl der in Δ auftretenden Symbolreihen, und die Zahl symbolischer Determinantenfactoren in jedem Terme von Δ ist $n(n\quad 1)^2$.

Man erhält hieraus die Gleichung einer Fläche $n$ter Ordnung

$$f = \gamma_x^n = \gamma'^n_x \ldots = 0$$

in Ebenencoordinaten in der Form

$$F = \Sigma C . \Pi (\gamma \gamma' \gamma'' u)$$

dargestellt; sie ist in den u vom Grade $n(n-1)^2$, also von der Classe $n(n-1)^2$.

Ist aber $f = 0$ ein Kegel, so geht $F = 0$ in eine Constante M über, multiplicirt mit der Gleichung der Spitze, erhoben zur Potenz $n(n-1)^2$, also hat man, wenn x diese Spitze ist,

$$F = M . u_x^{n(n-1)^2}.$$

Es ist leicht, dies an dem Complexkegel eines Complexes $n$ten Grades zu verfolgen. Die Gleichung desselben ist

$$(\alpha_x \beta_y - \beta_x \alpha_y)^n = 0$$

wo die y die laufenden Coordinaten sind. Setzt man dies gleich γ_y^n, so ist

$$\gamma_i = \alpha_x \beta_i - \beta_x \alpha_i, \quad \gamma_x = 0.$$

Daher wird

$$(\gamma, \gamma', \gamma'', u) = (\alpha_x \beta - \beta_x \alpha, \gamma', \gamma'', u)$$

$$= \alpha_x (\beta, \gamma', \gamma'', u) - \beta_x (\alpha, \gamma', \gamma'', u),$$

oder, nach bekannten Sätzen:

$$= \gamma''_x (\alpha, \beta, \gamma', u) - \gamma'_x (\alpha, \beta, \gamma'', u) - u_x (\alpha, \beta, \gamma', \gamma''),$$

oder endlich, da $\gamma'_x = 0$, $\gamma''_x = 0$:

$$= -(\alpha, \beta, \gamma', \gamma'') \cdot u_x.$$

Der Factor von u_x ist nur scheinbar unsymmetrisch in Bezug auf die drei in ihm vorkommenden Symbolpaare; ich werde ihn, um die Unsymmetrie des Ausdrucks zu vermeiden, durch [0, 1, 2] bezeichnen, so dass

$$[0, 1, 2] = -(\alpha, \beta, \alpha'_x \beta' - \beta'_x \alpha', \alpha''_x \beta'' - \beta''_x \alpha'')$$

ist, und bis aufs Vorzeichen gleich den Ausdrücken, welche durch Vertauschung der Symbolpaare aus diesem hervorgehen.

Es wird sonach für den Complexkegel

$$F = u_x^{n(n-1)^2} \cdot \Sigma C \cdot \Pi [0, 1, 2] = M \cdot u_x^{n(n-1)^2},$$

wo $M = \Sigma C\Pi[0, 1, 2]$.

Wenn nun eine Ebene den Kegel einer Curve mit Doppelpunct schneiden kann, ohne durch die Spitze zu gehen, so muss er eine Doppelseite besitzen, so dass eben dieses für jede Ebene eintritt. Es muss dann also F verschwinden, ohne dass $u_x = 0$, d. h. es muss $M = 0$ sein.

Es ist also $M = 0$ die Gleichung der Singularitätenflächen in Punctcoordinaten, und ganz ebenso wird ihre Gleichung in Ebenencoordinaten gebildet. Da jeder Factor der symbolischen Producte in M vom zweiten Grade in den x ist, so ist M überhaupt in den x vom Grade $2n(n-1)^2$, und man hat also den Satz:

Die Singularitätenfläche eines Complexes $n$ter Ordnung ist von der Ordnung und Classe $2n(n-1)^2$.

Wenden wir das Obige auf Complexe dritten Grades an, und erwägen wir, dass die Doppelpunctsbedingung einer Curve dritter Ordnung von der Form $T^2 - S^3 = 0$ ist, so sehen wir dass die Singularitätenfläche, welche hier von der 24ten Ordnung und Classe ist, in Punctcoordinaten durch eine Gleichung der Form $T^2 - S^3 = 0$, und ebenso in Ebenencoordinaten durch eine Gleichung $\Theta^2 - \Sigma^3 = 0$ dargestellt wird. Die Fläche besitzt also eine Rückkehrcurve 96ter Ordnung, welche der Schnitt der Flächen 12ter und 8ter Ordnung $T = 0$, $S = 0$ ist, und in welcher die Tangentenebenen die Fläche $T = 0$ berühren; und sie besitzt eine parabolische Curve, deren Tangentenebenen eine abwickelbare Fläche 96ter Classe bilden, welche die gemeinsame Developpable der Flächen 12ter und 8ter Classe

$\Theta = 0$, $\Sigma = 0$ ist, und deren Puncte zugleich der Fläche $\Theta = 0$ angehören.

Indem man es versucht die hier auftretenden Flächen $S = 0$, $T = 0$, $\Sigma = 0$, $\Theta = 0$ unabhängig von der obigen Betrachtung an und für sich zu definiren, bemerkt man, dass die eben ausgeführte Aufsuchung der Singularitätenfläche nur eine besondere Anwendung einer allgemeinen Methode ist, welche zu einer Classe covarianter Flächen eines Complexes $n$ter Ordnung führt.

Stellen wir die Bedingung auf, unter welcher eine Curve $n$ter Ordnung eine gewisse Invarianteneigenschaft besitzt, so erhalten wir eine Gleichung der Form

$$\Sigma C . \Pi(\gamma \gamma' \gamma'') = 0.$$

Die Anzahl der darin vorkommenden symbolischen Reihen sei k, so dass die fragliche Invariante vom $k$ten Grade ist. Die Ebenen, welche eine Fläche $n$ter Ordnung in Curven mit der betreffenden Invarianteneigenschaft schneiden, sind durch die Gleichung

$$\Sigma C . \Pi(\gamma \gamma' \gamma'' u) = 0$$

gegeben, und dieselben umhüllen daher eine Fläche $\frac{kn}{3}$ter Classe. Ist aber die Fläche $n$ter Ordnung ein Kegel, so nimmt diese Gleichung die Form

$$M . u_x^{\frac{kn}{3}} = 0$$

an, wo die x die Coordinaten der Kegelspitze sind. Indem wir dies auf die Complexkegel ei-

nes Complexes $n$ten Grades anwenden, zeigt es sich, wie oben, dass diejenigen Complexkegel, deren ebene Schnitte die fragliche Invarianteneigenschaft besitzen, durch die Gleichung

$$M = \Sigma C . \Pi[0, 1, 2] = 0$$

gegeben sind. Die Gleichung ist vom Grade $\frac{2kn}{3}$ in den x; und man hat also den Satz:

Die Spitzen aller Complexkegel eines Complexes $n$ten Grades, deren ebene Schnitte eine Invarianteneigenschaft besitzen, welche durch das Verschwinden einer Invariante $k$ten Grades einer Curve $n$ter Ordnung gegeben wird, bilden eine Fläche von der Ordnung $\frac{2kn}{3}$.

Diesem Satze entspricht dualistisch der folgende:

Die Ebenen, deren Complexcurven in Bezug auf einen Complex $n$ten Grades eine Invarianteneigenschaft besitzen, welche durch das Verschwinden einer Invariante $k$ten Grades einer Curve $n$ter Classe gegeben wird, umhüllen eine Fläche $\frac{2kn}{3}$ter Classe.

Man erhält hieraus sofort die Definitionen der gedachten vier Flächen, welche bei den Complexen 3ten Grades auftreten, indem man die durch die Gleichungen $S = 0$ bez. $T = 0$ ausgedrückten Eigenschaften der Curven dritter Ordnung und Classe einführt.

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

14. Februar. №. 4. 1872.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 3. Februar.

Enneper, über die Flächen mit einem System sphärischer Krümmungslinien (Fortsetz.)
Benfey, über die Entstehung des Indogermanischen Vocativ (erscheint in den Abhandlungen).
Sauppe legt einen Aufsatz von Herrn Dr. Matz vor: Mittheilungen über Sammlungen älterer Handzeichnungen nach Antiken.
Wöhler, Mittheilung über das von Nordenskjöld in Grönland entdeckte Meteoreisen.

Mittheilungen über Sammlungen älterer Handzeichnungen nach Antiken.

Von

Dr. Matz.

Veranlassung zu der nachfolgenden Zusammenstellung gab mir die Beschäftigung mit einer bedeutenden Sammlung von Handzeichnungen nach Antiken, die kürzlich aus Italien nach Deutschland gebracht, jetzt Eigenthum des Herzogs von Coburg-Gotha ist. Indem ich

mich über die verwandten Erscheinungen zu orientiren suchte, um der neuen Sammlung ihren Platz anzuweisen, ergab sich theils aus eigenen gelegentlichen Aufzeichnungen, theils aus dem, was ich zu diesem Zwecke durchsah, theils endlich aus mir von befreundeter Seite gemachten Mittheilungen eine Anzahl von Nachrichten, die wichtig genug schienen um sie einmal in übersichtlichen Ordnung vorzulegen. Ich halte dies jetzt für um so gebotener, je weniger ich selbst, und je mehr andere in der Lage sein dürften dieselben bedeutend zu vermehren. Kenner und Besitzer von Sammlungen älterer Handzeichnungen würden sich durch Mittheilung dessen, was ihnen in dieser Art bekannt sein sollte, ein gewiss nicht unbedeutendes Verdienst um die Archäologie erwerben, denn der Nutzen, den diese aus solchen Nachbildungen antiker Monumente unter Umständen ziehen kann, ist in bescheideneren Grenzen durchaus dem ähnlich, welchen ältere handschriftliche Sammlungen der Epigraphik gewährt haben.

So lückenhaft nun die folgende Zusammenstellung (die über den Anfang des achtzehnten Jahrhunderts nicht ausgedehnt ist) auch sein mag, so bilden die in ihr gegebenen Notizen doch in sofern ein Ganzes, als sie ein Bild der keineswegs stets von denselben Kreisen ausgehenden Bestrebungen geben, sich die merkwürdigsten antiken Bildwerke in Nachbildung zum Studium und zum Genuss gegenwärtig zu halten. An der Spitze steht auch hier wieder der in der letzten Zeit so viel genannte Kiriacus de' Pizzicolli, der die Antike durchaus unter dem antiquarischen Gesichtspunkte betrachtete. Darauf folgen die Künstler, denen natürlich nicht lange entgehen konnte, eine wie grosse Fülle

der bedeutendsten und schönsten Motive hier offen zu Tage lag. Um die Mitte des sechzehnten Jahrhunderts tritt dann die antiquarische Forschung mit frischen Kräften und ansehnlichen Mitteln wieder auf und wird namentlich unterhalten und gepflegt von reisenden Liebhabern und Gelehrten, die eine Erinnerung an das was sie in Italien gesehen, in ihre Heimath zurückzubringen liebten, bis dann an die Stelle der kostspieligen Handzeichnungen, die mitunter von eigens dazu mitgebrachten Zeichnern angefertigt wurden, allmählig wohlfeilere Surrogate treten.

Von den Zeichnungen, die Kiriacus de' Pizzicolli auf seinen vielfachen Reisen in Italien sowohl wie in der Levante machte, sind uns nur rohe Nachbildungen erhalten, theils in dem Codex des älteren San Gallo auf der Barberina, aus dem Laborde: Athènes I zu p. 33 ein Facsimile der athenischen Monumente gegeben, theils von Hartmann Schedel herrührend, in einer Handschrift des 16. Jahrhunderts, die sich auf der Münchener Bibliothek befindet: Cod. Lat. 716. Nachdem de Rossi zuerst auf dieselbe aufmerksam gemacht, ist das, was sie archäologisch Interessantes bietet, besprochen worden von Jahn im Bull. dell' Inst. di corrisp. arch. 1861 p. 180—192 und in: Aus der Alterthumswissenschaft S. 335—352.

In dem erwähnten Pergamentcodex des Francesco di Paolo Giamberti da San Gallo auf der Barberina finden sich sonst keine Zeichnungen, weder nach Statuen noch Reliefs, mit Ausnahme dessen, was mit der Architectur im engsten Zusammenhang steht. Nur auf der innern Seite des Einbandes ist von sehr ungeschickter Hand eine Darstellung skizzirt, die einem Rundaltar entnommen zu sein scheint;

Ich theile sie mit weil mir das Monument nicht bekannt ist: Eine langbekleidete Figur mit nach hinten flatterndem Mantel, der schleierartig auch über das Hinterhaupt gezogen ist, schreitet nach links. Auf der rechten Schulter trägt sie eine Keule. Ihr den Rücken zuwendend steht nach rechts Apollon, das Haar in einen Krobylos gesammelt mit langer Chlamys, in den Händen Leier und Plectrum. Darauf gleichfalls nach rechts Artemis mit Köcher, zwei brennende Fackeln vor sich haltend. Auf sie zu schreitet Nike mit der hoch erhobenen Rechten in eine wagrecht gehaltene Schale eingiessend. Zwischen und unter den Figuren befinden sich Reminiscenzen an einige fehlerhaft abgeschriebene Inschriften, die zu dem Monument sicher in keiner Beziehung stehen. Darunter die Worte: *a santo agnjolo fuori.* Für das Relief vergleiche man Winckelmann, M. J. n. 23.

Parecchi libri disegnati dalle belle anticaglie di Roma von der Hand des Filippo di fra Filippo erwähnt Benvenuto Cellini in seiner Vita (ed. Carpani, Milano 1806 p. 34). Er selbst übte sich, wie er dort erzählt, an den Sarkophagen, die im Campo Santo zu Pisa aufgestellt sind.

In einem auf der Bibliothek zu Siena aufbewahrten Zeichenbuch des Giuliano Francesco da San Gallo († 1517) in Octav befinden sich ausser Architecturstücken auch die mit der Feder gezeichneten Skizzen zweier antiken Reliefs:

Fol. 11b und 28a das schöne bacchische Relief der loggia scoperta des Vatican (Visconti M. P. Bl. IV, 21).

Fol. 29b ein anderes bacchisches Relief: Von links anhebend: ein auf den Zehen nach rechts

schreitender flötenblasender Satyr; ein zweiter gleichfalls nach rechts schreitend, den linken Arm, über den ein Fell herabhängt, wagrecht ausstreckend, wahrscheinlich hielt die Hand einen umgekehrten ausfliessenden Kantharos, zu welchem der neben ihm schreitende Panther den Kopf emporreckt. Die Linke hält den Thyrsos. Die dritte Figur ist eine das Tympanon schlagende Mänade. In anderer Reihenfolge finden sich diese Figuren auf dem Relief des Brittischen Museums II, pl. XII und Mus. Borb. VII, 24.

Wie eingehend Rafael die Antike studirte, würden seine Werke allein beweisen. In seiner späteren Zeit veranlasste er wohl hauptsächlich seine Schüler zur Anfertigung von Copieen alter Kunstdenkmäler. Sicher übertrieben ist die Notiz bei Vasari (Ausg. von Siena 1791 V, p. 292): *Era tanta la grandezza di questo uomo, che teneva disegnatori per tutta Italia a Pozzuolo e fino in Grecia, nè restò d'avere tutto quello che di buono per quest' arte potesse giovare.* Zu Rom war für ihn besonders thätig Giovanni da Udine, der die Reste alter Wandmalereien namentlich die der Titusthermen für ihn zeichnete (Vasari Vite IX, p. 29)[1]. Mir ist nicht bekannt, dass sich grössere Serien solcher Zeichnungen erhalten haben, denn die Vermuthung, eine Sammlung colorirter Zeichnungen römischer Wandgemälde, die sich im 17. Jahrhundert in der Bibliothek des Escurial befand, möge Rafaelischen Ursprungs sein, entbehrt bis jetzt durchaus jeder näheren Begrün-

1) Gegen die Beschuldigung, die Wandgemälde, nachdem sie copirt waren, zerstört zu haben nimmt ihn schon in Schutz Lomazzi, Trattato della Pittura l. VI, cap. 49.

dung [1]). In der Bibliothek des Earl v. Leicester zu Holcam Hall bei Wells in Norfolk befindet sich ein früher dem Carlo Maratta gehöriges Buch mit Skizzen nach antiken Resten, meist Architectur von dem Passavant in seinem Rafael II, p. 586 eine Beschreibung gegeben [2]). Nachweise über Vereinzeltes finden sich ebenda I, p. 317. II, p. 468, 550 und 673. Eine Auswahl von Reminiscenzen antiker Sculpturen in Rafaels Werken giebt Springer: Bilder aus der neueren Kunstgeschichte p. 67. Ueber Marc Antons Stiche nach Antiken vielleicht mit Zugrundelegung Rafaelischer Zeichnungen vgl. Passavant I, 582.

Auch Polidoro da Caravaggio und Maturino wurden wahrscheinlich durch Rafael auf das Studium der Antike geführt. Vasari, Vite de' pittori (Sieneser Ausg. VI, p. 273) erzählt von ihnen: . . . *cominciarono si a studiare le cose dell' antichità di Roma, ch'eglino contraffacendo le cose di marmo antiche ne' chiari e scuri loro, non restò vaso, statue, pili, storie, nè cosa intera nè rotta ch'eglino non disegnassero, e di quella non si servissero.* Sie hatten den practischen Zweck dabei im Auge, die ihnen aus dieser Quelle zuströmenden Motive bei der Façaden- und Friesmalerei, für die man meistentheils antike Vorwürfe wählte, zu benutzen. Eine Note zu der erwähnten Ausgabe bemerkt, dass der reiche Liebhaber Crozat nicht weniger als 283 Stücke dieser Zeichnungen in seinem Cabi-

1) Ausgesprochen ist sie von Caylus: Recueil de peintures antiques trouvées a Rome; imiteés pour les couleurs et le trait d'après les desseins coloriés par Pietro-Sante Bartoli et autres dessinateurs Seconde Edition Paris 1783 p. 6.

2) Vgl. auch den Arch. Anzeiger 1864 p. 213 *.

net besessen. Die Note ist angeblich der römischen Ausgabe entlehnt, wo sie jedoch gerade fehlt. Sehr auffallend ist auch, dass in der von P. J. Mariette 1741 zu Paris herausgegebenen description sommaire des desseins du cabinet Crozat unter dem Namen des Polidoro diese Zeichnungen mit keiner Silbe erwähnt werden.

Das auf der öffentlichen Bibliothek zu Siena aufbewahrte Skizzenbuch Baldassare Peruzzis gewährt keine irgendwie beträchtliche Ausbeute. Es finden sich unter den architectonischen Entwürfen auch einige offenbar auf ganz zufällige Anregung hin entstandene in verschiedener Manier oft nur sehr flüchtig, aber immer geistreich angelegte Skizzen nach Antiken. Ich theile hier meine kurzen Aufzeichnungen über dieselben mit:

Fol. 2. Rückansicht einer Reiterstatue, wie mir schien, nach dem Marc Aurel des Capitolplatzes aufgenommen.

Fol. 2b. Zwei Barbarenstatuen. Auf demselben Blatt Statue eines Mädchens im dorischen Chiton mit Ueberschlag und Mantel.

Fol. 3b. Bequem auf einem Stuhl sitzende Frau mit über einander geschlagenen Beinen; der linke Arm stützt sich auf den Stuhl, der rechte ist in die Höhe gebogen.

Fol. 3a. Karyatide mit erhaltenem Kopfe; der des Braccio nuovo ähnlich. — Auf demselben Blatte die Rosse des Monte Cavallo.

Herme mit unten sehr spitz zulaufendem Schaft; der Kopf ist verhüllt mit einem Gewandstück, das unter dem Kinn zusammengebunden, vorn in zwei Zipfeln herabfällt.

Fol. 7b. Die sitzende Ariadne des Pal. Giustiniani.

Fol. 8a. Vermuthlich von einem Basrelief: Mnemosyne nach rechts stehend vor einem nach links sitzenden bärtigen Manne. Davon getrennt eine halbnackte en face stehende weibliche Figur, die den rechten Fuss auf eine Kugel setzt.

Fol. 10 a. Zwei Torsen von Imperatorenstatuen im Harnisch.

Fol. 11 a. Die zwei Panstatuen des Pal. Valle, jetzt im Capitolinischen Museum.

Fol. 11 b. Herme des Herakles, in ein Löwenfell gehüllt mit der Keule.

Fol. 20 a. Statue dem Pädagogen der Niobegruppe verwandt.

Fol. 40 a. Denkstein mit dem Vogelkäfig der Augurn im Pal. Albani.

Fol. 54 a. Antinousstatue ägyptischer Bildung.

Fol. 54 b. Relief. Der Schwan im Schoss der nach rechts gelagerten Leda. Im Hintergrund ein Baum, rechts oben ein bogenschiessender Eros.

Fol. 59 b. Statue der ephesischen Artemis.

Fol. 64 a. Skizze nach einem Sarkophag. Medea auf dem Drachenwagen. Vgl. Dilthey, Annali dell' Inst. 1869 p. 66.

Fol. 64 a. Sarkophagplatte. Zwei schwebende Eroten halten einen clipeus. Unter diesem in kleiner Figur ein Kahn mit zwei Eroten. Rechts und links davon lagern Oceanus und Tellus.

Fol. 65 a. Relief. Stierführende Nike. Vermuthlich das jetzt in den Uffizien befindliche Exemplar.

Fol. 65 a. Zwei andere Scenen des Medeasarkophags. Die Kinder der Medea mit Brautgeschenken vor Kreusa. Davon getrennt durch den en face stehenden Doryphoros Kreusa im brennenden Gewande, gefolgt von dem entsetzten Kreon; rechts die Kinder.

Fol. 66 a. Der Kybelealtar der Villa Albani.
Fol. 69 a. Schöne komische Maske.

Zwischen den Jahren 1550 und 1555 ist in Rom eine Sammlung von Zeichnungen nach Antiken entstanden, die im Jahre 1870 von Herrn Gerson, sächsischem Generalconsul in Frankfurt a. M. erworben und von diesem dem Herzog Ernst von Coburg-Gotha geschenkt wurde. Ueber den Inhalt und den Werth dieser Sammlung vergleiche man jetzt die Monatsberichte der Berliner Academie von 1871 S. 445 ff.

Von ihr ist durchgehend abhängig die zum Theil von demselben Zeichner angefertigte Sammlung des Pighius, jetzt in der königlichen Bibliothek zu Berlin (libr. pict. A, 61). Ueber diese siehe: Jahn in den Berichten der sächsischen Ges. der W W. 1868 S. 161—235.

Pirro Ligorio, der bis 1568 in Rom, von da am Hofe zu Ferrara lebte entfaltete nicht nur auf dem Gebiete der lateinischen Inschriften, sondern auch auf dem der antiken Architectur und Sculptur eine ebenso ausgedehnte und rührige wie verderbliche Thätigkeit. Seine Sammlungen in nicht weniger als 35 Bänden, die er zum Theil seinem Gönner Alphons II. widmete, wurden vom Herzog Carl Emanuel von Savoyen gekauft und befinden sich in Turin. Meines Wissens sind dieselben auf die Zeichnungen nach antiken Bildwerken hin nie untersucht worden, was doch jedenfalls sehr wünschenswerth wäre, weil sie sicher die Quelle so mancher der seitdem in der archäologischen Litteratur fortgepflanzten Fälschungen sind. Copieen von zwölfen dieser Bände sind mit der Bibliothek der Königin Christine, die sie anfertigen liess, in den Vatican gekommen. Manches findet sich auch sonst zerstreut.

Ueber den berühmten und besonders durch seine Zeichnungen des Stadtplanes wichtigen, jetzt in der Vaticana aufbewahrten Codex des Fulvius Ursinus macht mir mein Freund A. Trendelenburg folgende Mittheilung:

Der Codex 3439 enthält 179 numerirte Blätter, auf welche die von verschiedenen Händen herrührenden Zeichnungen aufgeklebt sind; wahrscheinlich nach Anordnung des Ursinus selbst. Die Anlage der Sammlung lässt sich am besten characterisiren als eine planmässige Materialiensammlung für eine Reihe von Fragen über römische Antiquitäten. Nach drei leeren, nicht numerirten Blättern folgen Fol. 1—10 ägyptische in Rom befindliche Denkmäler. (Obeliske, Sphinxe u. Aehnliches auf dem letzten Blatt mit Statuetten des Priap und der ephesischen Artemis untermischt. Fol. 11—51 Materialien für römische Topographie Fol. 11. 12. Drei Pläne der Roma antiqua und den sieben Hügeln, 13—23 die Fragmente des capitolinischen Stadtplans, 24—51 Grund-Aufrisse, Ansichten und architectonische Details antiker Tempel, Grabmäler und anderer Gebäude Roms; das Forum von Präneste auf den letzten beiden Blättern) Fol. 52—66 Circus, Gladiatoren und Schauspiele (Sarkophage mit Circusspielen, Grundrisse von mehreren Circus, phantastische Entwürfe von Circus und Theater während der Vorstellung, Grabsteine siegreicher Gladiatoren, Münzen und Gemmen mit Circus und Amphitheater). Fol. 67—98 Kriegswesen, Triumph und Opferprocessionen (Fol. 67: der Sarkophag mit Ares und Aphrodite, welche Hephästos den Göttern zeigt, ein anderer mit Amoren die ein Trophäum errichten. 68—72 Waffen zu Trophäen zusammengestellt, weiterhin Reliefs der Trajanssäule, des Marc

Aurel — Constantin — Titus und Severusbogens, das schöne Relief mit dem Schiffskampf aus Venedig) Fol. 94—114 Tischwesen der Römer (Grabsteine mit Todtenmahl auch christliche; phantastische Zeichnungen grosser Gelage, jedes Triclinium mit neun Schmausenden, Sarkophagdeckel mit darauf liegenden Verstorbenen). Fol. 115. 116 Miscellanea: Nymphearelief, Kopf des bärtigen Bacchus, stehender Discobol der Sala della Biga. Fol. 117—122 Orientalisch-römische Gottheiten (Isis-Fortuna, Mithras Cybele) Fol. 123. 124 Hermen von Philosophen Rhetoren Staatsmännern u. s. w. mit Inschriften 125—144 Altäre und Grabcippen. Fol. 145 noch einige ägyptische Gottheiten, Harpokrates; ein Herakles. 146—161 römische Costümfiguren, numerirt und am Ende des Codex auf einem besonderen Blatte verzeichnet. 162—164 Columbarien. 165—178 Maasse und Geräthe des täglichen Lebens (Lampen, Vasen, Gefässe, Gewichte, Trinkhörner und ähnliches) dann folgen noch 7 nicht numerirte Blätter auf deren erstem ein Autograph Baldassare Peruzzis, eine Restauration vom Innern des Pantheon enthaltend, auf 2 und 3 jener Index; die übrigen vier Blätter leer. Die abgebildeten Monumente sind vielfach willkührlich ergänzt und an anderweitigen Ungenauigkeiten fehlt es nicht.

Von einer Sammlung Handzeichnungen nach Antiken im Basler Museum, nie es scheint aus dem 16. Jahrh., hat mir R. Schöne Nachricht gegeben. Der Codex hat bez. U. 4. vorn die ältere Bezeichnung Bibliothecae publicae Basiliensis XCVII tabulae delineatae Variorum. 6—29 sind Federzeichnungen nach römischen Sculpturen mit einigem Geschick gemacht, aber schwerlich von einem ordentlich gebildeten Künst-

ler. Beischriften in zum Theil holländischer Sprache sind eingeklebt. Leider fand Schöne nicht Zeit die Handschrift näher zu untersuchen. Er macht über Einzelnes noch folgende Mittheilungen: no. 6: Relief in der Form eines Kreissegments mit römischen Waffen. no. 7: Sitzende Minerva oder Roma. no. 8: Stück des von Jahn und Dilthey (Annali 1869. p. 11) mit A bezeichneten Medeasarkophags. no. 9: Prozession mit Lictoren. Von den übrigen Nummern bietet no. 12: (fragmentirt) einen Musensarkophag; no. 13: drei weibliche Figuren im Tanzschritt.

Jo. Jac. Boissard aus Besançon war nach der gewöhnlichen Angabe von 1555—1559 in Rom, wo er, des Zeichnens selbst mächtig, den Vorsatz fasste alles was ihm an merkwürdigen Alterthümern, seien es Reste der Architectur oder Sculptur vorkam zu zeichnen. Die französischen Bürgerkriege brachten ihn, wie er selbst erzählt, um alle seine Papiere; nur ein geringer Theil, den er kurz vorher nach Metz gebracht hatte, blieb ihm übrig. Die Herausgabe desselben war jetzt seine Hauptsorge. Seine Antiquitates Romanae blieben auch in der Folgezeit höchst unverdienter Weise ein ausserordentlich geschätztes und vielbenutztes Buch, das eine Reihe von Auflagen erlebte. Ein so vollkommen unausgebildetes Gefühl für die Antike besassen noch die beiden darauf folgenden Jahrhunderte, dass selbst Männer, die sich in Rom umgesehen, das Werk als die lauterste Quelle benutzten, während es von Fälschungen der gröbsten Art, die Boissard vielleicht nicht alle zur Last fallen, wimmelt. Nachbildungen Boissard'scher Stiche finden sich durch die antiquarischen Abhandlungen der Folgezeit überall zerstreut; eine besonders grosse Zahl ist

noch in Montfaucons grosses Sammelwerk l'Antiquité expliquée übergegangen. Der gelehrte Benedictiner benutzte auf der Bibliothek des Bischofs von Metz Boissards Originalmanuscript aus dem er noch viele unedirte Zeichnungen zog. Sie sind um nichts besser als die schon vorher bekannten. Vgl. A. E. I, 1 préf. p. XIX und Supplem. I p. XII.

Von dem römischen Gelehrten Corvisieri wurde mir im März 1869 ein Manuscript von 40 Blättern in 4° mitgetheilt, enthaltend: Memorie di Fra Bartolomeo della Porta frate di San Marco cavate di diversj Luoghj in Roma e fuorj di Roma dellj Imperatorj Antichj. Wie die beigeschriebenen Daten zeigen sind die darin enthaltenen Skizzen während der Jahre 1563—1566 gemacht. Das Buch enthält Zeichnungen von Thieren, Ortschaften (namentlich eine nicht üble Ansicht von Amelia) und endlich auch antiken Denkmälern, darunter jedoch nichts bedeutendes.

Fol. 2: Zeichnung des Grabcippus des C. Julius Postumus aus *Sã Gio. e paolo in sul monte celio.*

Fol. 3 ebendaher: Fragment einer Sarkophagplatte mit Meerwesen.

Fol. 33: Relief mit Darstellung eines Gladiatorenkampfes: *di travertino a un castello detto monte Caprano.*

Fol. 36a: Cippus der Sessia Labionilla, unter der Inschrift ein bacchisischer Zug.

Fol. 36b: Runde Ara mit und Stierschädeln herabhängenden Guirlanden, dazwischen Opfergeräth. *In una base tonda in San Fermiano chiesa del vescovado di Amelia.*

Fol. 37b: Darstellung einer dextrarum iun-

etio. *Di travertino murato nel campanile del vescovado.*

Ueber die Zeichnung einer runden Marmorbasis mit Darstellung Pans und der Horen vgl. Bull. dell' Inst. 1869 p. 131.

Der gelehrte Peirescius brachte während seines Aufenthalts in Italien und Rom (um 1600) eine bedeutende Menge von Zeichnungen nach Antiken zusammen, wie uns sein Biograph Gassendus (Vita Peirescii Quedlinb. 1706, p. 40 u. 45) erzählt. Er liess den Jupiter Pluvius der Antoninssäule zeichnen, für den Scaliger sich besonders interessirte: *nec vero harum modo rerum delineationes habere voluit, sed rariorum etiam quarumvis statuarum, quas disquisivit in Capitolio, in Vaticano, in Farnesianis in Caesianis, in caeteris aedibus itemque in hortis ac vineis et ut breve faciam in quibuslibet privatis publicisque locis; pictores deducens, qui non modo statuas intemerataque alia opera sed truncos etiam et ruinas aedificiorum veterum qua occurrerent adumbrarent.* Diese Sammlung scheint nach dem Tode des Mannes ihrer raschen Auflösung entgegen gegangen zu sein. Schon Montfaucon, nachdem er den Umfang und den Werth derselben hervorgehoben, indem Peirescius mehr zusammengebracht habe als irgend ein anderer ihm bekannter Kenner des Alterthums, klagt (Ant. Expl. I, 1 préface p. VIII): *c'est domage que ce grand nombre de manuscrits soit ou perdu ou dissipé.* Nichts destoweniger gelang es ihm doch, einiger Bruchstücke dieser Sammlung noch habhaft zu werden.

Nach Ant. Expl. I, 1 praef. XX erhielt er vom Abbé de Fontenu einige jener Manuscripte, denen er ausgezeichnete Stücke seiner Sammlung entnahm. — Eine andere ihm gleich-

falls nützliche Handschrift lieh ihm der Bibliothekar der Abtei von S. Victor zu Paris ib. p. XXI. — Eine endlich befand sich in der königlichen Bibliothek mit der Nummer 9932. Ant. Expl. Suppl. I, p. XII und Suppl. III, p. 50. Gleichfalls von Montfaucon benutzt und vielleicht mit einem von diesen identisch ist ein Manuscript des Peirescius, welches sich gleichfalls in der grossen Pariser Bibliothek befindet, Cod. Lat. 6012. R. Schöne hat von dem, was an antiken Denkmälern darin vorhanden war, Notizen und Durchzeichnungen entnommen.

Fol. 1, 2 und 3. Verschiedene Ansichten einer stehenden Zeusstatue mit halbnacktem Oberkörper, in der linken Hand des herabgehenden Arms den Blitz. Der rechte Arm ist dicht unter der Schulter gebrochen; er war nicht gehoben. Angabe von Bemalung: das Haar golden, das Fleisch fleischfarben, der Blitz roth, goldgehöht, Gewand hellblau; gefunden *au lieu de Trenquetaille le 24. Juliet 1614.*

Fol. 37. Herme mit abgebrochenem Kopf. Auf der Brust die Inschrift G̅. T. N̅ || VRBINVS || SER, wahrscheinlich aus Arles.

Fol. 36. Relieftafel mit Darstellung eines Schiffes: *Dans St. Honoré au sueil de la porte de la Chapelle notre dame* zu Arles; abgeb. Millin Voyage dans les départemens du midi de la France pl. LXI, 8.

Fol. 92. Sarkophagfragment. Ringsum gebrochen. Drei Männer in phrygischen Mützen. Im Hintergrund eine bärtige Herme *Massiliae apud Tuselium.* Abgeb. Montf. A. E. Suppl. III, pl. 18, 1; vermuthlich christlich vgl. Bottari, Sculture e pitture sacre I T. XXII. Die Abbildung bei Montfaucon ist vermittelst Durchzeichnung aus der Handschrift übertragen.

Fol. 94. Ledasarkophag zu Aix: abgeb Millin Voyage pl. XXXVII, 1. G. M. CXLIV, 522.

Fol. 95. Sarkophagfragment, rechts gebrochen. Die sitzende von ihren Frauen und zwei Eroten umgebene Phädra.

Eol. 112. Ichnographia Thermarum Foroiuliensium.

Etwas älter als Peirescius war sein Landsmann Pierre-Antoine sieur de Bagarris et du Bourget (Bagarrius) 1567—1620. Gassendus in der Vita Peirescii (Quedlinb. 1706 p. 25) nennt ihn *Rei antiquariae peritissimum: postea: quippe Henricus Magnus, propter famae celebritatem illum arcessivit et cimeliarcho suo praefecit.* Spon. Miscell. p. 7 bemerkt zu einem Bildwerk, das Eros darstellt, wie er den Schmetterling mit der Fackel quält: *Descripsi ex manuscriptis viri ill. et eruditiss. Petri Antonii Rascasii de Bagarris, quae in manus meas inciderunt.* Von den Scheden und codices delineati dieses Gelehrten spricht er noch in der Vorrede p. II, 6 und p. 21. Nach der Biographie universelle deponirte de Bagarris seine Papiere in der Bibliothek des königlichen Collegiums von Clermont zu Paris, mit dessen Büchern sie wahrscheinlich 1764 verkauft wurden.

Abeken in den Annali 1841 p. 121 berichtet von einem Florentiner Codex (gall. degli Uffizj N. 204), mit Zeichnungen tüchtiger Künstler des 16. und 17. Jahrhundert. Unter diesen findet sich unter anderm das im 16. Jahrh. noch wohlbekannte Monument des Eurysaces und das Tetrastylon der Arvalbrüder. Ob auch andere antike Bildwerke wird nicht angegeben, ist aber zu vermuthen.

Die reichste und bedeutendste Sammlung

dieser Art besass jedoch der in der ersten Hälfte des siebzehnten Jahrhunderts lebende († 1657) Kunstmäcen und Freund antiquarischer Forschungen Cassiano dal Pozzo (latinisirt Eques a Puteo franz. Depuis). Ueber ihn giebt es eine wenige Jahre nach seinem Tode erschienene Lobschrift Carlo Datis unter dem Titel: Delle lodi del commendatore Cassiano dal Pozzo orazione di Carlo Dati, Firenze 1664. Ich habe sie zu Rom auf der Corsiniana benutzt, leider ist sie mir hier nicht zugänglich. Vgl. ausserdem die bezüglichen Artikel in der Biographie universelle und in Ladvocats Dizionario storico. Dal Pozzo war in Turin geboren, machte jedoch seine Studien in Rom, wo die Reste des Alterthums in besonders hohem Grade seine Aufmerksamkeit auf sich zogen. War er deshalb ein eifriger Sammler von Antiquitäten jeder Art, so beschäftigte ihn bei der Erkenntniss wie Weniges nur und wie Unzusammenhängendes ein Privatmann auch mit bedeutenden Mitteln auf diesem Gebiet erreichen könne, der Gedanke, wenigstens in getreuen Zeichnungen in möglichster Vollständigkeit Alles um sich zu versammeln, was an Bedeutendem und Interessantem vorhanden war. Es gelang ihm, theils eine Anzahl älterer Zeichnungen zu erwerben, theils zeitgenössische Künstler, unter denen auch der ihm persönlich befreundete Nicolaus Poussin genannt wird, für sein Unternehmen zu gewinnen.

Besonders rühmend gedenken die Zeitgenossen stets seiner Verdienste um das grosse zu Palästrina befindliche Mosaik, das er bald nach seiner Entdeckung im Anfang des 17. Jahrhunderts in colorirter Zeichnung nachbilden liess.

Da das Mosaik bald darauf bei einem ungeschickten Transport ausserordentlich stark mitgenommen werden sollte, so wurde diese auf 18 Blättern ausgeführte Zeichnung für die Restauration von grosser Wichtigkeit. (Vgl. Fea Miscell. II. p. 90 und 271). Nach Carlo Dati a. a. O. p. 10 [1]) ward die Sammlung von Sachverständigen geordnet und in 23 (Ladvocat giebt an 24) grosse Bände vertheilt. Je weniger der reiche Liebhaber daran dachte selbst den wissenschaftlichen Gewinn aus seinen Sammlungen zu ziehen, um so lieber sah er es, wenn sich Freunde des Alterthums und fremde oder einheimische Gelehrte mit denselben beschäftigten. Sie blieben auch noch nach seinem Tode zugänglich und an der liberalen Verwaltung änderte sich nichts. Von älteren Gelehrten benutzten dieselben: Vandale (Vgl. Visconti M. P. Cl. VII. p. 101 der Mailänder Ausgabe zu Tav. XVIII.) Jo. Baptista Casali (De tragoedia et comoedia bei Gronov. Thes. A. Gr. VIII. p. 1608) wo eine der Schauspielerfiguren eines bekannten Reliefs der Villa Panfili (Winckelm. M. J. n. 189) wiedergegeben ist; ebenderselbe de prophan. Rom. ritibus (nach Visconti M. P. Cl. IV, p. 41). S. Bartoli ergänzte die Zeichnung einer alten Wandmalerei, da das Original im Pal. Massimi sehr zerstört war, nach einer Zeichnung dal Pozzos (Vgl. Caylus Recueil de pein-

1) Datis Worte sind p. 10 *e facendole (le antichità) con la sua diligente assistenza per mano di professori insigni esattamente disegnare e col parere de' più eruditi investigatori delle cose vetuste ordinatamente esporre, nel corso di lungo tempo con grande spesa studio e fatica venne a formare in ventitre ampli volumi un corpo di tutta l'antichità di Roma.*

tures ctr. Tf. 80). Ciampini: Vetera Monumenta I p. 58 sagt von einem Theil seiner Abbildungen, dass er sie der Sammlung unseres Commendatore entnommen, *cui multa nos debere fatemur*. Spon in der Vorrede seiner Miscellanea nennt p. II unter dem Abschnitt toreumatographia auch die *codices delineati des eques a Puteo* und von denselben ist die Rede in seinem Voyage d'Italie, de Dalmatie, de Grèce et du Levant T. I. p. 40 und p. 400.

Die Sammlung wurde noch am Ende des 17. Jahrhunderts im Palazzo Lancelotti an der Südostecke der Piazza Navona aufbewahrt. Die Roma sacra antica e moderna von 1687. Theil 3 p. 90 und die Descrizione di Roma moderna von 1697 p. 301 rechnen das Pozzosche Museum namentlich wegen dieser in ihrer Art einzigen Sammlung noch zu den grössten Sehenswürdigkeiten Roms.

Im Anfang des folgenden Jahrhunderts wurde es verkauft und zerstreut. Die Zeichnungen erstand damals der Papst Clemens XI. (Albani); nicht wie Reumont (Geschichte der Stadt Rom III. S. 713) annimmt, um sie mit der Vaticana zu vereinigen, wo sich, wie mir de Rossi versichert hat, nichts aus dem Nachlass des dal Pozzo findet, sondern für seine Privatbibliothek (Vergl. Ladvocat a. a. O. und Turnbull A curious collection of ancient Paintings London 1744 p. 5). Aus dieser ging die Sammlung in diejenige des Cardinals Alexander Albani über. Winckelmann erzählt, dass sie ihm bei der Ausarbeitung des Catalogs des Stoschischen Museums von grossem Nutzen gewesen (Mus. Stosch préf. p. IV). Sie scheint vom Cardinal selbst vermehrt worden zu sein, denn

es heisst a. a. O. *Cette collection a été faite en partie par son Eminence et en partie par le celebre commandeur del Pozzo. On y trouve réuni non seulement tout ce qui est encore de nos jours à Rome, mais aussi tout ce qui existoit il y a environ deux siècles.* Winckelmann nennt sie im Laufe seines Buches an mehreren Stellen. Noch in der Vorrede p. XVII wird erwähnt ein Basrelief mit einer bärtigen Sphinx. In der Beschreibung p. 13 das Fragment einer geflügelten Isis; p. 46 Zeus auf einem Basrelief in einem langen Gewande in der L. ein Füllhorn in der R. eine Patera auf dem ein Schmetterling sitzt; p. 65 Sarkophagrelief des Palazzo Capranica: Minerva Flöten blasend und Marsyas; p. 76 Darstellung einer Bäckerei; p. 108 Glaspaste mit Darstellung des Portumnus; p. 127 ein Bacchanal; p. 230 Silen einen Eroten tragend; p. 249 Broncerelief mit einem Satyrkopf, auf der Rückseite die Inschrift *ΔΡΥΜΟΥΣ ΚΑΙ ΑΝΘΡΑ ΦΙΛΟΥΜΕΝ* — p. 428; Mars und Rhea Silvia in einem Tempelfronton in Basrelief; p. 549 Basrelief mit Darstellung des Hercules und Silvan neben einem Altar, zwischen beiden ein Schwein.

Da Winckelmann nie vergisst hinzuzufügen, dass diese Sammlung sich im Besitz seiner Eminenz des Cardinals Alexander Albani befinde, so muss es auffallen, dass er diesen Zusatz im Text zu den Monumenti Inediti, wo einige Stücke aus jener Sammlung publicirt werden, unterlässt. So bei Gelegenheit des unter No. 75 gezeichneten ägyptischen Monumentes, ferner des Marsyassarkophags no. 18; endlich des damals schon in der Pembrokschen Sammlung zu Wiltonhouse befindlichen Niobidenreliefs no. 89. Der Grund liegt darin, dass die Sammlung inzwischen

im Jahr 1762 bei einer Geldverlegenheit des Cardinals durch Adam von Edinburg den Bruder des Architecten nach England verkauft worden war [1]). Winckelmann vermuthete, dass man den König von England, der bei dem Handel genannt wurde, nur vorschütze um die Sammlung leichter passiren zu lassen, doch war dieser in der That sehr nahe dabei interessirt.

In der Bibliothek der Königin zu Windsor befinden sich noch heute neun Bände mit Zeichnungen nach Antiken, auf die ich zuerst durch eine Notiz Conzes im Arch. Anzeiger v. 1864 S. 240* aufmerksam gemacht worden bin. Conze, der leider keine Zeit fand die Sammlung genau zu untersuchen, hat nur die Zeichnung eines Niobidenreliefs besprochen, welches ihm auffiel, da es mit dem berühmten Campanaschen jetzt Petersburger Marmorwerk (Stark Niobe Taf. III, 1) nahe verwandt ist. Indem er die Zeichnungen dem Sante Bartoli zuschreibt, theilt er es als eine Vermuthung des Bibliothekars Woodward mit — dessen Quelle jedoch offenbar das Buch Turnbulls ist — dass die Sammlung ursprünglich einem Cardinal Massimi gehört habe, darauf von Dr. Mead gekauft und von diesem in den Besitz des Prinzen Friedrich von Wales, nachmaligen Königs Georg III.

1) Den Nachweis dafür verdanke ich Justi. Von dem Verkauf ist die Rede in einem Briefe Winckelmanns an Mengs von 28. Juli 1762, der sich in der Fea'schen Ausgabe der Werke des letzteren p. 424 befindet. W. äussert sich sehr ungehalten über das vom Cardinal für 14000 scudi abgeschlossene Geschäft: *Jo feci il diavolo in casa ma finalmente da che momento sarei stato io contro la necessità?* Vgl. jetzt den Aufsatz Justis über den Cardinal Alexander Albani in den preussischen Jahrb. Bd. XXVIII. S. 17 des mir jetzt leider allein zugänglichen Seperatabdruckes.

übergegangen sei. Da jedoch die Sammlung Massimi, die allerdings auch zweifelsohne nach Windsor kam, wie wir später sehen werden, ausschliesslich Zeichnungen nach alten Wandgemälden enthielt, so kann diese unmöglich hier vorliegen. Es liegt nichts näher als an die Albanische d. h. an die alte Pozzosche Sammlung zu denken.

Vollständig scheint jedoch dieselbe nicht in den Besitz des königlichen Hauses übergegangen zu sein. De Rossi, den ich wegen einer mit der ganzen Frage zusammenhängenden im Bull. d'arch. christ. 1871 p. 17 gegebenen Notiz um Auskunft bat, theilt mir einen Brief des gelehrten römischen Architecten R. Lanciani mit, der auf einer wissenschaftlichen Reise in England auch mehrere Privatbibliotheken zu untersuchen Gelegenheit gehabt hat. Derselbe sah ausser den Bänden in Windsor Castle noch vier im Besitz zweier reichen englischen Liebhaber, des Herzogs von Hamilton und des Herrn A. W. Franks. In einem von diesen befinden sich die oben genannten Zeichnungen des Mosaiks von Palästrina, in einem andern eine Zeichnung, die auf der Rückseite eines Briefes des Commendatore ausgeführt ist.

Die Sammlung zur Windsor hat auf meine Bitte Helbig bei seiner Anwesenheit in England in Augenschein genommen. Er theilt mir mit, dass von den Zeichnungen der Bände, die er habe einsehen können — zwei waren ihm nicht zugänglich — keine später zu sein scheine als aus der Mitte des 17. Jahrhunderts, wogegen viele um mehr als ein Jahrhundert älter sein dürften. Diese Zeit würde also durchaus für die Pozzosche Sammlung passen, und nicht minder stimmt die weitere Angabe Helbigs, dass die

Zeichnungen von sehr verschiedenen Händen herrühren, mit dem überein, was wir über ihren Character sonst erfahren.

Der archäologische Werth der Zeichnungen ist nach Helbig ein verschiedener. Einige sind von ausgezeichneter Genauigkeit und geben jeden Bruch und jeden Sprung wieder. Andere dagegen sind flüchtig skizzirt, oder verrathen eine eigenthümliche Tendenz das Relief ins Pittoreske zu übertragen. Diese Gattung giebt die Umrisse in der Regel durch Federzeichnung wieder und setzt die Schatten durch Tusche auf. H. giebt mir folgende Uebersicht der in den Bänden mit Ausnahme von 2 und 3 enthaltenen Monumente, die von der Reichhaltigkeit der Sammlung eine Vorstellung geben können:

I Bassirilievi antichi (so der Titel auf dem Einbande) enthält die Reliefs der Antoninsäule, die Reliefs eines oder mehrerer H. völlig unbekannter Denkmäler der Kaiserzeit, die Capitolinischen Reliefs des Marc Aurel und der Vergötterung der Faustina, den todten Perser aus der pergamenischen Schule, ausserdem eine todte Amazone, die vielleicht mit der neapolitanischen nicht identisch ist, die Reliefs des Bogens des Severus, der Goldschmiede, den Sarkophag der Helena.

IIII Bass. ant. Reliefs mit Scenen aus der Komödie, Sarkophage mit Scenen von Gastmählern (Helbig zum grössten Theile unbekannt), Sarkophage mit Jagdscenen, aus dem täglichen Leben und mythischen (Hippolyt, Adonis, Meleagros), ein Glas aus den Katacomben. Dazwischen befinden sich einige frei erfundene Darstellungen aus dem römischen Leben u. a. eine Speisung des römischen Volkes, aus der Vogelperspective gesehen.

V. Bass. ant. Vaticanische Ara mit Weihung der Lares Augustales, griechische Reliefs mit der üblichen Gastmahlscene, Hochzeitsarkophage, Neapolitanisches Relief: Alkibiades und Hetären.

VI. Bass. ant. Forum des Nerva; eine ganze Reihe giustinianischer Reliefs.

VII. Bass. ant. Fast durchweg bacchische Sarkophage.

VIII. Bass. ant. Musensarkophage. Sarkophag mit dem taurischen Mythos, mit Achill auf Skyros, mit dem Tode des Meleagros, ein todter Gigant in Neapel, Gladiatorenrelief Torlonia, eine Menge Sarkophage mit Eroten und Putti.

Busti a statue IX. Die Barberinischen Candelaber; eine Menge Porträtbüsten, die pergamenische Figur, welche Overbeck, Plastik Fig. 95 n. 8 abbildet etc.

Ueber den Character der Zeichnungen bemerkt Helbig noch, dass die Typen bei aller Genauigkeit in den Einzelheiten, doch überall im Sinne der Kunstepoche modificirt seien, welcher sie ihre Entstehung verdanken.

Der schon erwähnte Cardinal Camillo de' Massimi war ein Zeitgenosse des Commendatore und in demselben Sinne wie dieser thätig. Während seiner Nunciatur in Spanien liess er in der Bibliothek des Escurial in Wasserfarben ausgeführte Zeichnungen nach Wandmalereien der Titusthermen copiren. Die älteste mir bekannte Nachricht über das zum Theil aus diesen Copieen zusammengesetzte »*gran libro delle antiche Pitture*« findet sich in der Einleitung der von Bartoli und Bellori herausgegebenen Pitture antiche del sepolcro dei Nasoni 1680 p. 6. Dasselbe berichten Turnbull in a

curious collection of ancient Paintings Lond. 1744 nach dem Abbé Dubos Reflexions sur la Poësie et sur la Peinture, Utrecht 1732 T. I, § 38 p. 200; endlich Caylus im Vorbericht des Recueil de peintures antiques Paris 1783 p. 6. Nach einer Notiz, die ich dem Briefe Lancianis entnehme, hatten Beiträge zu dieser Sammlung geliefert ausser den beiden Bartolis auch der grosse Poussin und endlich der Cardinal selbst, der im Zeichnen wohl geübt war. Sie wurde noch nach dem Tode des Cardinals eine Zeitlang zu Rom in seinem Palast bei quattro fontane (dem späteren Eigenthum der Albanis), zusammen mit einer Anzahl ausgehobener antiker Wandmalereien aufbewahrt. Beides ging dann im Anfang des 18. Jahrhunderts in den Besitz des reichen Kunstliebhabers Dr. Mead († 1754) über (vgl. Turnbull a. a. O. p. 5), von welchem die Zeichnungen, wie Lanciani schreibt, von dem Prinzen Friedrich von Wales für die Sammlung von Windsor gekauft wurden. Ueber ihren Bestand fehlen mir alle Nachrichten. Anfangs glaubte ich annehmen zu müssen, dass sie mit der Pozzoschen Sammlung vereinigt seien, womit zu stimmen schien, dass der Einband der Bände nach Conzes Angabe aus der Regierungszeit Georg III. stammt; doch scheint es im Zusammenhang wahrscheinlich, dass auch die Bände, welche Helbig nicht einsehen konnte, Basreliefs enthalten. Von einem Codex der Vaticana, früher Massimischen Besitzes, enthaltend Zeichnungen nach Sculpturen, Statuen und Büsten aus heidnischer und christlicher Zeit berichtet de Rossi in der Roma sotterranea I praef. p. 16.

In einem merkwürdigen im Philologus Bd. XXXI S. 331 abgedruckten Actenstück aus

dem Jahr 1686, in welchem mit sonderbarer Umständlichkeit und Pedanterie die Aechtheit mehrerer lateinischer Inschriften bezeugt wird, auf die der Finder, der Franzose Jacques Lefebure, besondern Werth legen zu müssen glaubte, heisst es von diesem, dass er einen grossen Theil Europas durchreist habe: *ad antiquitatis Romanae monimenta colligenda et in multis regnis ac provinciis plurimorum Romanorum marmorum votivorum, connubialium, sepulchralium aliorumque antiquorum et a pluribus annis, et a paucis, nempe quinquaginta plus minus, de terra erutorum figuras, formas ac expressiones calamo et colore delineaverit et delinerari jusserit.*

Zeichnungen des Lebrun in Rom nach antiken Statuen ausgeführt, benutzte Montfaucon in der Bibliothek des Bischofs zu Metz. Sie waren von dem Maler dem Kanzler Seguier geschenkt worden. A. E. I, 1 préf. p. XIX.

Schüler Lebruns war bekanntlich Jacques Carrey, der den Marquis de Nointel als Zeichner nach Constantinopel begleitete. Ueber seine Thätigkeit und seine Verdienste genügt es jetzt auf Michaelis Parthenon bes. S. 59 u. 102 ff. zu verweisen.

Von den Zeichnungen des älteren S. Bartoli soll die Vaticana noch Vieles enthalten. Manches wird sich aus der Massimischen Sammlung zu Windsor als sein Eigenthum ausscheiden lassen; eine Sammlung, die der Zufall dem Grafen Caylus in die Hände spielte und die von diesem in seinem Recueil in so prachtvoller Ausstattung publicirt wurde, kam nachher in das Cabinet d'estampes du Roi und wird sich auch jetzt wohl auf der grossen Pariser-Bibliothek befinden.

Als Zeichner nach der Antike ist auch Fran-

cesco Bartoli bekannt. Winckelmann hat in seinen Monumenti Inediti mehrere von diesem in Wasserfarben ausgeführte Zeichnungen nach alten Wandgemälden publicirt, die er einer vermuthlich grösseren in der Vaticana aufbewahrten Sammlung entnahm. Vgl. M. J. n. 18, 113, 114 und 160.

Ausser den Zeichnungen des Peirescius benutzte Montfaucon in seiner Antiquité expliquée noch ein Manuscript, dem er nach seiner Angabe (A. E. I, 1 pref. p. XXI) viele Stücke entnahm. Er erhielt dasselbe vom Abbé Charlet de Langres; ein anderes schickte ihm aus Avignon der Marquis de Caumont. — A. E. Suppl. I, préf. p. XIV erwähnt er Zeichnungen, die ein Leipziger Fritsche von Rom nach Paris brachte, auch von diesen hat er einige Stücke mit Reliefs aus römischen Palästen veröffentlicht.

Zeichnungen des geistreichen Carricaturenzeichners Pier Leone Ghezzi 1674—1755 hat Winckelmann in seinen Monumenti inediti mehrfach benutzt. Vgl. p. 56 n. 46: Fragment mit Darstellung einer Sirene aus casa Odam. p. 99 n. 74 brozenes Figürchen einer Isis. p. 100 n. 108: Fragment eines Terracottareliefs. p. 217 n. 162: Relieffragment mit drei Philosophen. — Sie befinden sich, wie mir Justi früher mittheilte, auch heute noch auf der Vaticana.

Winckelmann kennt endlich eine Sammlung von Zeichnungen des General Walmoden in Hannover. Unter diesen befand sich ein Hippolytussarkophag, der nach W.'s Beschreibung kein anderer als der im Dom zu Girgenti aufgestellte ist. M. J. p. 137.

Verzeichniss der bei der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangenen Druckschriften.

Januar 1872.

Nature 114. 115. 117.
Philosophical Transactions of the Royal Society of London for the year 1870, 71. Vol. 160. Part. II. Vol. 161. Part. I. London 1870. 71. 4.
The Royal Society. 30th November 1870. 4.
Proceedings of the Royal Society. Vol. XIX. Nr. 124—129. 8.
Royal Society Catalogue of scientific papers. Vol. V. London 1871. 4.
Jahrbuch der k. k. geologischen Reichsanstalt. Jahrg. 1871. Bd. XXI. Nr. 3. Juli—September. Wien 1871. gr. 8.
Verhandlungen der k. k. geologischen Reichsanstalt. 1871. Nr. 11. 12. 13. 1871. gr. 8.
Schriften der königl. physikalisch-ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg. Jahrg. XI. 1870. Abth. 1. 2. Königsberg 1870. 71. 4.
Dr. J. B. Ullersperger, die Geschichte der Psychologie und der Psychiatrik in Spanien. Würzburg 1871. 8.
Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft. Jahrg. VI. Hft. 4. Leipzig 1871. 8.
Dr. A. von Oettingen, meteorologische Beobachtungen angestellt in Dorpat im Jahre 1866 und 1870. Jahrg. IV. V. Dorpat 1871. 8.
Anzeiger für Kunde der deutschen Vorzeit. Organ des Germanischen Museums. Neue Folge. Jahrg. XVIII. 1871. Nr. 1—12. 4.
48. Jahres-Bericht der Schlesischen Gesellschaft für vaterländische Cultur 1870. Breslau 1871. 8.
Louis Agassiz, a letter concerning Deep-Sea Dredgings, addressed to Prof. Benjamin Peirce, Superintendent U. S. Coast Survey. 8.

(Fortsetzung folgt).

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

14. Februar. № 5. 1872.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Ueber die Entstehung des indogermanischen Vokativs.

Von

Th. Benfey.

Von dem Verfasser der der königl. Gesellschaft d. W. unter obigem Titel vorgelegten Abhandlung ist schon früher bemerkt, dass der in den indogermanischen Sprachen erscheinende Vokativ kein selbstständiger Casus sondern ursprünglich mit dem Nominativ identisch gewesen sei. Diese Bemerkung zu erweisen ist die Aufgabe dieser Abhandlung.

Als Hauptgründe für die Richtigkeit derselben werden drei Momente geltend gemacht.

1. Der Mangel eines durch Verschiedenheit in den artikulirten Lauten vom Nominativ besonderten Vokativs im Plural und Dual. — Denn wenn der Vokativ ein ursprünglich selbstständiger Casus gewesen wäre, so würde er sich sicherlich so gut, wie in vielen Singularen, auch

in den beiden andern Numeris eine lautlich besonderte Form verschafft haben.

2. Der Mangel von Vokativen, welche in den artikulirten Lauten vom Nominativ besondert sind, selbst im Singular sehr vieler Nominalcategorien. Denn es giebt zwar viele lautlich besonderte Vokative in Singular, allein diese beschränken sich auf sehr wenige Nominalcategorien. Ausserdem stimmen die verschiedenen Sprachen weder in den Nominalcategorien, in denen sie den Vokativ des Singulärs vom Nominativ scheiden, noch in der Art der Scheidung vollständig überein.

3. Endlich erklärt sich die Form des Vokativ Singularis wo sie besondert ist mit Leichtigkeit aus der des Nominativ. Der Vokativ wurde nämlich in der indogermanischen Grundsprache dadurch vom Nominativ geschieden, dass der Accent stets auf die erste Sylbe desselben vorrückte. 'Es geschieht diess', wie Bopp (Vergleichendes Accentuationssystem des Sanskrit und Griechischen 1854. §. 13. S. 20) bemerkt, 'offenbar darum, um den Namen des Gerufenen recht nachdrücklich hervorzuheben'. Diese Accentuation des Vokativs ist im Sanskrit für alle drei Numeri herrschend geblieben. Dass sie in der Grundsprache wenigstens im Singular herrschte, wird durch Nachweisung der Fälle erhärtet, in denen sie sich im Griechischen und Latein erhalten hat. Ob sie auch im Dual und Plural schon in der Grundsprache, wie im Sanskrit, herrschte, lässt sich mit voller Sicherheit weder bejahen noch verneinen, sondern nur bemerken, dass die übrigen indogermanischen Sprachen in diesen beiden Numeris auch nicht die geringste Spur derselben zeigen.

Diese Accentuation, da sie vom Ende des

Wortes entfernt ist, konnte schon dadurch, ähnlich wie im Imperfect in Folge der in der Grundsprache herrschenden Accentuirung des Augments die Wortauslaute geschwächt sind, auch im Auslaut des Nominativs Schwächungen herbeiführen. Diese Wirkung wurde aber im Vokativ sicherlich dadurch erhöht, dass sich mit dem Accent auf der ersten Sylbe gewöhnlich zugleich der Ton des Rufens verband, und so das Verklingen des Wortendes noch leichter herbeiführte. In Folge davon schied sich der Vokativ Singularis in mehreren Nominalcategorien auch bezüglich der artikulirten Laute vom Nominativ, was dann bewirkte, dass er dem Sprachbewusstsein als ein besonderter Casus nach und nach entgegentrat und z. B. im Griechischen sich in mehr Categorien und Themen vom Nominativ trennte, als in den verwandten Sprachen.

Die durch diese Schwächung herbeigeführten Umgestaltungen werden in der Abhandlung dann in den einzelnen Sprachen nachgewiesen und erklärt. Im Allgemeinen konnte diess mit Leichtigkeit geschehen. Schwieriger war der Nachweis, dass die Vokativformen Schwächung des Nominativs sein, fast nur in Bezug auf den Vokativ der sanskritischen Themen auf *i* und *u*, welche beziehungsweise statt dieser Auslaute auf *e*, *o* enden, während der Nominativ in Msc. und Fem. auf *is*, *us* auslautet. Hier war daran zu erinnern, (vgl. Orient und Occident I. 276) dass die Themen auf *i*, *u* schon in der Grundsprache in ihrer Flexion drei Principien folgen: entweder bleibt die thematische Gestalt vor den Casusexponenten unverändert, oder vor den auslautenden Vokal des Themas tritt grundsprachlich *ă* oder *â*. So z. B. erscheinen von dem grund-

sprachlichen Thema *diú* 'Tag, Himmel, dann Perfonification des letzteren als höchstes Wesen' Casusformen, welche sich unmittelbar an diese Articulation schliessen, z. B. sskr. Dat. sing. *divé* griech. *Διί* für *Διϝί* (beide auf grundsprachlichem *diu-ai* beruhend), oder solche, die auf grundsprachlichem *diau* beruhen, z. B. sskr. Loc. sing. *dyávi* lat. Genetiv *Jŏv-is*, griech. *Ζεύς*, oder endlich solche, die auf grundsprachlichem *diâu*, wie der sanskritische Nominativ Pluralis *dyā̆vas*, der des vedischen Dualis *dyā̆vâ*, so wie der des Singulars *dyaús.* Hieher gehört auch lateinisch *diēs* 'der Tag', was dadurch entschieden wird, dass dieselbe Form auch den 'Gott des Himmels' bezeichnet in der Verbindung *Diespiter.* Diese ist völlig identisch mit der schon in den Veden erscheinenden Formel *dyaúsh pitā̆* für *dyaús pitā̆* 'Himmel der Vater' (Rigv. IV, 1, 10; VI, 51, 5; vgl. I. 164, 33; 191, 6 *dyaúr vah pitā̆ prithivī̆ mâtā̆* 'der Himmel ist euer Vater, die Erde eure Mutter'). Das lateinische Thema *diêu* ist im Nominativ zu *diês*, mit Einbusse des *u*, geworden, ähnlich wie das grundsprachliche Thema *râi* 'Habe' sowohl im Sanskrit als Latein im Nominativ, mit Einbusse des *i*, dort *râs* hier *rês* bildet. Dieselbe Einbusse findet auch vor den Endungen die grundsprachlich mit *bh* anlauten Statt, sskr. *râbhis*, *râbhyas*, lat. *rêbus* und ebenso *diêbus*, im Sanskrit auch vor *su râsu* und im Latein vor *rum rêrum*, *diêrum*, mit andern Worten vor allen schon in der Grundsprache consonantisch anlautenden Endungen. Die Einbusse des *u* im Nominativ *diês* erinnert an die Nominative *Achillês, Persês* für *Ἀχιλλεύς Περσεύς.*

Man vergleiche bezüglich der Themen auf *u* auch noch die altbactrischen Casus von Themen

auf *u*, wie z. B. den Nomin. Sing. *bâzâus* (auch *asbâzâus*) von *bâzu* = sskr. *bâhú* für grundspr. *bhâghu* griech. *πῆχυ*, den Accus. *garemâum* von *garemu* 'Hitze', *naçâum* von *naçu* griech. *νέκυ*, grundspr. *naku*; den Genet. *erezâus* von *erezu* sskr. *rijú*, den Locat. Sing. *vanhâu* von *vanhu* = sskr. *vasu*, woraus wir sehen, dass auch der sskr. Loc. dieser Themen auf *au* z. B. *vishnau* auf *vishnâvi* beruht, indem *i* (wie so oft z. B. vedisch *carman* für *carman-i* u. a.) eingebüsst, dann *v* zu *u* ward und mit dem vorhergehenden *á* zu *au*; wie aber neben *Πηλῆ-ος* auch *Πηλέ-ος* im Homer erscheint, so, statt des hier gefolgerten *Víshnâvi*, mit vorgeschobenem kurzen *a* in den Veden Rigv. VIII. 3, 8 *Víshnavi*, ebenso *sûnávi* von *sûnú* VIII. 57, 15 u. a. (siehe Alfr. Ludwig, der Infinitiv im Veda S. 10). Ferner vergleiche man den altbactrischen Nominat. Plur. *naçâvô* von dem schon erwähnten *naçu*, so wie *danhâvô* von *danhu* und den gleichlautenden Accus. Plur. *naçâvô*, *danhâvô*. Eben hieher gehört auch die im Sanskrit auf wenige Fälle beschränkte zu *âu* verstärkte Form in der Bildung des Femininum auf *î*, von *mánu*, *manâvî*, von *jahnú jahnâvî*, denen im Griechischen die viel weiter verbreitete auf *ηΐ-δ* entspricht, wie *Νηρηΐδ* für *ΝηρηϜίδ*, neben der Form mit kurzem Vokal *Νηρεΐδ* von *Νηρεύ-ς*.

Bezüglich der Themen auf *i* vergl. man: ohne Aenderung episch *πόλι-ος*, sskr. *maty-âs* für *mati-âs* (vgl. gr. *πόλεως*, mit *ε* für *ι*); mit *a* vor *i* Dat. Sing. grundspr. *agnaí-ai* von *agní* 'Feuer' sskr. *agnáy-e* griech. *πτόλεϊ* für *πολει-ει*, dann *πολεj-ει*, *πολε-ει*, *πολε-ῑ*, (das lange *ῑ* noch vielfach im Homer bewahrt) *πόλε-ι*; mit *â* vor *i* den altbactrischen Genitiv von *raopi*, nämlich *raopâis* für *ây-as*, den altpersischen der Keilinschriften

von *Caispi* (griech. *Τείσπης*) nämlich *Caispâis*, griech. *πόλη-ος* für *πολη-ος* vermittelst *πόληj-ος*, sskr. von *sakhi* 'Genosse' Acc. Sing. *sakhâyam* für ursprünglicheres *sakhâi-am*, Nom. Dual. *sakhây-au*, Pl. *sakhây-as*; auch in dem vedischen Locativ Sing. auf *â*, z. B. *nâbhâ* von *nâbhi* 'Nabel' (oft z. B. Rigv. I. 139, 1), dürfen wir unbedenklich dieses *â* auf dieselbe Weise erklären; schwieriger aber ist die Frage ob in dieser Form hinter dem *â yi* eingebüsst, also *nâbhâ* eine Verstümmelung von *nâbhây-i* sei, wie die Bildung aus grundsprachlichem *nabhâi-i* im Sanskrit eigentlich gelautet haben musste. Denn im gewöhnlichen Sanskrit finden wir als Locativendung der Themen auf *i* statt dieses Auslauts und des Exponenten *i*, *au*, also *nâbhau*. Stände das Sanskrit allein mit dieser Endung, so würde ich, da der Einfluss der Volkssprachen auf dasselbe schon in sehr alter Zeit begann, unbedenklich annehmen, dass das *y* in der organischen Form (*nâbhây-i*) durch Einfluss derselben — man vergleiche den weit verbreiteten Uebergang von *y* in *v* im Pâli und den Açoka-Inschriften — in *v* übergegangen sei, also *nâbhâyi* erst zu *nâbhâvi* geworden sei, dann zu *nâbhau*, wie oben *vishnâvi* zu *vishnau*. Allein im Altbactrischen erscheint in den Themen auf *ĭ* neben den Locativen auf *â* (= den sskr. auf *â* in den Veden) z. B. *utayûtâ* von *utayûiti* 'Fortdauer', und dessen Verkürzung *ă*, z. B. *gara* von *gairi* 'Berg', auch der Auslaut *ô* statt dieser z. B. *huzâmitô* von *huzâmiti* 'leichtes Gebären' und dieser steht dem im vedischen Loc. *sắno* für das daneben erscheinende *sắnăvi* (vgl. Alfred Ludwig, Infinitiv S. 10) mit *ă* so nahe, dass man zweifelhaft wird, ob nicht anzunehmen sei, dass der Uebergang von *y* in *v* schon in der gemeinsamen

Grundlage des Sanskrit und Altbactrischen einzutreten begonnen habe, aber erst in den indischen Volkssprachen eine weitere Verbreitung gewann. Doch ist diese Frage für unsre Zwecke von um so geringerer Bedeutung, da *âi* für *i* schon durch andre Fälle belegt worden ist und zu allem Ueberfluss noch in dem sskr. Femin. von *agní* nämlich *agnā̆y-î* (analog dem oben erwähnten *manā̆v-î* von *mánu*) u. a. erscheint.

Dass diese Verstärkungen auch im Nominativ Sing. eintreten, zeigt für *u* griechisch *Ζεύς* welches grundsprachliches *diaús* wiederspiegelt und sskr. *Dyaús*, der Reflex von grundspr. *diâús*. Für *i* mit *ă* davor vedisch *ves* Nominat. von *vi* 'Vogel' (z. B. Rigv. VI, 3, 5), Reflex eines grundsprachlichen *vais*; mit *â* vor *i* *sakhâ* von *sakhi*, zunächst, nach Analogie des Nom. Sing. *râs* für grundspr. *râi-s* sskr. *rai-s*, für *sakhâs* (statt ursprünglichen *sakhâi-s* sskr. *sakhai-s*); dieses büsste dann das auslautende *s* ein, wie *uçanas*, statt des regelrechten Nominativs *uçanâs*, vedisch stets in der Form *uçanâ* ohne *s* erscheint und nach Pâṇini VII. 1, 94 so auch im classischen Sanskrit gebraucht werden soll, wogegen die gedruckten Texte jedoch oft fehlen.

Demgemäss sind wir berechtigt anzunehmen, dass einst im Sanskrit die Themen auf *i*, *u*, neben den Nominativen auf *is*, *us* im msc. und fem., auch solche auf *es*, *ais* und *os*, *aus* bilden konnten, also z. B. neben *agnís* ein *agnés*, *agnaís*, neben *vâyús* 'Wind' ein *vâyós*, *vâyaús*; aus diesen Formen mit *es*, *os* entstand dann der Vokativ *ágne*, *vā̆yo* durch dieselbe aus der Vorziehung des Accents zu erklärende Schwächung, wie z. B. aus dem Nominat. *âdityás* der Vokativ *ā̆ditya*, aus dem griech. Nominativ *Ζεύς* (d. h. grundsprachlich *diaús*) der Vokativ *Ζεῦ* (eigent-

lich *Ζέὺ*, vgl. aeol. *Ζεῦς* d. h. *Ζέὺς* für gewöhnlich *Ζεύς* d. h. *Ζὲύς*), so wie aus den Nominativen *ἀδελφός*, *πονηρός*, *μοχθηρός* die Vokative *ἄδελφε*, *πόνηρε*, *μόχθηρε*.

Für die Ausführung im Einzelnen muss sich der Verf. jedoch erlauben, auf die Abhandlung selbst zu verweisen, welche er in nächster Zeit zu veröffentlichen gedenkt.

Ueber die Flächen mit einem Systeme sphärischer Krümmungslinien.

Von

A. Enneper.

II.

An Stelle der in I. erwähnten Systeme von Gleichungen hat Serret durch ein sehr sinnreiches Verfahren eine Differentialgleichung dritter Ordnung hergestellt, welche in Beziehung auf die zu bestimmende Grösse linear ist. Die Möglichkeit dieser Differentialgleichung beruht auf dem Umstande, dass die Summe von drei Quadraten vermindert um ein viertes Quadrat gleich einem Quadrat gesetzt werden kann. Wenn auch diese Bedingung analytisch ausführbar ist, so ist dieses nicht immer geometrisch der Fall, man kann Bedingungen aufstellen, welche geometrisch möglich sind, indessen auf dem von Serret eingeschlagenen Wege zu imaginären Resul-

taten führen. Dieses ist z. B. der Fall, wenn die osculatorischen Kugelflächen der sphärischen Krümmungslinien sämmtlich concentrisch sind.

Mit Beibehaltung der in I. eingeführten Bezeichnungen ist:

$$1)\qquad \begin{cases} \xi = x + p\cos a - q\cos a' \\ \eta = y + p\cos b - q\cos b' \\ \zeta = z + p\cos c - q\cos c'. \end{cases}$$

$$q\frac{dr''}{du} = (r'' - p)\left(1 - \frac{r''}{r'}\right)\sqrt{E},$$

oder, wenn zur Abkürzung:

$$2)\qquad \left(1 - \frac{r''}{r'}\right)\sqrt{E} = Sq$$

gesetzt wird:

$$3)\qquad \frac{dr''}{du} = (r'' - p)S.$$

Man setze ferner:

$$4)\qquad \begin{cases} X = \xi - x - r''\cos a, \\ Y = \eta - y - r''\cos b, \\ Z = \zeta - z - r''\cos c. \end{cases}$$

Wegen der Gleichungen 1) hat man auch, wenn die Werthe von ξ, η, ζ substituirt werden:

$$5)\qquad \begin{cases} X = (p - r'')\cos a - q\cos a', \\ Y = (p - r'')\cos b - q\cos b', \\ Z = (p - r'')\cos c - q\cos c'. \end{cases}$$

Differentiirt man die Gleichung 4) nach u, so folgt wegen 2), 3) und 5):

6)
$$\frac{dX}{du}=\frac{d\xi}{du}+XS,$$
$$\frac{dY}{du}=\frac{d\eta}{du}+YS,$$
$$\frac{dZ}{du}=\frac{d\zeta}{du}+ZS.$$

Multiplicirt man diese Gleichungen respective mit X, Y, Z, bildet die Summe der Producte, berücksichtigt, dass nach 5) $X^2+Y^2+Z^2=(p-r'')^2+q^2$, so folgt:

7)
$$X\frac{d\xi}{du}+Y\frac{d\eta}{du}+Z\frac{d\zeta}{du}=-q^2S$$
$$+(p-r'')\frac{dp}{du}+q\frac{dq}{du}.$$

Sei nun U eine näher zu bestimmende Function von u, man setze:

8)
$$\frac{d\xi}{du}=qU\frac{d\xi_1}{du},\quad \frac{d\eta}{du}=qU\frac{d\eta_1}{du},$$
$$\frac{d\zeta}{du}=qU\frac{d\zeta_1}{du},\quad \frac{dp}{du}=qU\frac{dp_1}{du}.$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen erhält man aus 6) und 7):

$$9)\quad \begin{cases} d\dfrac{X-qU\xi_1}{du} = -\xi_1\dfrac{dqU}{du}+XS, \\ d\dfrac{Y-qU\eta_1}{du} = -\eta_1\dfrac{dqU}{du}+YS, \\ d\dfrac{Z-qU\zeta_1}{du} = -\zeta_1\dfrac{dqU}{du}+ZS, \end{cases}$$

$$d\frac{p-r''-qUp_1}{du} = -p_1\frac{dqU}{du}+(p-r'')S.$$

$$(X\frac{d\xi_1}{du}+Y\frac{d\eta_1}{du}+Z\frac{d\zeta_1}{du})qU = -q^2S$$

$$+(p-r'')\frac{dp}{du}+q\frac{dq}{du},$$

Setzt man in der letzten Gleichung:

$$\frac{dp}{du} = qU\frac{dp_1}{du},$$

so ist auch:

$$X\frac{d\xi_1}{du}+Y\frac{d\eta_1}{du}+Z\frac{d\zeta_1}{du}-(p-r'')\frac{dp_1}{du} = \frac{1}{U}(\frac{dq}{du}-qS)$$

Addirt man auf beiden Seiten:

$$-qU(\xi_1\frac{d\xi_1}{du}+\eta_1\frac{d\eta_1}{du}+\zeta_1\frac{d\zeta_2}{du}-p_1\frac{dp_1}{du}),$$

so folgt, nach einfacher Transformation der rechten Seite:

$$(X - qU\xi_1)\frac{d\xi_1}{du} + (Y - qU\eta_1)\frac{d\eta_1}{du}$$

$$+ (Z - qU\zeta_1)\frac{d\zeta_1}{du} - (p - r'' - qUp_1)\frac{dp_1}{du} =$$

$$-\frac{qU}{2}\frac{d}{du}(\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2 - p_1^2 - \frac{1}{U^2})$$

$$+ \frac{1}{U^2}\frac{dqU}{du} - \frac{q}{U}S.$$

Zu der vorstehenden Gleichung addire man die Gleichungen 9) respective multiplicirt mit ξ_1, η_1, ζ_1 und $-p_1$. Setzt man dann:

10) $$D = (X - qU\xi_1)\xi_1 + (Y - qU\eta_1)\eta_1$$
$$+ (Z - qU\zeta_1)\zeta_1 - (p - r'' qUp_1)p_1,$$

so folgt:

$$\frac{dD}{du} = SD - \tfrac{1}{2}qU\frac{d\Phi}{du}$$

$$+ (qUS - \frac{dqU}{du})\Phi,$$

$$\Phi = \xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2 - p_1^2 - \frac{1}{U^2}.$$

Nimmt man nun $\Phi = 0$, also:

11) $$\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2 - p_1^2 = \frac{1}{U^2},$$

so folgt:

$$dD = S . D.$$

Sieht man ξ, η, ζ und p als gegeben an, so sind ξ_1, η_1, ζ_1, p_1 und U mittelst der Gleichungen 8) und 11) zu bestimmen. Dass sich nicht in allen Fällen für U reelle Werthe ergeben können folgt unmittelbar aus der Form der Gleichungen 11). Nimmt man an, dass das zweite System plan ist, so können zwei Fälle stattfinden, p ist constant, oder der Punct (ξ, η, ζ) liegt auf einer Geraden und seine Distanz von einem festen Puncte dieser Geraden ist der Quantität p proportional. Nimmt man diese Gerade zur Axe der z, so ist $\xi = 0$, $\eta = 0$ und $\zeta = kp$, wo k eine Constante bedeutet, man kann dann auch $\xi_1 = 0$, $\eta_1 = 0$ und $\zeta_1 = kp_1$ nehmen, die Gleichung 11) giebt dann nur für $k > 1$ reelle Werthe für U.

Ist die Gleichung 11) zulässig, so setze man:

$$13)\quad \begin{cases} x_1 = \dfrac{X - qU\xi_1}{D}, & y_1 = \dfrac{Y - qU\eta_1}{D}, \\[2ex] z_1 = \dfrac{Z - qU\zeta_1}{D}, & L = \dfrac{p - r'' - qUp_1}{D}. \end{cases}$$

Die Gleichungen 9) und 10) geben dann:

$$14)\quad \frac{1}{\xi_1}\frac{dx_1}{du} = \frac{1}{\eta_1}\frac{dy_1}{du} = \frac{1}{\zeta_1}\frac{dz_1}{du} = \frac{1}{p_1}\frac{dL}{du}.$$

Wegen der Gleichungen 5), 10) und 11) folgt aus 13):

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - L^2 = -\frac{2qU}{D}.$$

Die Gleichungen 13) lassen sich also auch schreiben:

$$15)\begin{cases} X = qU[\xi_1 - \frac{2x_1}{x_1^2+y_1^2+z_1^2-L^2}], \\ Y = qU[\eta_1 - \frac{2y_1}{x_1^2+y_1^2+z_1^2-L^2}], \\ Z = qU[\zeta_1 - \frac{2z_1}{x_1^2+y_2^2+z_1^2-L^2}], \\ p - r'' = qU[p_1 - \frac{2L}{x_1^2+{}_1y^2+z_1^2-L^2}], \end{cases}$$

Da nach 5):

$$\frac{1}{\cos a}\frac{dX}{dv} = \frac{1}{\cos b}\frac{dY}{dv} = \frac{1}{\cos c}\frac{dZ}{dv} = -\frac{dr''}{dv},$$

so geben die Gleichungen 15):

$$\frac{d}{dv}\frac{x_1}{D_1} = \cos a \frac{d}{dv}\frac{L}{D_1}, \quad \frac{d}{dv}\frac{y_1}{D_1} = \cos b \frac{d}{dv}\frac{L}{D_1}$$

$$16) \qquad \frac{d}{dv}\frac{z_1}{D_1} = \cos c \frac{d}{dv}\frac{L}{D_1},$$

$$D_1 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - L^2.$$

Die Summe der Quadrate der drei ersten Gleichungen 16) giebt:

$$17) \qquad (\frac{dx_1}{dv})^2 + (\frac{dy_1}{dv})^2 + (\frac{dz_1}{dv}) = (\frac{dL}{dv})^2$$

Sind x_1, y_1, z_1, L bekannt, so geben die Gleichungen 15) und 16) die Werthe von X, Y, Z,

r'', $\cos a$, $\cos b$ und $\cos c$. Mittelst der Gleichungen 4) erhält man dann x, y und z. So ist z. B.:

$$(\xi - x - qU\xi_1 + \frac{2qUx_1}{D_1})\frac{d}{dv}\frac{L}{D_1}$$

$$(p - qUp_1 + \frac{2qUL}{D_1})\frac{d}{dv}\frac{x_1}{D_1},$$

wo wieder:

$$D_1 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - L^2.$$

Die Gleichungen 13) respective mit ξ_1, η_1, ζ_1, $-p_1$ multiplicirt und addirt geben wegen 10):

18) $$\xi_1 x_1 + \eta_1 y_1 + \zeta_1 z_1 - p_1 L = 1,$$

Differentiirt man diese Gleichungen wiederholt nach u, so folgt unmittelbar, dass man wegen der Gleichungen 14) aus den verschiedenen Gleichungen x_1, y_1, z_1 eliminiren kann und auf diesem Wege zur einer Differentialgleichung dritter Ordnung für L gelangt.

Es mögen nun α, β, γ; λ, μ, ν; l, m, n, ferner ϱ, r und ds für eine beliebige Curve im Raume analoge Bedeutungen wie I. haben. Man setze:

$$\frac{\xi_1}{\cos\alpha} = \frac{\eta_1}{\cos\beta} = \frac{\zeta_1}{\cos\gamma} = \sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2}} = \Omega, \quad p_1\Omega = \cos\varphi.$$

Die Gleichungen 14) werden dann:

19) $$\frac{1}{\cos\alpha}\frac{dx_1}{du}=\frac{1}{\cos\beta}\frac{dy_1}{du}=\frac{1}{\cos\gamma}\frac{dz_1}{du}=\frac{1}{\cos\varphi}\frac{dL}{du}.$$

Dividirt man die Gleichung 20) durch $\sqrt{\xi_1^2+\eta_1^2+\zeta_1^2}$ so ist, in Folge der obigen Bezeichnungen:

20) $$x_1\cos\alpha+y_1\cos\beta+z_1\cos\gamma=\Omega+L\cos\varphi.$$

An Stelle von u oder s führe man den Winkel w, definirt durch die Gleichung:

$$\frac{dw}{ds}=\frac{1}{r},$$

ein und setze zur Abkürzung:

21) $$\frac{\varrho}{r}\operatorname{tang}\varphi=g.$$

Aus der Gleichung 20) erhält man dann durch successive Differentiationen nach w, mit Rücksicht auf 19):

22) $$\begin{cases} x_1\cos\alpha+y_1\cos\beta+z_1\cos\gamma=\Omega+L\cos\varphi, \\ x_1\cos\lambda+y_1\cos\mu+z_1\cos\nu=\frac{\varrho}{r}\frac{d\Omega}{dw} \\ \qquad -g\frac{dL\sin\varphi}{dw}, \\ x_1\cos l+y_1\cos m+z_1\cos n=-\frac{r}{\varrho}\Omega \\ -\frac{d}{dw}\left(\frac{r}{\varrho}\frac{d\Omega}{dw}\right)-\frac{L}{g}\sin\varphi+\frac{d}{dw}\left(g\frac{dL\sin\varphi}{dw}\right). \end{cases}$$

Differentiirt man die letzte der vorstehenden Gleichungen nach w und setzt zur Abkürzung:

$$\text{23)}\quad \frac{d^2}{dw^2}\left(\frac{\varrho}{r}\frac{d\Omega}{dw}\right)+\frac{d}{dw}\left(\frac{r}{\varrho}\Omega\right) + \frac{\varrho}{r}\frac{d\Omega}{dw}=\Omega_1,$$

so folgt zur Bestimmung von L die Gleichung:

$$\text{24)}\quad \frac{d^2}{dw^2}\left(g\frac{dL\sin\varphi}{dw}\right)-\frac{d}{dw}\frac{L\sin\varphi}{g} + g\frac{dL\sin\varphi}{dw}=\Omega_1,$$

was die Differentialgleichung dritter Ordnung ist, von welcher weiter oben die Rede war.

Zur Integration der Gleichung 24) betrachte man nach der Methode von Lagrange die Gleichung:

$$\text{25)}\quad \frac{d}{dw}\left[\frac{d}{dw}\left(g\frac{dH}{dw}\right)-\frac{H}{g}\right]+g\frac{dH}{dw}=0.$$

Der Winkel ψ genüge der Differentialgleichung:

$$\text{26)}\quad \frac{d\psi}{dw}=1+\frac{\cos\psi}{g},$$

wo ψ als nur von w abhängig angesehn wird. Setzt man:

$$\text{27)}\quad t=\int\frac{\sin\psi}{g}\,dw,\quad t_1=\int\frac{e^{-t}\cos\psi}{g}\,dw,$$

und:

28) $$h = e^{t}, \quad h_1 = t_1 e^{t}, \quad h_2 = t_1^2 e^{t} + e^{-t},$$

wo also $hh_2 = 1 + h_1^2$ ist, so sind h, h_1 und h_2 drei particuläre Integrale der Gleichung 25).

Das Integral der Gleichung 24) ist dann:

29) $$L \sin\varphi = fh + f_1 h_1 + f_2 h_2.$$

Zur Bestimmung von f, f_1, f_2 dienen die Gleichungen:

$$h\frac{df}{dw} + h_1\frac{df_1}{dw} + h_2\frac{df_2}{dw} = 0,$$

$$\frac{dh}{dw}\frac{df}{dw} + \frac{dh_1}{dw}\frac{df_1}{dw} + \frac{dh_2}{dw}\frac{df_2}{dw} = 0,$$

$$\left(\frac{d}{dw}\left(g\frac{dh}{dw}\right) - \frac{h}{g}\right)\frac{df}{dw} + \left(\frac{d}{dw}\left(g\frac{dh_1}{dw}\right) - \frac{h_1}{g}\right)\frac{df_1}{dw}$$
$$+ \left(\frac{d}{dw}\left(g\frac{dh_2}{dw}\right) - \frac{h_2}{g}\right)\frac{df_2}{dw} = \Omega_1.$$

Mit Hülfe der Gleichungen 27) und 28) erhält man endlich:

30) $$\begin{cases} \dfrac{df}{dw} = -\tfrac{1}{2}\left[\dfrac{d}{dw}\left(g\dfrac{dh_2}{dw}\right) - \dfrac{h_2}{g}\right]\Omega_1, \\[2ex] \dfrac{df_1}{dw} = \left[\dfrac{d}{dw}\left(g\dfrac{dh_1}{dw}\right) - \dfrac{h_1}{g}\right]\Omega_1, \\[2ex] \dfrac{df_2}{dw} = -\tfrac{1}{2}\left[\dfrac{d}{dw}\left(g\dfrac{dh}{dw}\right) - \dfrac{h}{g}\right]\Omega_1. \end{cases}$$

Die Integration jeder der Quantitäten f, f_1, f_2 involvirt eine von w oder u unabhängige Quantität, welche also nur noch von v abhängen kann. Diese drei Integrations-Parameter, welche Functionen von v sind seien V, V_1 und V_2.

Ist H durch die Gleichung 25) bestimmt, setzt man:

$$\frac{d}{dw}\left(\frac{\varrho}{r}\frac{d\Omega}{dw}\right)+\frac{r}{\varrho}\,\Omega=\Omega_2$$

so folgt durch partielle Integrationen:

$$\int\left[\frac{d}{dw}\left(g\frac{dH}{dw}\right)-\frac{H}{g}\right]\frac{d\Omega_2}{dw}\,dw=$$

$$\Omega_2\left[\frac{d}{dw}\left(g\frac{dH}{dw}\right)-\frac{H}{g}\right]$$

$$+\frac{\varrho}{r}\frac{d\Omega}{dw}\,g\,\frac{dH}{dw}+\int\frac{r}{\varrho}\,\Omega\,g\,\frac{dH}{dw}\,dw$$

$$-\int\frac{\varrho}{r}\frac{d\Omega}{dw}\frac{d}{dw}\left(g\frac{dH}{dw}\right)dw.$$

Da nun nach 23):

$$\Omega_1=\frac{d\Omega_2}{dw}+\frac{\varrho}{r}\frac{d\Omega}{dw}$$

so folgt:

31) $$\int\left[\frac{d}{dw}\left(g\frac{dH}{dw}\right)-\frac{H}{g}\right]\Omega_1\,dw=$$

$$\Omega_2\left[\frac{d}{dw}\left(g\frac{dH}{dw}\right)-\frac{H}{g}\right]$$

$$+\frac{\varrho}{r}\frac{d\Omega}{dw}g\frac{dH}{dw}+\int\frac{r}{\varrho}\Omega g\frac{dH}{dw}dw.$$

Das letzte Integral auf der rechten Seite integrire man partiell in Beziehung auf Ω, die beiden in 31) vorkommenden Integrale geben dann, mit Rücksicht auf 21):

$$\int\frac{r}{\varrho}\Omega g\frac{dH}{dw}dw-\int\frac{\varrho}{r}\frac{d\Omega}{dw}\frac{H}{g}dw=$$

$$-\Omega H\cot\varphi+\int\frac{\Omega}{\cos\varphi}\frac{d}{dw}\frac{H}{\sin\varphi}dw.$$

Mit Hülfe dieser Gleichung und der Gleichung 31) lassen sich die Werthe von f, f_1, f_2 transformiren, wenn statt H successive h, h_1, h_2 gesetzt wird. Substituirt man dann die Werthe von f, f_1, f_2, jeden mit einer beliebigen Function von v versehn in die Gleichung 29), so erhält man den allgemeinen Ausdruck für $L\sin\varphi$. Zur Vereinfachung werde gesetzt:

$$P=\int\frac{\Omega}{\cos\varphi}\frac{d}{dw}\frac{h}{\sin\varphi}dw,$$

32) $$P_1=\int\frac{\Omega}{\cos\varphi}\frac{d}{dw}\frac{h_1}{\sin\varphi}dw,$$

$$P_2=\int\frac{\Omega}{\cos\varphi}\frac{d}{dw}\frac{h_2}{\sin\varphi}dw.$$

Durch eine Rechnung, deren Detail hier übergangen werden möge, findet man:

33) $$L\sin\varphi = \Omega\cot\varphi + \frac{h}{2}(V - P_2) + \frac{h_2}{2}(V_2 - P) + h_1(V_1 + P_1),$$

wo V, V_1, V_2 Functionen von v sind. Ferner erhält man aus 33) mit Rücksicht auf die Werthe von h, h_1 und h_2 aus 28):

34) $$\Omega + L\cos\varphi = \frac{\Omega}{\sin^2\varphi} + \frac{h}{2}(V - P_2)\cot\varphi + \frac{h_2}{2}(V_2 - P)\cot\varphi + h_2(V_1 + P_1)\cot\varphi,$$

35) $$\frac{\varrho}{r}\frac{d\Omega}{dw} - g\frac{dL\sin\varphi}{dw} = -\tfrac{1}{2}(V - P_2)g\frac{dh}{dw} - (V_1 + P_1)g\frac{dh_1}{dw} - \tfrac{1}{2}(V_2 - P)g\frac{dh_2}{dw},$$

36) $$\frac{d}{dw}\left(g\frac{dL\sin\varphi}{dw}\right) - \frac{d}{dw}\left(\frac{\varrho}{r}\frac{d\Omega}{dw}\right) - \frac{L\sin\varphi}{g} + \frac{r}{\varrho}\Omega =$$
$$\tfrac{1}{2}(V - P_2)\left(\frac{d}{dw}\left(g\frac{dh}{dw}\right) - \frac{h}{g}\right) + (V_1 + P_1)\left(\frac{d}{dw}\left(g\frac{dh_1}{dw}\right) - \frac{h_1}{g}\right) + \tfrac{1}{2}(V_2 - P)\left(\frac{d}{dw}\left(g\frac{dh_2}{dw}\right) - \frac{h_2}{g}\right).$$

Durch die rechten Seiten der Gleichungen 34), 35) und 36) sind die rechten Seiten der Gleichungen 22) bestimmt.

Differentiirt man die Gleichungen 22) nach v, bildet die Summe der Quadrate, so folgt wegen der Gleichungen 34) — 36):

$$\left(\frac{dx_1}{dv}\right)^2+\left(\frac{dy_1}{dv}\right)^2+\left(\frac{dz_1}{dv}\right)^2=$$

$$\left(\frac{h}{2}\frac{dV}{dv}+h_1\frac{dV_1}{dv}+\frac{h_2}{2}\frac{dV_2}{dv}\right)^2\frac{1}{\sin^2\varphi}$$

$$+\left(\frac{dV_1}{dv}\right)^2-\frac{dV}{dv}\frac{dV_2}{dv}.$$

Der erste Term auf der rechten Seite der vorstehenden Gleichung ist nach 33) gleich:

$$\left(\frac{dL}{dv}\right)^2.$$

Hierdurch nimmt die Gleichung 17) die Form an:

$$37)\qquad \left(\frac{dV_1}{dv}\right)^2=\frac{dV}{dv}\frac{dV_2}{dv}.$$

Hierdurch ist die Anzahl der willkührlichen Functionen von v in den Gleichungen 34) — 36) auf eine reducirt Da diese Gleichungen nämlich nur V, V_1 und V_2 enthalten, so können zwei dieser Quantitäten als Functionen der dritten angesehn werden, wegen der Differentialgleichung 37) bleibt dann nur eine willkührliche Function übrig, wodurch das Problem vollständig gelöst ist.

Bildet man die Summe der Quadrate der Gleichungen 22) zieht hiervon L^2 mittelst der Gleichungen 33) ab, so geben die Gleichungen 34) — 36):

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - L^2 = D_1 =$$

$$\frac{\Omega^2}{\sin^2\varphi} + (V_1 + P_1)^2 - (V - P_2)(V_2 - P),$$

wodurch die Quantität D_1 der Gleichungen 16) auf einfache Weise bestimmt ist.

Aus den Gleichungen 16) erhält man noch durch Differentation nach v, wenn man die Summe der Quadrate der so erhaltenen Gleichungen bildet, mit Rücksicht auf 17):

$$\frac{(D_1 \frac{dL}{dv} - L \frac{dD_1}{dv})^2 (\frac{\sqrt{G}}{r''})^2}{D_1^2} =$$

$$(\frac{d^2x_1}{dv^2})^2 + (\frac{d^2y_1}{dv^2})^2 + (\frac{d^2z_1}{dv^2})^2 - (\frac{d^2L}{dv^2})^2.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung lässt sich nach 34) — 37) auf folgende Form bringen:

$$(\frac{V'V''_2 - V''V'_2}{2V'_1})^2,$$

wo $V' = \frac{dV}{dv}$, $V'' = \frac{d^2V}{dv^2}$ ctr. gesetzt ist.

Aus den Gleichungen 19) und 22) folgt:

$$x_1\frac{dx_1}{du}+y_1\frac{dy_1}{du}+z_1\frac{dz_1}{dn}-L\frac{dL}{du}$$

$$=\frac{x_1\cos\alpha+y_1\cos\beta+z_1\cos\gamma-L\cos\varphi}{\cos\varphi}\frac{dL}{du}$$

$$=\frac{\Omega}{\cos\varphi}\frac{dL}{du}.$$

Da nun $x_1^2+y_1^2+z_1^2-L^2=D_1$, so ist:

$$\frac{dL}{du}=\frac{\cos\varphi}{2\Omega}\frac{dD_1}{du}.$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen und der Gleichungen 10) erhält man die folgenden:

$$\frac{d}{du}\frac{x_1}{D_1}=\left(\frac{\cos\alpha}{2\Omega}-\frac{x_1}{D_1}\right)\frac{1}{D_1}\frac{dD_1}{du},$$

$$\frac{d}{du}\frac{y_1}{D_1}=\left(\frac{\cos\beta}{2\Omega}-\frac{y_1}{D_1}\right)\frac{1}{D_1}\frac{dD_1}{du},$$

$$\frac{d}{du}\frac{z_1}{D_1}=\left(\frac{\cos\gamma}{2\Omega}-\frac{z_1}{D_1}\right)\frac{1}{D_1}\frac{dD_1}{du},$$

$$\frac{d}{du}\frac{L}{D_1}=\left(\frac{\cos\varphi}{2\Omega}-\frac{L}{D_1}\right)\frac{1}{D_1}\frac{dD_1}{du}.$$

Diese Gleichungen differentiire man nach v, bilde Summe der Quadrate der drei ersten Gleichungen und ziehe das Quadrat der vierten Gleichung ab. Wegen der Gleichungen 17) und 22) folgt dann:

$$\left(D_1 \frac{dL}{dv} - L \frac{dD_1}{dv}\right)^2 \left(\frac{\sqrt{E}}{r'}\right)^2 =$$

$$\left(\frac{\sin\varphi}{2\Omega}\right) \left(D_1 \frac{d^2 D_1}{du\,dv} - \frac{dD_1}{du}\frac{dD_1}{dv}\right)^2,$$

durch welche Gleichung $\frac{\sqrt{E}}{r'}$ bestimmt ist.

Verschwindet eine der Quantitäten ξ_1, η_1, ζ_1, so sei $\zeta_1 = 0$. Man hat dann statt der vorhergehenden Gleichungen die folgenden, deren weitere Deduction hier der Kürze halber übergangen werde möge.

$$\frac{\xi_1}{\cos\varepsilon} = \frac{\eta_1}{\sin\varepsilon} = \sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2},$$

$$\frac{1}{\sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2}} = \Omega_1, \quad p_1\Omega = \cos\varphi,$$

$$\frac{1}{\cos\varepsilon}\frac{dx_1}{du} = \frac{1}{\sin\varepsilon}\frac{dy_1}{du} = \frac{1}{\cos\varphi}\frac{dL}{du},$$

$$\frac{dz_1}{du} = 0.$$

Es ist also z_1 nur von v abhängig. Zur Bestimmung von x_1 und y_1 dienen die Gleichungen:

$$x_1\cos\varepsilon + y_1\sin\varepsilon = \Omega + L\cos\varphi,$$

$$-x_1\sin\varepsilon + y_1\cos\varepsilon = \frac{d\Omega}{d\varepsilon} - \operatorname{tang}\varphi\,\frac{dL\sin\varphi}{d\varepsilon}.$$

Es ist ferner L durch die Gleichung zu bestimmen:

$$\frac{d}{d\varepsilon}\left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon} - \operatorname{tang}\varphi\,\frac{dL\sin\varphi}{d\varepsilon}\right) + \Omega + L\cos\varphi = 0.$$

Setzt man:

$$\frac{dt}{d\varepsilon} = \cot\varphi$$

und:

$$Q_1 = \int\frac{\Omega e^{-t}}{\sin^2\varphi}\left(1 + \frac{d\varphi}{d\varepsilon}\right)d\varepsilon,$$

$$Q_2 = \int\frac{\Omega e^{t}}{\sin^2\varphi}\left(1 - \frac{d\varphi}{d\varepsilon}\right)d\varepsilon,$$

so ist:

$$L\sin\varphi = \Omega\cot\varphi + \tfrac{1}{2}e^{t}(V_1 + Q_1)$$

$$+ \tfrac{1}{2}e^{-t}(V_2 - Q_2),$$

wo V_1 und V_2 Functionen von v sind. Im vorliegenden Falle ist:

$$\Omega + L\cos\varphi = \tfrac{1}{2}e^{t}(V_1 + Q_1)\cot\varphi$$

$$+ \tfrac{1}{2}e^{-t}(V_2 - Q_2)\cot\varphi + \frac{\Omega}{\sin^2\varphi},$$

$$\frac{d\Omega}{d\varepsilon} - \operatorname{tang}\varphi\,\frac{dL\sin\varphi}{d\varepsilon} = -\tfrac{1}{2}e^{t}(V_1 + Q_1)$$

$$+ \tfrac{1}{2}e^{-t}(V_2 - Q_2).$$

Die Gleichung endlich:

$$\left(\frac{dx_1}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dz_1}{dv}\right)^2 = \left(\frac{dL}{dv}\right)^2$$

geht über in:

$$\left(\frac{dz_1}{dv}\right)^2 = \frac{dV_1}{dv}\,\frac{dV_2}{dv}.$$

Verschwinden zwei der Quantitäten ξ_1, η_1 und ζ_1, so sei $\xi_1 = 0$, $\eta_1 = 0$, also:

$$\frac{dx_1}{du} = 0, \quad \frac{dy_1}{du} = 0,$$

oder $x_1 = V_1$, $y_1 = V_2$, wo V_1 und V_2 Functionen von v sind. Setzt man:

$$p_1 = \zeta_1 \cos\varphi, \quad \frac{1}{\zeta_1} = \Omega,$$

so hat man die Gleichungen:

$$\frac{dz_1}{du} = \frac{1}{\cos\varphi}\,\frac{dL}{du}, \quad z_1 = \Omega + L\cos\varphi,$$

also:

$$\frac{dL\sin\varphi}{du} = \frac{d\Omega}{du}\cot\varphi,$$

mithin:

$$L\sin\varphi = W + \Omega\cot\varphi + \int\frac{\Omega}{\sin^2\varphi}\,d\varphi,$$

wo W eine Function von v bedeutet. Man findet noch:

$$\left(\frac{dV_1}{dv}\right)^2 + \left(\frac{dV_2}{dv}\right)^2 = \left(\frac{dW}{dv}\right)^2.$$

oder:

$$V_1 = \int \cos\psi \, dW, \quad V_2 = \int \sin\psi \, dW$$

wo ψ und W auf beliebige Weise von einander abhängen. Man kann, unbeschadet der Allgemeinheit, $\psi = v$ setzen und:

$$W = V'' + V,$$

$$V_1 = V'' \cos v + V' \sin v,$$

$$V_2 = V'' \sin v - V' \cos v,$$

wo V eine beliebige Function von v ist.

Ueber die anatomischen Verhältnisse einiger Arten von Gunnera L.

Von

Dr. J. Reinke.

Die vergleichend anatomische Untersuchung einiger Arten von Gunnera ergab eine Reihe von Thatsachen, welche geeignet sind, die von mir am 2. December 1871 gegebene Mittheilung (in Nr. 25 dieser Blätter) zu erweitern, beziehungsweise zu berichtigen.

Ich hatte Gelegenheit, frisch G. scabra R. et P. (chilensis Lam.) aus dem hiesigen und G. perpensa L. aus dem Berliner botanischen Garten zu untersuchen, welche letztere Art ich der Güte des Herrn Prof. Braun verdanke; ferner hatte Hr. Prof. Grisebach die Freundlichkeit, mir die Exemplare seines Herbariums zur Verfügung zu stellen, darunter G. magellanica Lam. und G. monoica Raoul.

Der Verbreitungsbezirk der G. scabra reicht von Caracas, Peru, Bolivia, Chile bis zum Chonos-Archipel, er berührt sich hier mit dem der G. magellanica, welche die Falklandsinseln, Terra del Fuego, die Ufer der Magellanstrasse, die Insel Chiloe und das Gebiet des Rio Tolten (49° Breite) bewohnt, und sich weiter nördlich in Bolivia in der Umgebung von Sorata in einer Höhe von 3300 bis 3500 Meter, sowie in den Anden von Ecuador wiederfindet; dagegen ist das Vorkommen der G. perpensa auf das Cap der guten Hoffnung und das der G. monoica auf Neuseeland beschränkt (nach Decandolle, Prodr. Bd. 16, Sect. 2, S. 598 ff.).

Der theilweise sehr verschiedenartigen und entfernten Heimath dieser Gewächse entspricht eine nicht geringere Mannichfaltigkeit der morphologischen und anatomischen Verhältnisse; einige der wichtigeren sind in nachfolgenden Zeilen zusammengestellt.

Der Stamm von G. monoica ist in ähnlicher Weise gestaucht wie derjenige der übrigen Arten; die Blätter sind in dichter Aufeinanderfolge spiralig angeordnet; aus einzelnen Blattachseln entwickeln sich Inflorescenzen, aus anderen lange, rankenförmige, nackte Ausläufer, welche in grösserer Entfernung von einander in der Achsel kleiner, schuppenartiger Niederblätter beblätterte Sprosse tragen. Wir haben demnach zwischen diesen, blüthenstandtragenden Sprossen — den eigentlichen Stämmen — zu unterscheiden und den secundär von ihnen ausgehenden Stolonen, welche ihrerseits wieder Laubsprosse zu erzeugen vermögen. Es entsteht dadurch ein ganzes System von individualisirten Laubsprossen, welche durch die Ausläufer mit einander in Verbindung

stehen; die Wurzeln entspringen adventiv aus dem unteren Theile der Stämmchen.

Stipulä sind nicht vorhanden. Dagegen finden sich dieselben schleimaussondernden Drüsen, welche ich für G. scabra bereits beschrieben habe; doch zeichnen sich diejenigen der G. monoica durch lange Arme aus. Diese Drüsen sind grosse, vielzellige Organe, die als Gewebehügel aus dem Periblem entstehen, wie die Blätter; doch scheint es mir überflüssig, dieselben willkürlich in eine der geläufigen Kategorien (Kaulom, Phyllom, Trichom) einfügen zu wollen; kämen nicht (bei anderen Arten) anderweitige Stipulä vor, so würde man sie am ersten den Stipularbildungen vergleichen können.

Der Fibrovasalstock von G. monoica ist einfach gebaut und erinnert an denjenigen von Hippuris; ein einziger axiler, geschlossener Strang durchzieht das Stämmchen und die Stolonen; die Blätter besitzen ebenfalls nur je einen Strang, welcher sich in der Lamina zerklüftet und im Stamme dem centralen Bündel anschmiegt, mit demselben verschmilzt. Soviel sich an den getrockneten Exemplaren [1]) erkennen lässt, endigt der axile Strang im procambialen Zustande blind unter dem Vegetationspuncte, die Blattspuren lehnen sich sofort daran an. Im mittleren Theile des im Querschnitt elliptischen Fibrovasalstranges finden sich zwei Gruppen von Spiral- und Treppengefässen, dazwischen eine Gruppe Phloemzellen; der peripherische Theil besteht aus bastartigen Prosenchymzellen.

1) Um Herbarienexemplare für anatomische Untersuchungen den frischen wieder annäherungsweise gleich zu machen, empfiehlt es sich, dieselben in sehr verdünnter Kalilösung aufzukochen, demnächst mit Essigsäure zu neutralisiren und dann mit Wasser auszuwaschen.

G. magellanica erinnert in mancher Beziehung an die vorherige Art, sie stellt eine Wiederholung desselben Typus in robusteren Zügen dar. Das Verhältniss des eigentlichen Stammes und der Ausläufer ist ein ähnliches wie bei monoica; dagegen entspricht der grösseren Dicke der Axenglieder eine Complication des Fibrovasal-Systems.

Die Drüsen sind flach und verbreitet. Als axilläres Stipulargebilde findet sich eine Ochrea, welche, völlig vom Blatte getrennt, als geschlossener Ringwall entsteht und hernach zu einer Kapuze verwächst, und welche erst von dem sich entfaltenden Blatte gesprengt wird.

Der Stamm von G. magellanica ist von 3 parallelen Strängen durchzogen, deren Bau demjenigen der G. monoica entspricht. In den Stolonen ist das Verhältniss auch hier das einfachste; die einzelnen Stränge sind einander so genähert, dass sie theilweise zu einem axilen Bündel verschmelzen, doch lässt sich auf dem Querschnitte leicht die Zahl der ursprünglichen Stränge erkennen.

Das Grundgewebe des Stammes besteht aus grossentheils collenchymatischem Parenchym, die äussersten, subepidermidalen Schichten sind sklerenchymatisch verdickt; ebenso finden sich einzelne Sklerenchymzellen durch das ganze Grundgewebe zerstreut, Eine Eintheilung in Mark und Rinde ist nicht anwendbar.

In der Region der Blattspuren ist der Verlauf der Gefässbündel etwas verwickelter; einmal kommen gürtelförmige, horizontale Verbindungsstränge vor und überdiess beschreiben die Blattspuren, ehe sie mit den primären Strängen verschmelzen, einen mehr oder weniger bedeutenden Bogen. Uebrigens sind die Blätter dreispurig, doch sind die beiden lateralen Stränge äusserst

winzig, nur der mittlere ist kräftig entwickelt; auch spalten sich die Blattspuren gleich beim Eintritt in den Stamm in mehrere Stränge. Dazu treten dann noch die Stränge der Ochrea, deren ich an einem vorliegenden Präparate 10 zähle.

Bei G. perpensa entspricht der massigen, fleischigen Entwicklung des Stammes (Rhizom's) eine sehr mannichfache Verkettung der hier zahlreich vorhandenen Gefässbündel. Auch gelang es mir leichter, die Entwicklung derselben aus dem Urmeristem des Vegetationspunctes zu beobachten, als bei den beiden anderen Arten, von denen mir nur trocknes Material zu Gebote stand.

Die Drüsen ähneln denen der G. scabra; Stipulä sind nicht vorhanden.

Der Vegetationspunct ist, wie bei den meisten Gewächsen mit gestauchten Internodien, sehr flach; entfernt man die oberste Schicht desselben durch einen zarten Schnitt, so enthält der nächst untere Querschnitt bereits eine Ansicht der primordialen Procambiumstränge; dieselben bilden ein mehrfach durch einander geflochtenes Netzwerk. Auf Längsschnitten erkennt man, dass die Endigung der Procambiumstränge im Vegetationspuncte eine schlingenförmige ist; an diese stammeigenen, gürtelförmigen, in zahlreichen Verästellungen mit einander communicirenden Stränge setzen die Blattspuren sich von Aussen an. Im procambialen Zustande liegen die Stränge sehr dicht neben einander, sie werden durch das, anfangs sich noch theilende, später durch Streckung sich erweiternde Grundgewebe auseinandergerückt, und darauf beruht das Dickewachsthum des Stammes. Uebrigens stellt im entwickelten Zustande das Gerüst der Stränge eine Art Hohlcylinder dar, durch den, wenn auch unvollkommen, das parenchymatische Grundgewebe in

einen axilen und einen pheripherischen Theil, in Mark und Rinde geschieden wird. Auch hier sind alle Stränge geschlossen, ihr Bau im Einzelnen ist dem bei G. monoica beschriebenen ähnlich.

In den Structurverhältnissen des Stammes schliesst sich endlich G. scabra der vorherigen Art an; nur darin weicht sie ab, dass keine (im Querschnitt) vorherrschend ringförmige Anordnung der Fibrovasalstränge stattfindet, sondern dass diese als homogenes Flechtwerk das ganze Grundgewebe gleichmässig durchsetzen; die Endigung im Vegetationspuncte ist wie bei perpensa; die zahlreich vorhandenen, axillären Stipulä sind schon in der früheren Mittheilung besprochen worden.

Ausser diesen Characteren — und den äusseren, von den Autoren benutzten — finden sich noch manche andere von specifischer Verschiedenheit, namentlich in der Gestalt der Trichome und der Stärkekörner, auf die aber hier nicht weiter eingegangen werden soll.

Die interessanteste Thatsache ist aber unzweifelhaft die, dass in den Stämmen dieser vier Arten sich dieselben oder doch äusserst ähnliche Schmarotzeralgen finden, über deren Vorkommen in G. scabra ich bereits berichtet habe[1].

Was zunächst die systematische Stellung der Alge anlangt, so können nur Culturen darüber mit Sicherheit entscheiden, und leider haben mir Culturversuche, sowohl im Wasser wie auf feuchten Substraten, bisher nicht gelingen wollen.

1) Während des Druckes geht mir der Aufsatz von Eduard v. Janczewski in Nr. 5 der botan. Zeitung zu, worin derselbe das parasitische Vorkommen eines Nostoc in dem Laube einiger Lebermoose beschreibt; die darauf bezüglichen Notizen von Milde und Gottsche waren mir bisher entgangen.

Die einzelnen Fäden, welche sich frei im Schleime der Blattknospen finden, scheinen mir zu ungenügend, um mit Sicherheit eine Bestimmung vornehmen zu können. Wenn ich die Alge in der früheren Mittheilung als eine Scytonemacee bezeichnete, so stützte sich diese Ansicht auf das Vorhandensein zarter Scheiden und auf die, freilich nur einmal deutliche Beobachtung von Scheinästen; weil sich aber bei mittlerweile fortgesetzter Beobachtung, und zwar besonders auch an G. perpensa, niemals wieder Exemplare mit Scheinästen zeigten, so scheint es mir doch zu gewagt, auf eine einmalige Beobachtung hin das Vorkommen der für die Scytonemen charakteristischen Scheinäste für sicher gestellt zu halten. Dagegen schliesst sich die Alge in den meisten Stücken den Anabaeneen an, und möchte sie vielleicht in einer der dahin gehörigen Gattungen unterzubringen sein, zumal wenn man berücksichtigt, dass Anabaena granularis Naeg. Scheiden besitzt (vgl. Kütz. tab. phyc. I tab. 94 fig. 6) und dass Cylindrospermum polyspermum Kg. nach Kützings Abbildung (l. c. tab. 99 fig. 5) ausser Scheiden auch Scheinäste zeigt.

Die in Rede stehende Alge stellt innerhalb der definitiven Ablagerungszellen knäuelförmige, aus verschlungenen Fäden gebildete Ballen dar, während man in den Gewebeparthien, durch welche das Eindringen statt hat, zwar wurmförmig hin- und hergekrümmte, aber doch vorwiegend parallel verlaufende Fäden findet. Die Zellenfäden endlich, welche frei im Schleime der Drüsen wuchern, sind bald gerade, bald leicht gekrümmt, oft 30 Glieder und darüber lang; sie sind in sehr zarten, hyalinen Scheiden einge-

1) Vgl. auch das Referat von P. Magnus im Naturforscher Jahrg. V. Nr. 6.

schlossen, welche sich bald mehr, bald minder deutlich von den primären Zellhäuten abheben. Die Breite der einzelnen Gliederzellen beträgt bei G. perpensa 3, 5 bis 4 Mik., bei den drei übrigen Arten 4 bis 6 Mik., doch kommen auch hier zartere Fäden vor; die Länge der Glieder ist höchst inconstant. Nicht selten findet man neben einander liegende Fäden, deren Scheiden der Länge nach mit einander verwachsen sind. Zwischen den Gliederzellen finden sich hier und da einzelne, mitunter auch zu mehren auf einander folgende, ovale Zellen, welche sich durch Grösse und dichteren Inhalt vor den übrigen auszeichnen; ob es Sporen sind, oder ob sie nur den Werth von Interstitialzellen besitzen, liess sich nicht ermitteln. Uebrigens bilden die Algen in den übrigen Arten von Gunnera ähnliche Nester, wie in G. scabra, und dienen ihnen allemal die Drüsen als Eingang.

Die Annahme, die hier in Rede stehende Alge sei eine Anabaena oder verwandte Gattung, wird noch durch den Umstand unterstützt, dass in der That ächte Anabaenen im Innern lebender Pflanzentheile anzutreffen sind. Die in den Töpfen unserer Gewächshäuser an die Oberfläche tretenden Wurzeln der Cycadeen zeigen oft einen grünlichen Schimmer, der nicht von Ergrünen durch Bildung von Chlorophyll herrührt, sondern durch endophytische Algen verursacht wird. Die Cycadeenwurzeln der hiesigen Gewächshäuser, welche ich darauf hin genauer untersuchte, zeigen häufig auf Quer- und Längsschnitten eine, in der Mitte der Rinde verlaufende Zellschicht mit blaugrünem Inhalte, und die mikroscopische Analyse ergiebt, dass eine ächte Anabaena diese Zellen erfüllt. Dieselbe gelangt zuerst wahrscheinlich an einer verletzten Stelle in das In-

nere der Wurzel hinein, wo sie sich dann in einer bestimmten Zellschicht ausbreitet, deren Zellen dabei eine bedeutende Erweiterung erfahren. Dieselbe Anabaena findet sich auf der Oberfläche der Töpfe, wo sie in Fülle ihre goldbraunen Sporen hervorbringt.

Jedenfalls hat das soeben erwähnte Vorkommen von Algen nicht die typische Bedeutung, wie bei Gunnera; hier scheinen in der That Wirth und Parasit ein ähnlich constantes Consortium [1]) darzustellen, wie die Flechten.

1) Der Ausdruck »Consortium« ward von Grisebach (mündlich) als Bezeichnung für das, auf wechselseitigem Parasitismus beruhende Zusammenleben von Algen und Ascomyceten im Flechtenthallus vorgeschlagen, und ist sehr zutreffend.

Verzeichniss der bei der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangenen Druckschriften.

Fortsetzung.

4. Jahresbericht des akademischen Lesevereins zu Graz. 1871. Graz 1871. 8.

Berichte des naturwissenschaftlich-medicinischen Vereins in Innsbruck. Jahrg. II. H. 1. Innsbruck 1871. 8.

Bulletin de l'Académie R. de Belgique. 40. année. 2. série. T. 32. Nr. 11. 12. Bruxelles 1871. 8.

C. L. Grotefend, Der Streit zwischen dem Erzbischof Gerhard II. von Bremen und dem Bischof Iso von Verden etc. 1871. 8.

Monatsbericht der königl. preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. September, October und November 1871. Berlin 1871. 8.

(Fortsetzung folgt).

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

21. Februar. №. 6. 1872.

Universität.

Verzeichniss der Vorlesungen auf der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen während des Sommerhalbjahrs 1872. Die Vorlesungen beginnen den 15. April und enden den 15. August.

Theologie.

Erklärung der Genesis: Dr. phil. *Hoffmann* fünfstündig um 10 Uhr.

Erklärung der Psalmen: Professor *Bertheau* sechsstündig um 10 Uhr.

Erklärung des Buches Hiob: Lic. *Wellhausen* vierstündig um 12 Uhr.

Einleitung in das Neue Testament: Prof. *Lünemann* fünfmal wöchentlich.

Leben Jesu Christi: Professor *Ehrenfeuchter* viermal, Mont. Dienst. Donnerst. Freit. um 11 Uhr.

Synoptische Erklärung der drei ersten Evangelien: Prof. *Wiesinger* fünfmal um 9 Uhr.

Erklärung des Evangeliums Johannis: Prof. *Zahn* fünfmal um 11 Uhr.

Erklärung des Römerbriefs: Prof. *Lünemann* fünfmal um 9 Uhr.

Theologie des Neuen Test.: Prof. *Wiesinger* fünfmal um 12 Uhr.

Erklärung der Apocalypse des Johannes: Prof. *Zahn* vierstündig um 12 Uhr.

Kirchengeschichte I. Hälfte: Prof. *Wagenmann* sechsstündig um 8 Uhr.

Kirchengeschichte II. Hälfte: Prof. *Duncker* sechsmal um 8 Uhr und zweimal (Dienst. und Freit.) um 7 Uhr.

Kirchengeschichte des XIX. Jahrhunderts: Professor *Wagenmann* vierstündig um 7 Uhr, öffentlich.

Reformationsgeschichte: Prof. *Duncker* zweimal, Mittwochs und Sonnabends um 7 Uhr, öffentlich.

Comparative Symbolik: Prof. *Matthaei* zweimal, Donnerst. und Freit., um 2 Uhr.

Dogmatik I. Theil: Prof. *Schöberlein* viermal um 12 Uhr.

Theologische Ethik: Prof. *Ritschl* fünfmal um 11 Uhr und einmal (Mittwochs) um 12 Uhr.

Praktische Theologie II. Theil (Liturgik, Homiletik, Theorie der Seelsorge und Kirchenverfassung): Prof. *Ehrenfeuchter* fünfmal von 3—4 Uhr.

Katechetik und Homiletik: Professor *Schöberlein* Mont. u. Dienst. um 5 Uhr.

Liturgik: *Derselbe* Donnerst. u. Freit. um 5 Uhr.

Die Uebungen des Königl. Homiletischen Seminars leiten abwechslungsweise Prof. *Ehrenfeuchter* und Prof. *Wiesinger* Sonnabends 9—12 Uhr öffentlich.

Katechetische Uebungen: Prof. *Ehrenfeuchter* Sonnabends 3—4 Uhr; Prof. *Wiesinger* Mittwochs 5—6 Uhr öffentlich.

Die liturgischen Uebungen der Mitglieder des praktisch-theologischen Seminars leitet Professor *Schöberlein* Sonnabends 9—11 Uhr öffentlich.

Anleitung zum Kirchengesang giebt *Derselbe* Mittwochs 6—7 Uhr öffentlich.

Eine dogmatische Societät leitet Prof. *Schöberlein* Dienst. um 6 Uhr; eine historisch-theologische Prof. *Wagenmann* Freit. 6 Uhr.

Die exegetischen, kirchenhistorischen und systematischen Conversatorien im theologischen Stift werden in gewöhnlicher Weise Montag Abends 6 Uhr von den Repetenten geleitet werden.

Repetent Lic. *Dorner* wird zu einer zu bestimmenden Stunde einmal wöchentlich Augustins Enchiridion oder

eine seiner antipelag. Schriften erklären lassen; Repetent *Zöpffel* in zwei Stunden die Briefe Pauli an die Colosser und Epheser; Repetent *Duhm* zweistündig Dienstags und Freitags 6 Uhr ausgewählte Stücke aus den Salomonischen Schriften cursorisch und unentgeltlich erklären. Die Lehre des Alten Testaments vom Leben nach dem Tode wird *Derselbe* Donnerstags 6 Uhr öffentlich vortragen.

Rechtswissenschaft.

Institutionen des römischen Rechts: Prof. *Francke* von 11—12 Uhr; Institutionen und Geschichte des römischen Rechts: Prof. *Hartmann* sechsmal wöch. von 10—11 und von 11—12 Uhr.

Pandekten mit Ausnahme der Lehren über Eigenthum und Jura in re: Dr. *Enneccerus* täglich von 9—10 und von 11—12 Uhr.

Die Lehre vom Eigenthum und den Jura in re: Prof. *Ribbentrop* fünfmal wöch. von 10—11 Uhr öffentlich.

Erbrecht: Prof. *Francke* von 8—9 Uhr.

Eine exegetische Vorlesung wird Prof. *Ribbentrop* halten und darin auch die Zuhörer in der Beantwortung ihnen vorgelegter Fragen üben, fünfmal wöch. von 12—1 Uhr.

Deutsche Staats- und Rechtsgeschichte: Prof. *Frensdorff*, 5 Stunden 11 Uhr.

Deutsches Privatrecht mit Einschluss des Lehn- Handels- und Wechselrechts: Prof. *Kraut* nach der fünften Ausgabe seines Grundrisses zu Vorlesungen über das deutsche Privatrecht täglich von 7—8 und von 9—10 Uhr; Deutsches Privatrecht nebst Lehn- und Handelsrecht: Prof. *Wolff* 12 Stunden von 7—9 Uhr.

Handelsrecht: Prof. *Thöl* nach seinem Buche (das Handelsrecht, vierte Aufl., das Wechselrecht, dritte Aufl.) fünfmal wöch. von 7—8 Uhr.

Preussisches Privatrecht: Dr. *Ziebarth* fünfmal wöch. von 8—9 Uhr.

Gemeines deutsches Criminalrecht: Prof. *Zachariae* sechsstündig um 11 Uhr.

Gemeines deutsches Staatsrecht: Prof. *Zachariae* sechsstündig um 12 Uhr.

Völkerrecht: Prof. *Frensdorff*, 3 Stunden um 12 Uhr.

Kirchenrecht einschliesslich des Eherechts: Prof. *Dove* von 9—10 Uhr; katholisches und evangelisches Kirchenrecht: Dr. *Bierling* täglich von 10—11 Uhr.

Theorie des Civilprocesses: Prof. *Hartmann* sechsmal wöch. von 12—1 Uhr und zweimal zu einer andern passenden Stunde.

Pandectenpracticum: Prof. *Thöl* Mont. und Donnerst. von 4—5 und von 5—6 Uhr.
Processpracticum: Prof. *Briegleb* vierstündig.

Medicin.

Zoologie, Botanik, Chemie s. unter Naturwissenschaften.

Anthropologie mit Benutzung der Blumenbach'schen Sammlung (auch für Nicht-Mediciner) trägt Dr. *Merkel* Montag, Mittwoch, Freitag von 10—11 Uhr vor.

Medicinische Propaedeutik trägt Prof. *Krause* Sonnabend von 10—11 Uhr öffentlich vor.

Die Knochen- und Bänderlehre trägt Dr. *Merkel* Dienstag, Donnerstag, Sonnabend von 11—12 Uhr vor.
Systematische Anatomie II. Theil (Gefäss- und Nervenlehre): Prof. *Henle*, täglich von 12—1 Uhr.
Allgemeine Anatomie: Prof. *Henle*, Montag, Mittwoch, Freitag von 11—12 Uhr.
Mikroskopische Uebungen leitet Prof. *Krämer* privatissime, Dr. *Merkel* wie bisher.
Mikroskopische Curse im pathologischen Institut hält Prof. *Krause* wie bisher für Anfänger um 11 Uhr, für Geübtere um 12 Uhr oder um 2 Uhr.
Allgemeine und besondere Physiologie mit Erläuterungen durch Experimente und mikroskopische Demonstrationen: Prof. *Herbst* sechsmal wöchentlich um 10 Uhr.
Experimentalphysiologie I. Theil (Physiologie der Ernährung): Prof. *Meissner* fünfmal wöchentlich von 10—11 Uhr.
Physiologie der Zeugung nebst allgemeiner und specieller Entwicklungsgeschichte: Prof. *Meissner*, Freitag von 5—7 Uhr.

Physiologische Optik s. S. 118.

Arbeiten im physiologischen Institut leitet Prof. *Meissner* täglich in passenden Stunden.

Allgemeine Pathologie und Therapie: Prof. *Krause*, Dienstag und Freitag von 2—3 Uhr.

Physikalische Diagnostik verbunden mit praktischen Uebungen an Gesunden und Kranken trägt Dr. *Wiese* viermal wöchentlich in später näher zu bezeichnenden Stunden vor.

Pharmakologie oder Lehre von den Wirkungen und der Anwendungsweise der Arzneimittel so wie Anleitung zum Receptschreiben: Prof. *Marx* fünfmal wöchentlich von 3—4 Uhr.

Arzneimittellehre und Receptirkunde verbunden mit pharmakognostischen Demonstrationen, pharmakodynamischen und toxikologischen Experimenten trägt Dr. *Husemann* fünfmal wöchentlich um 3 Uhr vor.

Arzneimittellehre und Receptirkunde in Verbindung mit Demonstrationen der Arzneimittel und ihrer physiologischen und toxischen Wirkung trägt Dr. *Marmé* fünfmal wöchentlich von 4—5 Uhr vor.

Pharmakognosie lehrt Prof. *Wiggers* fünfmal wöchentlich von 2—3 Uhr nach seinem Handbuche der Pharmakognosie, 5. Aufl. Göttingen 1864.

Pharmakognosie und Pharmacie für Mediciner trägt Dr. *Husemann* Dienstag, Mittwoch und Donnerstag von 5—6 Uhr vor.

Pharmacie lehrt Prof. *Wiggers* sechsmal wöchentlich von 6—7 Uhr Morgens; Dasselbe lehrt Dr. *Stromeyer* privatissime.

Pharmaceutische Chemie und organische Chemie für Mediciner: Vgl. Naturwissenschaften S. 10.

Pharmakologische und toxikologische Untersuchungen leitet Dr. *Marmé* im physiologischen Institut zu passenden Stunden.

Elektrotherapie in Verbindung mit praktischen Uebungen in der Anwendung des Inductions- und des constanten Stroms lehrt Dr. *Marmé* Mittwoch und Donnerstag von 6—7 Uhr.

Specielle Pathologie und Therapie: Prof. *Hasse* täglich von 7—8 Uhr.

Ueber die Hautkrankheiten und deren Behandlung

trägt Prof. *Krämer* Dienstag und Freitag von 4—5 Uhr oder zu andern passenden Stunden vor.

Die medicinische Klinik und Poliklinik leitet Prof. *Hasse* täglich von $10^1/_2$—12 Uhr.

Chirurgie I. Theil: Prof. *Baum* fünfmal wöchentlich von 4—5 Uhr, Sonnabend von 3—4 Uhr.

Allgemeine Chirurgie als ersten Theil der Chirurgie lehrt Prof. *Lohmeyer* sechsmal wöchentlich von 4—5 Uhr.

Specielle Chirurgie als zweiten Theil der Chirurgie: *Derselbe*, täglich von 7—8 Uhr.

Ueber Knochenbrüche und Verrenkungen trägt Prof. *Baum* Mittwoch und Sonnabend von 2—3 Uhr publice vor.

Augenheilkunde lehrt Prof. *Leber* Montag, Dienstag, Donnerstag und Freitag von 8—9 Uhr.

Die chirurgische Klinik und Poliklinik im Ernst-August-Hospitale hält Prof. *Baum* täglich um 9 Uhr.

Chirurgische Klinik hält Prof. *Lohmeyer* von 8—9 Uhr.

Die Klinik der Augenkrankheiten hält Prof. *Leber* Montag, Dienstag, Donnerstag u. Freitag von 12—1 Uhr.

Uebungen in chirurgischen Operationen an der Leiche leitet Prof. *Baum* im Anatomiegebäude so oft Leichen vorhanden von 5 Uhr Nachm. an.

Augenoperationscursus hält Prof. *Leber* zweimal wöchentlich in zu verabredenden Stunden.

Augenspiegelcursus hält Prof. *Leber* Mittwoch von 8—9 und von 12—1 Uhr und Sonnabend von 12—1 Uhr.

Gynaekologie trägt Prof. *Schwartz* Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag um 3 Uhr vor.

Geburtshülflichen Operationscursus am Phantom hält Prof. *Schwartz* Mittwoch und Sonnabend um 8 Uhr.

Geburtshülfliches Casuisticum mit Phantomübungen hält Prof. *Krämer* dreimal wöchentlich in näher zu verabredenden Stunden.

Geburtshülflich-gynaekologische Klinik leitet Prof. *Schwartz* Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag um 8 Uhr.

Pathologie und Therapie der Geisteskrankheiten lehrt Prof. *Meyer* Mittwoch und Sonnabend von 3—4 Uhr.

Psychiatrische Klinik hält Prof. *Meyer* Montag und Donnerstag von 4—6 Uhr.

Sanitätspolizei lehrt Prof. *Lohmeyer* fünfmal wöchentlich von 11—12 Uhr.

Die forensisch wichtigsten Gifte bespricht und de-

monstrirt experimentell Dr. *Marmé* öffentlich Montag von 5—7 Uhr.

Die wichtigsten Giftmordsprocesse der neuern Zeit beleuchtet Dr. *Husemann* öffentlich Montag und Freitag von 5—6 Uhr.

Die Lehre von den Krankheiten der Hausthiere in Verbindung mit klinischen Demonstrationen im Thierhospitale trägt Dr. *Luelfing* wöchentlich sechsmal von 7—8 Uhr vor.

Philosophie.

Geschichte der alten Philosophie: Dr. *Stumpf*, Mont. Dienst. Donnerst. Freit. 5 Uhr.

Geschichte der mittelalterlichen und neueren Philosophie: Prof. *Baumann*, Mont. Dienst. Donnerst. Freit. 5 Uhr.

Logik, verbunden mit Erklärung von Trendelenburgs elementa logices aristoteleae: Prof. *Baumann*, Mont. Dienst. Donnerst. Freit. 8 Uhr.

Logik (mit kritischer Rücksicht auf ihren geschichtlichen Entwicklungsgang): Prof. *Peip*, Dienst. Mittw. Donnerst. Freit. 8 Uhr.

Metaphysik: Prof. *Lotze* 4 St., 10 Uhr.

Psychologie: Prof. *Bohtz*, Mont. Dienst. u. Freit. 4 Uhr.

Praktische Philosophie: Prof. *Lotze*, 4 St., 4 Uhr.

Ueber die Hauptsysteme der philosophischen Ethik: Prof. *Peip*, Donnerstag 6—8 Uhr Abends (privatissime, aber unentgeltlich).

Aesthetik: Prof. *Bohtz*, Mont. Dienst. Donnerst. 4 Uhr.

Grundriss der Rhetorik: Prof. *Krüger* (privatissime).

Prof. *Baumann* wird in seiner philosophischen Societät aus Kants Kritik der Urtheilskraft den Abschnitt von der aesthetischen Urtheilskraft behandeln, Dienstag 6 Uhr.

Prof. *Peip* wird in seinen philosophischen Societäten Nachm. 5—6 Uhr am Dienstag die Meditationen des Cartesius, am Freitag Spinoza's Tractat von Gott, dem Menschen und dessen Glückseligkeit erklären.

Dr. *Peipers* wird in seiner philosophisch-philologischen Societät Aristoteles Lehren über Raum, Zeit und

Bewegung nach Abschnitten aus dessen Physik erklären Freitags um 6 Uhr.

Dr. *Stumpf* wird in seiner philosoph. Societät das I. Buch der aristotelischen Metaphysik erklären, Dienstag 6—7 Uhr.

Geschichte der Erziehung: Prof. *Krüger*, 2 St., 4 Uhr.

Die Uebungen des K. pädagogischen Seminars leitet Prof. *Sauppe*, Mont. und Dienst. 11 Uhr.

Mathematik und Astronomie.

Die Stereometrie mit der sphärischen Trigonometrie: Prof, *Ulrich*, Mont. Dienst. Donnerst. Freit., 10 Uhr.

Praktische Geometrie mit Uebungen auf dem Felde: *Derselbe* 4 mal wöch., von 5—7 Uhr.

Analytische Geometrie der Ebene: Dr. *Klein*, Mont. Dienst. Donnerst. Freit. 8 Uhr.

Theorie der algebraischen Formen: Prof. *Clebsch*, Mont. Dienst. Donn. Freit. 12 Uhr.

Differential- und Integralrechnung: Prof. *Stern*, 5 St. 7 Uhr.

Theorie der bestimmten Integrale: Prof. *Enneper*, Mont. Dienst. Mittw. Donnerst. Freit. 9 Uhr.

Theorie der Functionen einer complexen veränderlichen Grösse, insbesondere Theorie der Elliptischen Functionen: Prof. *Schering*, 4 St., 9 Uhr.

Theorie der elliptischen Functionen: Prof. *Clebsch*, Mont. Dienst. Donn. Freit. 11 Uhr.

Theorie der partiellen Differentialgleichungen und deren Anwendung auf physikalische Aufgaben: Dr. *Minnigerode* 4 St., 10 Uhr.

Die Lehre von den Determinanten: Prof. *Enneper*, Mittw. u. Sonnab. 10 Uhr.

Variationsrechnung: Prof. *Stern*, Mont. Dienst. Mittw. 8 Uhr.

Magnetische Uebungen: Prof. *Schering*, für die Mitglieder des math. physikalischen Seminars.

Sphärische Astronomie: Prof. *Klinkerfues*, Mont. Dienst. Donnerst. und Freit. um 12 Uhr.

Zur Leitung einer mathematischen Societät erbietet sich Prof. *Clebsch*.

In dem mathematisch-physikalischen Seminar leitet Prof. *Clebsch* die mathematischen Uebungen Mittw. 12 Uhr; trägt Prof. *Stern* über die Kreistheilung vor; giebt Prof. *Klinkerfues* einmal wöch. Anleitung zu astronomischen Beobachtungen. — Vgl. Naturwissenschaften S. 118.

Naturwissenschaften.

Zoologie der wirbellosen Thiere mit Rücksicht auf vergleichende Anatomie und Entwickelungsgeschichte: Prof. *Claus* täglich (mit Ausnahme d. Sonnabends) 8 Uhr.

Vergleichende Anatomie der Harn- und Geschlechtswerkzeuge: *Derselbe* öffentlich Sonnabend um 8 Uhr.

Zoologisch mikroskopische Uebungen: *Derselbe*, privatissime.

Allgemeine und specielle Botanik: Prof. *Bartling*, 6 St. 7 Uhr. — Ueber die einheimische Flora mit besonderer Berücksichtigung der nutzbaren und schädlichen Gewächse: *Derselbe*, 5 St. 8 Uhr. — Botanische Excursionen veranstaltet *Derselbe* in bisheriger Weise, Demonstrationen im botanischen Garten hält er in passenden Stunden.

Allgemeine und specielle Botanik: Prof. *Grisebach*, 6 St., 7 Uhr, in Verbindung mit Excursionen und Demonstrationen lebender Pflanzen aus dem botanischen Garten. — Ueber Arzneipflanzen: *Derselbe*, Mont. Dienst. Donnerst. und Freit., 8 Uhr. — Praktische Uebungen in der systematischen Botanik: *Derselbe*, unentgeltlich.

Theoretische Mineralogie: Prof. *Sartorius von Waltershausen*, 5 St. 11 Uhr. — Das mineralogische Practicum hält *Derselbe* wie bisher Donnerst. Nachmittag 2—4 Uhr und Sonnab. Vormittag 9—12 Uhr.

Geognosie: Prof. *von Seebach*, 5 St. 8 Uhr, verbunden mit Excursionen.

Ueber die geologisch und technisch wichtigsten Mineralien: *Derselbe*, Dienst. Mittw. u. Donnerst. 12 Uhr, oder zu einer andern passenden Stunde.

Petrographische und palaeontologische Uebungen leitet *Derselbe* privatissime, aber unentgeltlich, in gewohnter Weise. Mit den Fortgeschrittneren wird er Mittw. Abends 6—8 Uhr die *Geologische Gesellschaft* fortsetzen.

Physik, ersten Theil, trägt Prof. *Weber* vor, Montag, Dienstag, Donnerstag und Freitag, 5—6 Uhr.

Optik, einschliesslich der Krystalloptik: Prof. *Listing*, 4 St. um 12 Uhr.

Ueber das Auge und das Mikroskop: Prof. *Listing*, privatissime in bequemer Stunde.

Physikalisches Colloquium: Prof. *Listing*, Sonnab. 10—12 Uhr.

Mathematische Theorie des Magnetismus und der Elektrodynamik: Dr. *Riecke*, Mittw. u. Sonnab. 8 Uhr.

Praktische Uebungen im Physikalischen Institute leitet *Derselbe*.

In dem mathematisch-physikalischen Seminar leitet physikalische Uebungen Prof. *Listing* Mittwoch um 11 Uhr. Vgl. Mathematik S. 117.

Mathematische Physik: vgl. Mathematik S. 116.

Chemie: Prof. *Wöhler*, 6 St. 9 Uhr.

Allgemeine organische Chemie: Prof. *Hübner*, Montag bis Donnerst. 12 Uhr. — Organische Chemie, speciell für Mediciner: Prof. *von Uslar*, in später zu bestimmenden Stunden. — Organische Chemie, speciell für Mediciner: Dr. *Tollens*, 2 St. 8 Uhr.

Organisch-technische Chemie: *Derselbe* 2 St., 8 Uhr.

Einzelne Zweige der theoretischen Chemie: Dr. *Stromeyer*, privatissime.

Die Grundlehren der neueren Chemie: Prof. *Hübner*, Freitag 12 Uhr.

Pharmaceutische Chemie: Prof. *von Uslar*, 4 St., 4 Uhr.

Agriculturchemie, 1. Theil: Prof. *Zöller*, Mont. Dienst. Donnerst. Freit. 10 Uhr.

Agriculturchemie, speciell Ernährung der Culturpflanzen: Dr. *Wagner*, Mont. Dienst. Donnerst. u. Freit. 11 Uhr.

Praktische Uebungen im agriculturchemischen Laboratorium: Prof. *Zöller*, fünfmal 8—12 und 2—4 Uhr.

Die Vorlesungen über Pharmacie und Pharmacognosie s. unter Medicin S. 5. 6.

Die praktisch-chemischen Uebungen und Untersuchungen im akademischen Laboratorium leitet Prof. *Wöhler* in Gemeinschaft mit den Assistenten Prof. *von Uslar*, Prof. *Hübner*, Dr. *Tollens* und Dr. *Jannasch*.

Prof. *Boedeker* leitet die praktisch-chemischen Uebungen im physiologisch-chemischen Laboratorium, täglich (ausser Sonnabend) 8—12 und 3—5 Uhr.

Historische Wissenschaften.

Erdkunde: S. Staatswissenschaft.

Chronologie des Mittelalters: Dr. *Steindorff*, Dienst. u. Freitag 7 Uhr.

Geschichte des Mittelalters: Prof. *Waitz*, 4 St., 8 Uhr.

Geschichte des Zeitalters der Reformation: Dr. *Alfred Stern*, Mont. Dienst. Don. Freit. 3 Uhr.

Neuere Geschichte bis zum Westphälischen Frieden: Prof. *Pauli* 5 St., 5 Uhr.

Geschichte Europas im Zeitalter der Aufklärung und der Revolution: Prof. *Droysen*, 4 St., 4 Uhr.

Englische Verfassungsgeschichte: Prof. *Pauli*, 4 St., 9 Uhr.

Geschichte der englischen Revolution (1625—1660): Dr. *Alfred Stern*, Mont. u. Donnerst. 12 Uhr, öffentlich.

Historische Uebungen leitet Prof. *Waitz*, Freitag 6 Uhr, öffentlich. Historische Uebungen leitet Prof. *Pauli* Mittw. 6 Uhr, öffentlich. Historische Uebungen leitet Prof. *Droysen*, öffentlich. Historische Uebungen leitet Dr. *Steindorff*, einmal, unentgeltlich.

Uebungen in der alten Geschichte leitet Prof. *Wachsmuth*, 1 St., öffentlich.

Kirchengeschichte: s. unter Theologie S. 110.

Staatswissenschaft und Landwirthschaft.

Einleitung in das Studium der Erdkunde und der Statistik: Prof. *Wappäus*, Mittw. und Sonnab. 12 Uhr.

Volkswirthschaftslehre: Prof. *Hanssen*, 4 St., 3 Uhr.

Allgemeine Verwaltungslehre: Dr. *Dede*, Dienst. Donnerst. und Freitag, 12 Uhr.

Ueber öffentliche Armenpflege: Prof. *Hanssen*, Sonnabend 12 Uhr, öffentlich.

Die Handelsverhältnisse im Deutschen Reiche: Dr. *Dede*, Mittw. und Sonnabends 12 Uhr, unentgeltlich.

Kameralistische Uebungen: Prof. *Hanssen*, in noch zu bestimmenden Stunden, privatissime, aber unentgeltlich.

Einleitung in das landwirthschaftliche Studium: Prof. *Drechsler*, 1 St.

Ackerbaulehre, allgemeiner und specieller Theil: *Derselbe*. Mont. Dienst. Donnerst. Freit. 12 Uhr.

Die Lehre von der Organisation der Landgüter (Betriebseinrichtung): Prof. *Griepenkerl*, Mont. Dienst. Donnerst. Freit. 11 Uhr.

Die allgemeine und specielle landwirthschaftliche Thierproductionslehre (Lehre von den Nutzungen, Racen, der Züchtung, Ernährung und Pflege des Pferdes, Rindes, Schafes und Schweines): *Derselbe*, Mont. Dienst. Donnerst. Freit. 8 Uhr.

Die Ackerbausysteme: *Derselbe*, in 2 passenden Stunden, öffentlich.

Im Anschluss an diese Vorlesungen werden Demonstrationen auf benachbarten Landgütern und in Fabriken, sowie praktische Uebungen gehalten werden.

Ueber Heuwerth und Futtermischung: Prof. *Henneberg*, Mittw. 11—1 Uhr, öffentlich.

Landwirthschaftliches Practicum (Uebungen im Anfertigen landwirthsch. Berechnungen; im Gebrauch des Microscops): Prof. *Drechsler*, in noch zu bestimmenden Stunden.

Agriculturchemie und chemische Uebungen: s. Naturwissenschaften S. 118.

Krankheiten der Hausthiere: s. Medicin S. 115.

Literärgeschichte.

Literargeschichte: Prof. *Hoeck*.

Geschichte der Literatur: Prof. *Schweiger*, 4 St.

Geschichte der Philosophie: vgl. Philosophie S. 7.

Geschichte der deutschen Dichtung: Assessor *Tittmann*, 5 St., 9 Uhr.

Vgl. Griech. und lat. Sprache S. 121.

Alterthumskunde.

Römische Staatsalterthümer: Prof. *Wachsmuth*, 5 St. 12 Uhr.

Die Encyclopädie und Methodologie und die Anfangsgründe der griechischen und römischen Archäologie trägt vor Prof. *Wieseler* 4 St. 8 Uhr, und lehrt, nach einer Einleitung über Nutzen und Werth der Münzen für die gesammte Alterthumskunde, die griechische Numismatik, in 2 oder 3 St. 10 Uhr.

Topographie der Stadt Rom: Dr. *Hirschfeld*, 2 St., unentgeltlich.

Im K. archäologischen Seminar wird Prof. *Wieseler* öffentlich die Geschichte der Künste bei den Etruskern nach den Denkmälern behandeln lassen, Sonnab. 12 Uhr.

Die Abhandlungen der Mitglieder wird *Derselbe* privatissime beurtheilen, wie bisher.

Deutsche Alterthümer und Erklärung von Tacitus Germania: Prof. *Waitz*, 4 St., 4 Uhr.

Orientalische Sprachen.

Die Vorlesungen über das A. u. N. Testament s. unter Theologie S. 109.

In der arabischen und äthiopischen Sprache ertheilt Unterricht Prof. *Bertheau*: Dienst. Donnerst. und Freit., 2 Uhr.

Die Elemente der arabischen Sprache lehrt und lässt Wrights arabische Chrestomathie erklären Prof. *de Lagarde*, Mont. Dienst. Mittw. 11 Uhr.

Arnolds arabische Chrestomathie erklärt Prof. *Wüstenfeld*.

In der semitischen Gesellschaft legt Prof. *de Lagarde* rabbinische Schriftstücke zur Erklärung vor, Donnerstag 11 Uhr.

Erklärung von Zamachscharî's AlMufassal (in der arabischen Gesellschaft): Dr. *Hoffmann*, Sonnab. 2 Stunden unentgeltlich.

Grammatik des Sanskrit: Prof. *Benfey*, Mont. Dienst. Mittw. 4 Uhr.

Erklärung von Sanskritgedichten: Prof. *Benfey*, Donnerst. und Freitag 4 Uhr.

Altbaktrisch (Zend): Prof. *Benfey*, Dienst. u. Freit. 5 Uhr.

Griechische und lateinische Sprache.

Die Metra der lyrischen Verse der Griechen erklärt Prof. *von Leutsch*, Mittw. 3—5 Uhr.

Erklärung des Prometheus des Aeschylos: Dr. *Matz*.

Aristophanes Wolken nebst einer Einleitung über die Geschichte der Komödie der Griechen: Dr. *Peipers*, 4 St., 5 Uhr.

Platons Symposion: Prof. *Sauppe*, Mont. Dienst. Donnerst. Freit. 9 Uhr.

Aristoteles Poetik: Dr. *Peipers*, Mittw. u. Sonnabend 9 Uhr, unentgeltlich.

Aristoteles Physik, und Metaphysik: vgl. Philos. S. 116.

Erklärung der Gemäldebeschreibungen der Philostrate: Dr. *Matz*, unentgeltlich Sonnab. 10 Uhr.

Lateinische Grammatik: Prof. *Sauppe*, Mont. Dienst. Donnerst. Freit., 7 Uhr früh.

Die Elegien des Catull und Properz: Prof. *von Leutsch*, 5 St., 10 Uhr.

Erklärung der Historien des Tacitus: Dr. *Hirschfeld*, 3 St.

Germania des Tacitus: s. Alterthumskunde S. 121.

Im K. philologischen Seminar leitet die schriftlichen Arbeiten und Disputationen Prof. *Sauppe*, Mittw. 11 Uhr, lässt den homerischen Hymnus auf Demeter erklären Prof. *Wachsmuth*, Mont. und Dienst., 11 Uhr, lässt Vergils Georgica 4. Buch Prof. *von Leutsch* erklären, Donnerst. und Freit., 11 Uhr, alles öffentlich.

Im philologischen Proseminar leiten die schriftlichen Arbeiten und Disputationen die Proff. *v. Leutsch*, *Sauppe*, und *Wachsmuth*, Mittwoch 9 und 2 Uhr, Sonnabend 11 Uhr; lässt den homerischen Hymnus auf Hermes Prof. *Wachsmuth* Sonnabends 11 Uhr, Vergils Georgika 1. Buch Prof. *von Leutsch* Mittw. 9 Uhr, erklären, alles öffentlich.

Deutsche Sprache.

Ausgewählte Lieder der Edda erklärt Dr. *Wilken*, Mont. und Donnerst. 6 Uhr Abends.

Historische Grammatik der deutschen Sprache: Prof. *Wilh. Müller*, 5 St. 3 Uhr.

Den Parzival Wolframs von Eschenbach erklärt Prof. *Wilh. Müller*, 4 St., 5 Uhr.

Das Gedicht von der Kudrun erläutert Dr. *Wilken*, Mittw. und Sonnabend, 9 Uhr.

Geschichte der deutschen Literatur: vgl. Literärgeschichte S. 120.

Die Uebungen der deutschen Gesellschaft leitet Prof. *Wilh. Müller*.

In seiner altdeutschen Gesellschaft lässt Dr. *Wilken* mit der Erklärung des Erec fortfahren.

Zu einem althochdeutschen Practicum erbietet sich *Derselbe*.

Neuere Sprachen.

Prof. *Th. Müller* wird privatim altfranzösische Grammatik vortragen und das altfr. Rolandslied nach seiner Ausgabe erklären, Mont. Dienst. u. Donnerst. 9 Uhr; Uebungen in der französischen und englischen Sprache veranstaltet er, die ersteren Mont. Dienst. u. Mittw. 12 Uhr, die letzteren Donnerst. Freit. u. Sonnab. 12 Uhr. Oeffentlich lässt er in der romanischen Societät Tasso's Befreites Jerusalem erklären, Freit. 9 Uhr.

Schöne Künste. — Fertigkeiten.

Ueber die Denkmäler der alten christlichen Kunst, hauptsächlich über die römischen Katakomben: Prof. *Unger*, Donnerst. 6 Uhr öffentlich.

Unterricht im Zeichnen, wie im Malen, ertheilt Zeichenmeister *Grape*, und, mit besonderer Rücksicht auf naturhistorische und anatomische Gegenstände, Zeichenlehrer *Peters*.

Geschichte der geistlichen und weltlichen Musik der letzten Jahrhunderte: Prof. *Krüger*, 2 St., 4 Uhr.

Harmonie- und Kompositionslehre, verbunden mit praktischen Uebungen, Musikdirector *Hille*, in passenden Stunden.

Zur Theilnahme an den Uebungen der Singakademie und des Orchesterspielvereins ladet *Derselbe* ein.

Reitunterricht ertheilt in der K. Universitäts-Reitbahn der Univ.-Stallmeister *Schweppe*, Mont., Dienst., Donnerst., Freit., Sonnab., Morgens von 7—11 und Nachm. (ausser Sonnab.) von 4—5 Uhr.

Fechtkunst lehrt der Universitätsfechtmeister *Grünekle*, Tanzkunst der Universitätstanzmeister *Höltzke*.

Oeffentliche Sammlungen.

Die *Universitätsbibliothek* ist geöffnet Montag, Dienstag, Donnerstag und Freitag von 2 bis 3, Mittwoch und Sonnabend von 2 bis 4 Uhr. Zur Ansicht auf der Bibliothek

erhält man jedes Werk, das man in gesetzlicher Weise verlangt; über Bücher, die man geliehen zu bekommen wünscht, giebt man einen Schein, der von einem hiesigen Professor als Bürgen unterschrieben ist.

Das *zoologische* und *ethnographische Museum* ist Dienstag und Freitag von 3—5 Uhr geöffnet.

Die *geognostisch-paläontologische Sammlung* ist Mittw. von 3—5 Uhr geöffnet.

Die *Gemäldesammlung* ist Donnerstag von 11—1 Uhr geöffnet.

Der *botanische Garten* ist, die Sonn- und Festtage ausgenommen, täglich von 5—7 Uhr geöffnet.

Ueber den Besuch und die Benutzung des *Theatrum anatomicum*, des *physiologischen Instituts*, der *pathologischen Sammlung*, der *Sammlung von Maschinen und Modellen*, des *zoologischen* und *ethnographischen Museums*, des *botanischen Gartens*, der *Sternwarte*, des *physikalischen Cabinets*, der *mineralogischen* und der *geognostisch-paläontologischen Sammlung*, der *chemischen Laboratorien*, des *archäologischen Museums*, der *Gemäldesammlung*, der *Bibliothek des k. philologischen Seminars*, des *diplomatischen Apparats*, bestimmen besondere Reglements das Nähere.

Bei dem Logiscommissär, Pedell *Fischer* (Burgstr. 42), können die, welche Wohnungen suchen, sowohl über die Preise, als andere Umstände Auskunft erhalten, und auch im voraus Bestellungen machen.

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

6. März. №. 7. 1872.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 2. März.

Clebsch, über eine Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie. (Erscheint in den Abhandlungen.)
Derselbe legt eine Notiz von Dr. König in Pest vor über eine Abbildung der s. g. Nicht-Euclidischen Geometrie.
Wieseler, über ein bisher nicht richtig erkanntes wichtiges Attribut des Vulcanus.
Derselbe, weitere Mittheilungen über neue Entdeckungen aus Pompeji.
Klein, über einen liniengeometrischen Satz.
Claus, über das Männchen der Gattung Limnadia.

Ueber ein bisher nicht richtig erkanntes wichtiges Attribut des Vulcanus.

Grosse Schwierigkeiten hat den Numismatikern und Archäologen der konische oder halbeiförmige Gegenstand gemacht, welchen man auf dem Revers von Denaren der gens Carisia, deren Avers den Kopf der Juno Moneta zeigt, über Zange, Hammer und Ambos innerhalb eines Olivenkranzes dargestellt findet (Cohen Méd. consul. pl. X, Carisia, n. 7 = Denkm. d. alt.

Kunst II, 5, 64, Annali d. Inst. di corrispond. archeol. Vol. XXXI, 1859, tav. d'agg. Q., n. 1, u. s. w. [1]). Da es bekannt ist, dass mit dem Tempel jener Juno die Officin der Münzprägung verbunden war, so fasste man die Geräthe auf dem Revers als Prägwerkzeuge und den konischen oder halbeiförmigen Gegenstand über dem Ambos als den pileus des Vulcanus, bis die Meinung auftauchte, dass in diesem vielmehr ein Münzstock zu erkennen sei [2]).

1) Von diesem Denar giebt es eine Restitution Trajans, s. Cohen a. a. O. pl. XLIV, n. 27. Denselben Typus, aber eine andere Inschrift auf dem Reverse, nämlich SALVTARIS anstatt T. CARISIVS, enthält eine Münze, die früher unter denen der gens Carisia aufgeführt, von Cohen aber, der sie für falsch hielt (a. a. O. p. 77, Anm. 2) weggelassen wurde. Später hat Cohen seinen Verdacht zurückgenommen und der Duc de Blacas auf seine Veranlassung die Münze unter den médailles autonomes Romaines de l'époque impériale aufgeführt, s. Revue num. Fr. 1862 p. 211, n. 41 u. pl. IX, n. 29 und Cohen Méd. impér. T. VII, Suppl., p. 47 fg., n. 84 zu pl. I n. 13. Mit dem Typus des Reverses dieser Münzen ist schon von Anderen zusammengestellt die Darstellung auf der runden Ara von Vei mit der Inschrift PIETATIS SACRVM, welche Canina als eine Nachbildung des auf Münzen der gentes Aemilia und Scribonia (Cohen Méd. cons. pl. I, Aemil., 10, pl. XXXVI, Scribon., 2) vorkommenden puteal Scribon. oder Libonis erkannt hat, zuletzt abgebildet in den Berichten d. K. Sächs. Ges. d. Wiss. phil.-hist. Cl. 1861, Taf. VIII, n. 4, und besprochen von Benndorf und Schöne »Die ant. Bildw. des Lateranens. Mus.« n. 440, S. 307 fg.

2) Wenn E. Braun in den Ann. d. Inst. arch. XXV, 1853, p. 128 Cavedoni als den Urheber der von ihm als ingegnosa scoperta bezeichneten seltsamen Meinung pries, nach welcher es sich handeln soll um il cappello, il quale tenendo incastrato nella superficie spianata al di sotto il conio della parte antica della moneta da battersi, dovea ricevere il colpo del martello, mercè cui il pezzo di metallo ammanitô veniva segnato di doppia impronta, so

Diese Meinung und zugleich die Ansicht, dass es sich überhaupt um Geräthe zum Münzprägen handele, wurde aber von zwei kundigen Numismatikern, die etwa gleichzeitig und jedenfalls unabhängig von einander sich über die Streitfrage äusserten, J. Friedländer in den Ann. d. Inst. di corr. arch. Vol. XXXI, 1859, p. 407 fg. und Reginald Stuart Poole, in dem Art. Numismatics, Vol. XVI der Encyclopaedia Britannica, 8th. edit., p. 358, zurückwiesen, und zwar, wie ich glaube, unwiderleglich.

Seitdem gilt den Beistimmenden jener Gegenstand wiederum als die Vulcansmütze [3]). Sie und die Geräthe sollen auf den Gott als Vorsteher der Metallarbeit hindeuten.

Mit der eben besprochenen Silbermünze ist zunächst zusammenzustellen die von dem Duc de Blacas in der Rev. numism. Fr., N. S., T. VII, 1862, pl. VII, n. 9 herausgegebene des Augustus. Die Vorderseite derselben zeigt den mit dem

war das ein Irrthum. Dieselbe rührt vielmehr von Riccio her, vergl. Le monete d. ant. famigl. di Roma, sec. ediz., p. 46, XXXIV, n. 3, z. tav. XI, n. 3. Cavedoni hielt sowohl im Bullett. d. Inst. arch. 1846, p. 143 als auch in demselben Bull. 1847, p. 79 an der gewöhnlichen Beziehung auf die Vulcansmütze fest. Uebrigens spricht Riccio, wenigstens a. a. O. nur schlichtweg von conio da monetario, und so auch der ihm zunächst folgende Canina in den Annali d. Inst. XVIII, 1846, p. 246, zu Mon. ined. IV, 36, 11.

3) Dieser Ansicht habe auch ich mich angeschlossen in dem Text der zweiten Bearbeitung des betreffenden Heftes der D. a. K. Ebenso um von Anderen nur Einen zu nennen, der treffliche, leider so früh dahingeschiedene Duc de Blacas, a. a. O. p. 204, Anm. Dagegen hat ein anderer Französischer Numismatiker, H. Cohen, noch im siebenten oder Supplement-Bande der Méd. impér., p. 47, n. 84 den coin sur un enclume anerkannt.

pileus bedeckten Kopf Vulcans umgeben von der Umschrift VOLKANVS VLTOR, die Rückseite, unter der Ueberschrift GENIO P R, dieselben Attribute Vulcans, nur dass an dem konischen Gegenstande der Olivenkranz fehlt, wie auch das Ganze nicht von einem solchen Kranze umgeben ist. Diese Münze bietet einen neuen Beleg dafür, dass es sich bei den Geräthen nicht um solche zum Münzprägen handele. Zugleich widerlegt sie aber auch die herrschende Auffassungsweise des in Rede stehenden konischen Gegenstandes. Wenn es schon an sich bedenklich ist anzunehmen, dass die Kopfbedeckung Vulcans auf den Münzen der gens Carisia mit Zange, Ambos und Hammer als Attribut Vulcans parallel stehe, so widerstrebt der Auffassung jenes Gegenstandes als pileus für die Augustusmünze auch der Umstand, dass der pileus auf dem Averse derselben schon auf dem Kopfe des Gottes erscheint.

Man wird vielleicht einwenden, dass jenes wie dieses doch auch an der sogenannten astrologischen Ara von Gabii im Louvre stattfinde. Allerdings treffen wir hier unter den stellvertretenden Attributen der Monatsgötter nach der allgemeinen Annahme neben der auf den Monat September bezüglichen Wage den pileus Vulcans, dem dieser Monat geheiligt war, und auf dem Kopfe dieses Gottes unzweifelhaft denselben pileus. Aber jene Annahme ist sicherlich irrig. In der besten Abbildung der Gabinischen Ara, der von Bouillon im Musée des Antiques, Vol. I, Vignette des Titelblattes, wo der pileus auf dem Haupte des Gottes die halbkugelförmige Gestalt hat, erscheint der Gegenstand neben der Wage in weit mehr kegelförmiger Gestalt und von Etwas umringelt, das nicht zu einem pileus ge-

hören kann, sondern augenscheinlich nichts Anderes als eine Schlange ist. Diese wird auch von Visconti Mon. Gabini p. 67 z. tav. 16, b, und Mus. Pio-Clem. VII, p. 27, Anm. f ausdrücklich erwähnt, während sowohl St. Victor im Text zu dem Mus. d. Ant. als auch selbst Froehner Mus. impér. du Louvre, Notice de la sculpt. ant. Vol. I, Paris 1869, n. 2, p. 9 fg. kein Wort von ihr sagen.

Auch der betreffende Gegenstand auf dem Reverse der oben erwähnten Augustusmünze hat etwas Eigenthümliches an sich, was gegen die Annahme einer Vulcansmütze spricht: er ist unten ringsherum mit einem vorspringenden Rande versehen. Dieser Rand findet sich aber weder bei dem pileus des Vulcanskopfes auf der Vorderseite der in Rede stehenden Münze noch auf dem entsprechenden bei Blacas a. a. O. pl. IX, n. 36. Allerdings kommt die Vulcansmütze hie und da mit einem Rande vor[4]. Aber eine solche Form wie auf der in Rede stehenden Münze hat sie schwerlich jemals. Nun trifft man einen ähnlichen Rand bei dem der Form nach im Allgemeinen durchaus entsprechenden Gegenstande, welcher als Cortina oder als Omphalos gefasst wird, namentlich auf Münzen der Mamertiner, vergl. Eckhel Num. vet. anecd. I, t. I, n. 11, Millingen, Anc. coins of Gr. cit. and kings pl. II, nr. 13, Jul. Friedländer »Die Oskischen Münzen« Taf. VIII; auf M. von Neapel: Carelli-Cavedoni Ital. vet. num. t. LXXXI, n. 155; auf

4) Vgl. z. B. das zuerst von Winckelmann Mon. ined. n. 82 herausgegebene, zuletzt von Froehner a. a. O. n. 108 verzeichnete Relief des Louvre und die Münze von Lipara bei Ch. Lenormant Nouv. Gal. myth. pl. XVI, n. 11. Aehnlich die Form der Dioskurenmützen, z. B. bei Beulé Monn. d'Athènes p. 168 u. 249.

M. von Nakrasa: Panofka Asklepios u. d. Asklepiaden in den Abhandl. d. Berl. Akad. v. J. 1845, Taf. II, n. 13, und solchen der Arsaciden, vrgl. z. B. Gerhard's Denkm. u. Forsch. 1866, Taf. CCXIII, n. 2.

Dasselbe Wahrzeichen von Delphi und Attribut Apollon's findet sich anderswo von einer Schlange umringelt, z. B. auf dem Revers der Delphischen Münze mit der Umschrift *ΑΜΦΙΚΤΙΟΝΩΝ* in den Rev: numism. Fr., N. S., T. V, 1860, p. XII, n. 8, und auf dem Relief einer Ara in den Ann. d. Inst. Vol. XXII, 1850, t. d'agg. B, wo Apollon das Saiteninstrument auf den Gegenstand stützt.

Hinsichtlich des Omphalos aber habe ich anderswo dargethan, dass er ursprünglich ein Symbol der Hestia, des Heerdfeuers, war; dabei dieselbe Beziehung des gleich oder ähnlich gestalteten Gegenstandes ohne und mit Schlange auch auf bildlichen Darstellungen nachgewiesen, welche weder zu Delphi noch zu Apollon in Beziehung stehen (Ann. d. Inst. Vol. XXIX, 1857, p. 160 fg., N. Jahrb. f. Phil. u. Pädag. Bd. 85, S. 679 fg., Gött. gel. Anz. 1860, Stck 17—20, vgl. Overbeck Ber. d. K. Sächs. Ges. d. Wiss. phil.-hist. Cl. 1864, S. 160 fg.).

Dieser Repräsentant des Heerdfeuers oder des Feuers im Allgemeinen ist ohne Zweifel auch auf den oben berührten Römischen Münzen und an der Gabinischen Ara gemeint[5]. Des Atti-

5) Die Schlange, welche sich auf dem letzterwähnten Denkmale an dem Symbol findet, ist ebenso zu erklären, wie in den anderen Fällen, in welchem sie an diesen vorkommt, nämlich als Darstellung des genius loci. Das Schlangensymbol kommt in specieller Beziehung auf Vulcanus oder Hephästos nicht vor. Wenn Gerhard »Über Agathodämon und Bona Dea« in den Ges. akad. Abhandl.

schen Hephästos und Römischen Vulcanus Beziehung zum Feuer und Heerd ist ja eine so enge (Welcker Griech. Götterlehre I, S. 659 fg., Preller Röm. Mythol. S. 525), dass ihm das Symbol desselben ebensowohl zustand wie der Hestia und Vesta.

Selbstverständlich steht es unserer Auffassungsweise nicht im Mindesten entgegen, dass der konische oder halbeiförmige Gegenstand nicht bloss auf dem älteren Denar der gens Carisia, sondern auch auf der runden Ara von Vei, welche Canina als eine Nachbildung des auf Münzen der gentes Aemilia und Scribonia (Cohen Méd. consul. pl. I, Aemilia, n. 10, pl. XXXVI, Scribonia, n. 2) dargestellten puteal Scribon. oder Libonis erkannt hat, mit einem Olivenzweig geschmückt ist — und zwar auf der Ara von Vei mit einem »deutlich charakterisirten« wie Benndorf und Schöne »Die ant. Bildw. des Lateranens. Mus.« n. 440, S. 307 fg. ausdrücklich hervorheben (während die Bildung beider Kränze auf den Münzen der gens Carisia derartig ist, dass sie

Bd. II, S. 33 u. 57, Anm. 90 dafür »die bekannte Kabirengestalt auf Balearischen Münzen« veranschlagt, so wird ihm sicherlich nicht beigestimmt werden können. Auch die Münzen *ΟΜΟΛΙΕΩΝ*, welche auf dem Avers den Hephästoskopf und auf dem Revers eine Schlange zeigen (Mionnet Descr. d. Méd. T. VI, p. 645, n. 227, Suppl. T. III, p. 286, n. 148 u. 149), bieten keine genügende Bürgschaft. — Weitere Beispiele des Vorkommens des in Rede stehenden Symbols bei Vulcan, die ich für sicher zu halten mich getrauen möchte, kenne ich nicht. Doch verlohnte es sich wohl der Mühe genauer zu ermitteln, ob nicht der konische auf einem Cippus stehende Gegenstand, den man auf dem Revers einer in Paris befindlichen in den Numismata maxim. mod. ex cimeliarcho Ludov. XIV, Eleutherop. 1704, t. 8 und bei Bossière Medaillons du Roi pl. 8 abgebildeten Grossbronze des Antoninus Pius vor dem Gotte gewahrt, hieher gehört.

mehrfach auch als Lorbeerkränze gefasst sind) —, und dass derselbe Kranz an der Mütze Vulcans gefunden wird, nicht bloss auf Münzen von Aesernia (Denkm. d. a. K. II, 18, 191, a), sondern auch auf anderen Römischen Familienmünzen, nämlich der gens Aurelia, vergl. Cohen a. a. O. pl. VII, Aurelia, n. 7 (der fälschlich von einem lorbeerbekränzten Kopfe innerhalb eines Lorbeerkranzes spricht, während schon Ch. Lenormant Nouv. Gal. myth. p. 99 zu pl. XVII, n. 1 die Olivenkränze hervorgehoben hatte). Der Olivenkranz ist ein Attribut Vulcans als Feuergottes. Als solches konnte er ebensowohl an einem Symbol dieses Gottes angebracht werden als an dessen Kopfbedeckung. Um nur ein Beispiel, und zwar das zunächst liegende, zur Vergleichung herbeizuziehen, so findet sich auch der Delphische Omphalos mit dem Apollinischen Lorbeerkranze verziert, vgl. Ch. Lenormant und de Witte El. des mon. céramogr. T. II, pl. 45, Overbeck Galler. her. Bildw. Taf. XXIX, n. 7, besonders Compte rendu de la commiss. impér. arch. de St. Petersb. 1861. pl. IV = Gerhard Denkm. u. Forsch. 1866, Taf. CCXI, auch Denkm. d. a. K. I, 13, 47, wenn Froehner a. a. O. p. 47 zu n. 15 Recht hat.

Ich schliesse mit der Bemerkung, dass in den oben signalisirten Fällen, in welchen das konische Symbol neben Ambos, Zange und Hammer vorkommt, dasselbe nicht sowohl zur allgemeinen Hindeutung auf Vulcanus dient, was in Betreff der Mütze anzunehmen sein würde, sondern dass es ganz speciell das Feuer als solches bezeichnet, dessen sich der Gott ausser jenen Instrumenten bei Ausübung seiner Kunst bedient. So hebt sich hinsichtlich der oben aufgeführten Münze des Augustus das Bedenken, welches auch

über den Umstand rege werden kann, dass, da schon auf dem Avers VOLKANVS VLTOR dargestellt ist, auf dem Revers eine weitere Andeutung des Gottes nicht nöthig war, sondern es genügte, die Mittel und Werkzeuge seines Waltens zur Darstellung zu bringen [6]).

Friedrich Wieseler.

Weitere Mittheilungen über neue Entdeckungen aus Pompeji [1]).

Herr Professor Dr. Gaedechens hat sich nach einem längeren Aufenthalte in Athen wieder nach Unteritalien zurückbegeben, wo er zunächst seine Studien im Museo nazionale zu Neapel fortsetzte, als deren erspriesslichste Frucht ein Verzeichniss der kleinen Bronzen zu verhoffen steht [2]), dann wieder nach Pompeji übersiedelte. Sein zweiter längerer Aufenthalt an diesem Orte fiel grade in eine Zeit, zu welcher derselbe von mehreren hohen Personen besucht und für diese je eine besondere Aufgrabung veranstaltet wurde. Eine derselben

6) Eine andere und spätere Symbolik bezog die Mütze des Hephästos, welche dem entsprechend bemalt wurde, auf den Himmel oder Aether als Sitz des reinsten Feuers und identificirte jenen mit Apollon-Helios, wie schon Gisb. Cuper Harpocr. Traj., ad Rhen. MDCLXXXVII, p. 105 fg. bemerkt hat.

1) S. Nachrichten 1871, S. 290 fg. und S. 567 fg.

2) Unter den betreffenden Bronzen finden sich besonders interessante Stücke. Hr. G. signalisirt als solche beispielsweise: »eine Minerva, die mit den Schlangen ihrer Aegis spielt; einen auf die Kniee gesunkenen Ganymed, durch erhobenen Blick, angstvolle Geberde, Pedum und Phrygische Mütze deutlich bezeichnet, mit Flügeln an den Schultern versehen, endlich einen Meleager, der den Eberkopf eigenthümlich genug auf der Schulter trägt«.

hatte einen besonders glücklichen Erfolg. Ueber sie berichtet uns Gaedechens in einem Briefe vom 24. Februar d. J. Folgendes:

»Am Sonnabend, den 3. Februar, wurde unter Fiorelli's Leitung vor Ihrer K. Hoh. der Frau Grossfürstin Olga von Russland eine Ausgrabung in einem der Häuser einer neu aufgedeckten Strasse vorgenommen, welche, mit der Strada Marina parallellaufend, auf die Langseite des Venustempels mündet. Das in Angriff genommene, durchaus schmucklose Zimmer ist durch ein inmitten des Fussbodens befindliches rundes, 0,16 im Durchmesser haltendes tiefes Loch, welches augenscheinlich bestimmt war, Flüssigkeiten abzuleiten, sowie durch zwei in der nach der Strasse zu gelegenen Wand angebrachte längliche Oeffnungen, die eine einen Meter lang, 0,14 breit, die andere etwas geringer, interressant, die, innerhalb der Mauer bis zu zwei Fensteröffnungen sich fortsetzend, zum Abzug des Rauches gedient zu haben scheinen, so dass dieser Raum wohl für ein Laboratorium oder ein Fabriklocal anzusehen sein wird.

Nach Befreiung des Bodens von Schutt erwies sich die Ausbeute an beweglichen Monumenten aus Bronzen, Terracotten, Knochen als unerwartet reich. Unter den Bronzen war eine von einem Diskus en ronde bosse sich abhebende Büste einer Medusa mit zur Seite gewendetem, schmerzlich bewegtem Gesicht, mit Flügeln und sich ringelnden Schlangen im Haar, durch das die Brust deckende auffallende Attribut einer mit stark vorstehenden Schlangen besetzten Schuppenaegis bemerkenswerth [3]). Die Auffindung eines sehr

3) Die Aegis findet sich bei der Meduse auch auf dem Carneol-Intaglio bei Ch. Lenormant Nouv. Gal. myth. pl. XXXVII, n. 8. (W.)

grossen Steuerruders aus Bronze liess vergeblich auf die Entdeckung einer lebensgrossen Statue einer Venus Pompeiana oder einer Fortuna hoffen.

Am Wichtigsten aber war der Fund eines grossen Fragments einer Marmorplatte, 0,255 breit und 0,4 hoch, welches, vermuthlich von der Mauer gefallen [4]), am Boden gegen die Hinterwand des Zimmers lehnte. Beim Umkehren fand sich auf seiner Vorderseite ein wohl erhaltenes, in Pastellfarben ohne irgend welche eingeritzte Umrisse auf den Stein gemaltes Bild vor, dessen Ausführungsart aus der Betrachtung einiger der neun kleineren, ursprünglich zu dem Monument gehörenden Stücke hervorgeht, die später im Schutt zerstreut gefunden wurden, und weniger günstig als das Hauptstück gefallen und der eindringenden Feuchtigkeit mehr ausgesetzt, auch fast jede Spur der Zeichnung und der Färbung verloren hatten und keine Andeutung irgend welches graffito zeigten, wie solche ebensowenig an den fünf bekannten Zeichnungen auf Marmor aus Herculanum im Museum zu Neapel und auf der ebenfalls bemalten Rückseite eines in derselben Sammlung befindlichen Marmordiskus nachzuweisen ist, vor welchen Bildern allen sich unser Gemälde durch Reichthum der Farben auszeichnet, indem zu dem hauptsächlich verwendeten Gelb noch Carmoisinroth, Cinnober, Braun, Violett und Grün hinzutreten.

Die von einem äussern carmoisinfarbenen und einem inneren cinnoberrothen Rahmen eingefasste Darstellung betrifft das Schicksal der Niobe und ihrer Kinder, wobei der Künstler, der Beschränktheit des ihm gestatteten Raums Rechnung tra-

4) Oder zum Fortschaffen ausgehoben, dabei beschädigt und deshalb fürs Erste zurückgelassen? (W.)

gend, die Katastrophe in zwei Scenen zusammengedrängt hat.

Im Hintergrunde zeigt sich, von links her vorspringend, ein prächtiges Tempelgebäude, durch welches der Maler entweder die Königsburg andeuten wollte, oder, wie eher anzunehmen, die Wendung der Sage im Sinne hatte, wie Niobe, nachdem sie die Statuen der neuen Götter umgestürzt, für sich selbst und für ihre Kinder vom Volke Anbetung begehrt habe. Wir sehen die rechte Seite der Façade, die mit einer mächtigen Dorischen Säule und einem ebenso wuchtigen Eckpfeiler abschliesst, welche beide durch ein gelbes in Carreaux getheiltes niedriges Gitter verbunden sind, und zwischen denen an der Cellawand die Pfosten der Thür sich zeigen. Ueber dem Architrav setzt gleich ein hohes, mehrfach gegliedetes Geison auf. Der Tempel ist etwas schräg gestellt, so dass man, in übrigens ziemlich misslungener Perspective, auch die Langseite desselben sowie den abschliessenden Pfeiler der Rückseite erblickt; an jener ist wieder ein Geländer sichtbar, während oberhalb desselben ein Schild aufgehängt ist, welcher Schmuck so unendlich häufig auf den Wandgemälden der verschütteten Städte wiederkehrt. Eine sich um den oberen Theil des ganzen Baus windende Blumenguirlande deutet wohl auf das Glück und die ungetrübte Freude des Königshauses vor der Katastrophe hin.

So ist denn auch die Königin reich geschmückt, ihr lang herabfallendes blondes Haar ist mit einer weissen Taenia durchflochten, Goldgehänge zieren die Ohrläppchen, an dem vierten Finger der rechten Hand trägt sie einen grossen goldenen Ring. Sie ist mit einem gelben, aermellosen, die rechte Brust freilassenden Unter-

gewand bekleidet und hat darüber einen violetten Mantel geworfen, welcher von der linken Schulter her sich über den Rücken zieht und die rechte Seite nebst dem rechten Arme bedeckt. Sie ist auf den Hülferuf der Kinder aus dem Gebäude getreten, angstvoll und erschreckt hat sie den Kopf zur Rechten erhoben und erkennt das unabwendbare Verderben; ihr mächtiges Scepter entfällt ihrer Linken, und sie umklammert ihre jüngste Tochter, welche sich in ihren Schoss geflüchtet hat und mit den ausgespreizten Fingern der Linken die linke Brust der Mutter fasst. Das Kind ist mit einem gelben, die Arme durchaus blosslassenden Gewand mit rothem Gürtel bekleidet, ein grosser gelber Pfeil ist von rechts her in den rechten Oberschenkel gedrungen. Die Gruppe erinnert lebhaft an die berühmte Florentinische, sonderlich in der Gestalt der Mutter, während die Tochter nicht wie dort gegen die Mutter, sondern dem Beschauer zugewandt ist, und ebenfalls ihr Blick an den tödtenden Göttern haftet.

Auf der rechten Seite des Bildes sucht eine mit gelbem Aermel-Gewande wohlbekleidete Alte, deren Haare unordentlich auf die Schultern niederhängen, mit der nicht sichtbaren Linken den Oberkörper einer älteren Niobetochter aufrecht zu erhalten, während ihre Rechte unter dem rechten Arm derselben weg an deren Mund greift, in den vielleicht der tödtende Pfeil getroffen. Die Jungfrau sinkt sterbend zu Boden, ihr linker Arm fällt schlaff herab. Von ihr sind nur noch der schöne lockenumrahmte Kopf und Theile des Oberkörpers, die mit Spangen geschmückten Arme und die Spuren eines hinten herabhängenden violetten Mantels erhalten. Die Composition ist in ihrer Einfachheit grossartig, die Ausfüh-

rung ungemein zart und fein, der Ausdruck der Gesichter im hohen Grade characteristisch, und ist es sehr zu bedauern, dass trotz aller angewandten Vorsicht die Farben schon jetzt nach kaum drei Wochen nicht unerheblich gelitten haben.

Das betreffende Haus, dessen Atrium mit den anliegenden Zimmern jetzt fast völlig freigelegt ist, gehörte ohne Zweifel zu den ausgedehntesten und am Reichsten ausgeschmückten in Pompei, und kaum vergeht ein Tag der Arbeit ohne interessante Funde. Am 21. Februar wurden in einem der offenen Zimmer des Atriums zwei prächtig erhaltene grössere Gemälde auf gelbem Grunde aufgedeckt, die vortrefflich entworfen und ausgeführt, nur etwas zu grell in der Färbung sind. Das eine stellt die dem Fischfang obliegende Venus dar und unterscheidet sich von den so häufigen Wiederholungen dieses Gegenstandes auf Wandgemälden dadurch, dass Eros nicht der Göttin gegenüber sitzt, sondern, traulich an sie gelehnt, seine Angel neben der ihrigen auswirft. Das andere bringt das in Pompei fast auffallend selten vorkommende Bild des Neptun. Der nackte Körper ist braunroth, wie der der unteritalischen Schiffer und Fischer, eine grüne Chlamys fällt über die linke Schulter, seine Linke hält einen grossen auf die Erde gestützten Dreizack, auf seiner Rechten ruht ein Delphin, links lehnt ein Steuerruder an einem kleinen Steinhaufen. Ein drittes aber sehr versehrtes Gemälde ist gestern (23. Febr.) in demselben Zimmer zum Vorschein gekommen, eine en profil stehende, nach rechts gewandte Leda darstellend, die, sonst nackt, ein rothes Gewand mit der Rechten über den Kopf hält, während der Schwan sich an ihre Brust schmiegt. Mit schwe-

benden Eroten sind die zwei andern Wandfelder geschmückt.

Eine sehr ähnliche Decorationsart, jedoch auf weissem Grunde, zeigt das dem besprochenen gegenüberliegende Zimmer, doch haben die Malereien sehr gelitten; man erkennnt noch einen die Flöte blasenden schwebenden Eros und auf dem Felde daneben eine stehende kräftige männliche Gestalt, die mit der Linken einen grossen kahlen, an der Spitze in zwei kleine Aeste ausgehenden Baumstamm auf die Erde stützt, während in der Rechten ein runder Gegenstand ruht, dessen Entzifferung mir bis jetzt noch nicht gelungen ist.

Weit belangreicher noch war die am 22. gelungene Auffindung eines grösseren Gemäldes (1,15 hoch, 1 Meter breit), in einem gegen das Peristyl sich öffnenden Zimmer desselben Hauses mit der Darstellung der Bestrafung des Aktäon, mit reicher landschaftlicher und architektonischer Staffage, welches sich im Grossen und Ganzen völlig dem bekannten Bilde in der Casa di Sallustio anschliesst und mit diesem auch jene auf dem Berge halb sichtbare Figur mit dem Pedum und dem Gest des erschreckten Staunens gemein hat; doch ist dieselbe hier, sowohl der Hautfarbe wie den Körperformen, ganz besonders aber den völlig deutlich ausgeprägten Brüsten nach zweifellos weiblich und somit einfach als eine Personification des Orts anzusehen, wie demnach auch wohl jener Jüngling auf dem Bilde in dem Hause des Sallust (vgl. O. Jalm Archäol. Beiträge S. 15 Anm. 8, S. 49 Anm. 21). Ist hier somit an keine Darstellung zweier Scenen des Mythos auf einem und demselben Gemälde zu denken, so wird auch die dahin zielende Deutung

des Bildes bei Helbig (Wandgemälde No. 252. Atlas Tafel VIII) gefährdet [5]).

5) An der Auffassung der weiblichen Figur mit dem Pedum auf dem neuentdeckten Wandgemälde als Personification des Orts glaube ich Anstoss nehmen zu müssen. Der Maler hätte, wenn er so etwas gewollt hätte, sicherlich einen männlichen Berggott dargestellt, wie es nach Jahn's Meinung der des Bildes in dem Hause des Sallust gethan hat, oder einen Satyr, auf welchen Stephani Parerg. arch. XIV, aus den Mel. gr.-rom. d. Petersb. Akad. T. I, p. 545, A. 31 die betreffende Figur dieses Bildes deutete. Sollte jene weibliche Figur etwa als die Mutter des Aktäon, Autonoë, zu fassen sein? In diesem Falle würde man anzunehmen haben, dass eine Version der Sage bestand, nach welcher Autonoë in derselben Waldgegend jagte, wie ihr Sohn, sei es nun für sich oder in Gemeinschaft mit dem letzteren, und entweder zufällig oder, den Spuren des Sohnes nachgehend, von welchem sie abgekommen war, ihn in jenem Zustande fand, den die beiden Wandgemälde vor die Augen bringen. Mutter und Sohn waren von Polygnotos in engster Verbindung und wie Jagdgenossen in der Lesche zu Delphi dargestellt, vgl. Pausan. X, 30, 2: *Ἀκταίων ὁ Ἀρισταίου καὶ ἡ τοῦ Ἀκταίωνος μήτηρ, νεβρὸν ἐν ταῖς χερσὶν ἔχοντες ἐλάφου, καὶ ἐπὶ δέρματι ἐλάφου καθεζόμενοι. κύων τε θηρευτικὴ παρακατάκειταί σφισι βίου τοῦ Ἀκταίωνος εἵνεκα καὶ τοῦ ἐς τὴν τελευτὴν τρόπου.* Auf einem unteritalischen Vasenbilde, welches G. Minervini Monum. di Barone tav. XIX, fig. I herausgegeben hat, sieht man Aktäon mit Hörnern über der Stirn in nachdenklicher Haltung auf einem Felsen neben einem Baume sitzen. Zu seinen Füssen steht sein Hund, der zu ihm emporblickt. Ihn umgeben Artemis und Pan. Weiter unten erblickt man zwischen Pan und Aktäon eine Frau, die ihr linkes Bein auf einen Felsblock stützt und mit dem gehobenen rechten Arm eine ausdrucksvolle Geberde macht. Mir kam hinsichtlich dieser Figur gleich der Gedanke, dass sie sich auf Autonoë beziehen möge, und ich sehe, dass derselbe auch von Minervini p. 87 ausgesprochen ist. — Bezüglich der betreffenden männlichen Figur auf dem Gemälde in der Casa di Sallustio, welches auch in den D. a. K. II, 17, 183, a, abgebildet ist, hat sich Helbig in seinem Werke über die Wandgemälde der vom Vesuv verschütteten Städte Campaniens

Ich werde über die gesammten neuesten Entdeckungen in Pompei demnächst eingehend im Bullettino dell' Instituto handeln, die auf Niobe und Aktäon bezüglichen Gemälde aber in den nächsten Puntate des Giornale degli scavi durch den Stich publiciren.

Während das Gros der 150 Köpfe starken Arbeitercolonne jene Ausgrabungen eifrig fortsetzt, hat eine kleinere Abtheilung derselben sich in diesen Tagen mit bestem Erfolge mit der Wiederaufdeckung der Porta Marina beschäftigt.«

n. 249, b, der von K. O. Müller und mir aufgestellten Deutung auf Aktäon angeschlossen.. Die Figur gleicht in der That dem Aussehen und den Attributen, Lagobolon und Leopardenfell, nach dem sichern Aktäon des Bildes so durchaus, dass, wenn dieser nicht gemeint ist, jetzt etwa erlaubt wäre, an einen ihm ganz ähnlichen Jagdgenossen zu denken.

Nachträglich berichtet Hr. Gaedechens noch, dass in dem von ihm besprochenen neu aufgedeckten Hause auch drei Gemälde gefunden seien, die auf schwarzem Grunde in grossen Figuren die Jahreszeiten darstellen; das vierte sei leider vollständig verloren gegangen. Er bemerkt dazu gelegentlich, dass in der Rechten der aus Mus. Borbon. XIV, t. 32, in den D. a. K. II, 75, 962, b wiederholten Figur eines Wandgemäldes in der Casa di Ganimede anstatt der »Honigwabe« vielmehr ein Henkelkörbchen mit weissem, feinen Inhalt, den Helbig a. a. O. S. 975 sehr passend als Ricotta bezeichne, trotz der mangelhaften Erhaltung des Bildes zu erkennen sei. Ebenso stimmt Gaedechens der Ansicht Helbig's bei, dass die betreffende Figur mit dem Lamm — denn dieses stehe sicher — auf den Frühling zu beziehen sei; denn in derselben Weise seien ausser der in den D. a. K. a. a. O. n. 962, a abbildlich mitgetheilten Hore des Winters, auch die des Herbstes, durch reiche Obstattribute, und die des Sommers, durch fast völlige Nacktheit und eine Sichel, genügend characterisirt, zur Darstellung gebracht.

Friedrich Wieseler.

Ueber das Männchen der Gattung *Limnadia*

von C. Claus.

Unter den parthenozenisch sich fortpflanzenden Arthropaden ist nach der Entdeckung der Männchen von Apus und Psyche helix und nachdem die Zugehörigkeit von Solenobia Pineti als Geschlechtsgeneration zu Solenobia Lichenella dargethan wurde, die Branchiopodengattung *Limnadia* als die einzige zurückgeblieben, deren männliche Geschlechtsform seither noch nicht bekannt geworden ist. »Männchen von Limnadia sind auch in neuester Zeit noch nirgend entdeckt worden«, so äussert sich Grube[1]) in seiner monographischen Bearbeitung der Gattungen *Estheria* und *Limnadia*, und zu gleichem Schluss gelangt jüngst v. Siebold in den so eben erschienenen Beiträgen zur Parthenogenesis der Arthropoden nach sorgfältiger Prüfung der auf Limnadien bezüglichen Literatur.

Freilich liegen sorgfältige und umfassende Untersuchungen bislang doch nur über die Europäische *Limnadia Hermanni* vor, welche noch vor wenigen Jahren von Lereboullet zum Gegenstand eingehender Studien über Anatomie und Entwicklung gemacht worden war. Niemals gelang es diesem Forscher in den Süsswasserlachen von Wolfesheim bei Strassburg andere als weibliche Generationen zu beobachten, so dass er in seiner Abhandlung sagen konnte: »Toutes les Limnadies, que j'ai observées étaient des femelles, je n'oserais affirmer que le mâle n'existe pas; mais il est bien étrange que je n'en aie pas rencontré un seul sur plusieurs milliers d'individus qui m'ont passé par les mains«. Dahingegen sind die seitherigen Mit-

1) Vergl. Archiv für Naturgeschichte. 1865.

theilungen über exotische Limnadien nicht nur rücksichtlich der Gestalt und Organisation, sondern auch in Bezug auf das Verhalten der Geschlechtswerkzeuge äusserst dürftig und mangelhaft. Ueberdies konnten dieselben von Keinem der angeführten Autoren vollständige Berücksichtigung erfahren, da die von King (in den Proceed. of the Soc. of van Diemens-Land, Vol. III, Pl. 1. 1855) gelieferte Beschreibung einer bei Sydney lebenden *Limnadia Stanleyana* zur Vergleichung fehlte.

Auch mir war es nicht möglich, diese gewiss nicht allzu eingehende Beschreibung einzusehen, dagegen bot sich mir die erwünschte Gelegenheit die Sydneysche Limnadia, die mit so vielen anderen interessanten Gegenständen der Australischen Fauna durch Herrn Dr. Schütte in Besitz der hies. zoologischen Sammlung gelangten.

Unter 9 vortrefflich conservirten Exemplaren dieser australischen Limnadia fand ich zu meiner grossen Ueberraschung nicht weniger als 6 Männchen, von denen sogar das eine im Akte der Copulation gefangen war und mit Klammerfüssen am Rücken eines weiblichen Exemplares befestigt war. Die Geschlechtsunterschiede entsprechen, wie bei der nahen Verwandtschaft mit *Estheria* nicht anders zu erwarten stand, ziemlich genau den Sexualeigenthümlichkeiten dieser Gattung. In Körper- und Schalenform erscheint das Männchen gestreckter, der gedrungen-ovalen weiblichen Schale gegenüber ist die männliche fast bohnenförmig zu nennen und erinnert beim ersten Anblick an die Afrikanische *Estheria dahalacensis.* Augen und Nackenorgan stimmen in beiden Geschlechtern überein, während die Gestalt der untern Kopfgegend um so auffallender differirt. Beim Männchen erscheint dieser Körpertheil lang und schnauzenförmig verlän-

gert, bei Weibchen ist derselbe kurz, fast abgestutzt und seine Unterseite convex gewölbt. Die sog. Tastantennen sind beim Männchen umfangreicher und am Vorderrande durch Einkerbungen in 7 knotige Erhebungen abgeschnürt, auf dem die winzig kleinen geknöpften Sinnesfaden aufsitzen. Im weiblichen Geschlecht zeigen die beträchtlicht kürzern nahezu keulenförmigen Antennen nur 4 bis 5 kleinere und minder scharf gesonderte Hügel.

Von den 18 Fusspaaren sind die beiden vordern Paare wie bei *Estheria* Greiffüsse, deren Hakenglied durch den Besitz einer grossen gestilten Saugscheibe und zahlreicher kleiner Porentrichter an Einrichtungen erinnert, wie sie so häufig als Haftorgane der Acarinen zur Beobachtung kommen. Auch das dritte Bein zeigt im Allgemeinen die für *Estheria* bekannt gewordenen Abweichungen. Im weiblichen Geschlecht laufen die Branchialanhänge des 9. und 10. Fusspaares in lange Fäden aus.

Indem ich mir eine ausführliche Auseinandersetzung für eine andere Gelegenheit vorbehalte, möchte ich zum Schlusse die Bemerkung beifügen, dass unsere Australische Limnadia der vor Guérin beschriebenen *L. mauritiana* von der Insel Mauritius sehr nahe steht. Möglicherweise handelt es sich sogar um dieselbe Art. Leider ist die Beschreibung Guérins für die Zwecke einer nähern Vergleichung völlig unzureichend, und es geht hier wie in so zahlreichen Fällen schlecht untersuchter Arten: nothwendige Vereinfachungen und für die Kenntniss der geographischen Verbreitung wichtige Reductionen von vermeintlichen Arten auf nahe stehende Varietäten sind durch die flüchtige und mangelhafte Darstellung der Speciesbeschreiber unmöglich gemacht.

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

13. März. № 8. 1872.

Universität.

Benekesche Preisstiftung.

Am 11. März dieses Jahres hielt die philosophische Honoren-Facultät eine öffentliche Sitzung, um statutenmässig die Resultate der ersten Preisbewerbung der Benekeschen Stiftung zur Förderung des Studiums der Philosophie zu verkündigen.

Nachdem der zeitige Decan Prof. G. Waitz einleitend einige Worte über den Professor Friedrich Eduard Beneke, zu dessen Andenken die Stiftung von seinem Bruder, dem im J. 1864 verstorbenen Consistorialrath und Prediger Carl Gustav Beneke gemacht, und, in Anschluss an die in diesen Blättern 1870 Nr. 8 gegebene nähere Darlegung, über den Charakter und die Bedeutung derselben gesagt hatte, erstattete Hofrath Prof. Lotze über die im Jahr 1869 gestellte Aufgabe:

Die Facultät wünscht eine kritische Geschichte der allgemeinen Principien der Mechanik. Sie bezeichnet die Zeit Galilei's als den geeigneten Anfangspunkt der Darstellung und erwartet nur einleitungsweise die Leistungen der antiken Mathematik und Mechanik, nicht die Theorien der speculativen Philosophie des Alterthums,

in der zum Verständniss nöthigen Ausdehnung erörtert zu sehen.

Die geschichtliche Seite der Arbeit würde zu zeigen haben, **wann, von wem** und auf Veranlassung **welcher** bestimmten **Aufgabe** jedes einzelne der wesentlichen Principien der Mechanik zuerst aufgefunden und ausgesprochen, wann, durch wen und auf Veranlassung welcher andern bestimmten Bedürfnisse oder Untersuchungen der ursprüngliche Ausdruck der Theoreme verändert, berichtigt oder früher vereinzelte zu einem allgemeineren Princip zusammengezogen worden sind. Hierbei verlangt die Facultät zwar kein weitläuftiges Eingehen auf die verschiedenen Anwendungen der Principien, legt jedoch Werth auf die Erwähnung der Originalbeispiele, an denen ihre jedesmalige Fassung zuerst erprobt worden ist.

Die kritische Seite der Arbeit, deren äusserliche Trennung von der historischen oder völlige Verschmelzung mit dieser dem Geschmack und Ermessen der Bearbeiter überlassen bleibt, würde zu zeigen haben, wie viel an jedem dieser mechanischen Principien nur ein selbverständlicher logischer Grundsatz, wie viel die zum Gebrauche nothwendige mathematische Formulirung eines solchen Grundsatzes, wie viel dagegen Ausdruck einer allgemein gültig befundenen Erfahrungsthatsache, wie viel endlich nur eine durch den bisherigen Umfang der Erfahrungserkenntniss wahrscheinlich gemachte Annahme ist.

Die Facultät erwartet, dass im geschichtlichen und im kritischen Theile nicht ausschliesslich die Arbeiten der Mathematiker und Physiker, sondern auch der nützliche und schädliche Einfluss der innerhalb des zu schildernden Zeitraums aufgetretenen philosophischen Theorien

berücksigt werde. Um aber den Umfang der Aufgabe zu ermässigen, verzichtet die Facultät auf Berücksichtigung der eigentlich physischen Theorien und Hypothesen über die Constitution der wirklichen Körper und die Natur der wirklichen Ereignisse sowie auf die Erörterung der chemischen Processe, des organischen und des psychischen Lebens; sie überlässt dem Bearbeiter, anhangsweis die Richtungen anzugeben, nach denen bisher die allgemeinen mechanischen Principien Eingang in diese Gebiete gefunden haben. Sie wünscht dagegen die Darstellung so weit fortgeführt, dass sie die neuen Vorstellungsweisen, noch einschliesst, welche über den Begriff von Naturkräften, über ihre Wirkungsweisen und den Uebergang ihrer Wirkungsformen in einander sich hauptsächlich an die Untersuchungen über das mechanische Aequivalent der Wärme geknüpft haben.
den folgenden Bericht:

»1. Die erste Abhandlung, mit dem Motto: est quadam prodire tenus, in Folio, mit Beilage zweier Originalmanuscripte in Quart, ist nach Angabe ihres Verfassers längere Zeit vor der Veröffentlichung unserer Preisaufgabe beendigt gewesen. Es ist deshalb begreiflich, dass eine spätere Umformung der bereits fertigen nicht unternommen worden ist, durch welche sie sich den specielleren von der Facultät ausgesprochenen Wünschen angeschlossen hätte. Wie sie vorliegt, ist sie nicht eine Geschichte der Principien, sondern eine kurze Lehrdarstellung der gegenwärtigen Verfassung der Mechanik, allerdings eingeleitet und durchflochten von kritisch geschichtlichen Reflexionen. In dieser tritt jedoch das historische Element so sehr in den Hintergrund, dass einige Namen nicht einmal genannt werden, deren Trägern die Facultät

eine sehr ausführliche Betrachtung gewidmet zu sehn gehofft hatte. Bei dieser grossen Verschiedenheit des vom Verf. verfolgten Zieles von der Richtung, nach welcher die gestellte Aufgabe hinwies, bleibt der Facultät nur übrig, die schätzbare Arbeit mit Dank für ihre Mittheilung zur Verfügung ihres Einsenders zu stellen.

2. Die zweite Abhandlung, welche, in Folio geschrieben, das Motto trägt: rerum cognoscere caussas, enthält nicht wenige geschichtliche Rückblicke auf die Entstehung der mechanischen Principien. Allein nicht nur in den meisten einzelnen Fällen tritt die Darstellung der früheren Lehren zu sehr gegen die Kritik derselben zurück, sondern auch im Ganzen der Arbeit ist die Rücksicht auf die Geschichte der Mechanik ganz dem Bestreben untergeordnet, im Gegensatze gegen die bisher geltenden Principien neue Grundanschauungen aufzustellen. Im vollen Bewusstsein dieser Tendenz beklagt der Vf. selbst, der Facultät zumuthen zu müssen, alle bisher von ihr anerkannten Principien aufzugeben und dafür diejenigen anzunehmen, welche ihr in dieser Schrift, in zuletzt offen eingestandenem Widerspruch mit der Gesammtheit der Astronomen, Physiker und Mathematiker, angeboten werden. Die Facultät hat sich hierzu nicht entschliessen können. Sie hatte nicht eine neue Mechanik, sondern eine Geschichte der bisher gültigen verlangt. So gross das Interesse sein würde, welches sie einer überzeugenden völligen Reform der Mechanik schenken würde, so kann doch diesmal ihre Beachtung nur denjenigen Arbeiten gelten, welche durch Eingehen auf die wirklich gestellte Aufgabe ein wohlerworbenes Recht der Berücksichtigung besitzen. Mit Bedauern muss daher die Facultät

auch diese Arbeit der Disposition ihres Urhebers überlassen.

3. Ignoratis principiis nulla est scientia, ist der Sinnspruch der dritten Abhandlung, die auf 164 Folioseiten die Geschichte der statischen und die der mechanischen Principien nach einander vorträgt. Für die Darstellung der ganzen hier zu behandelnden Gedankenarbeit ist diese Theilung nicht günstig; innerhalb der einzelnen Abschnitte indessen hat der Verf. mit Sachkenntniss und sehr sorgfältiger Benutzung vieler Quellen der gestellten Aufgabe durch eingehende Beachtung der ursprünglichen Probleme und durch Reproduction der originalen Behandlungsweisen mit grossem Fleisse zu genügen gesucht. Diese anerkennenswerthe Bearbeitungsweise würde in der That den Wünschen der Facultät entsprochen haben, wenn es gelungen wäre, sie mit etwas grösserer Fülle und vollständigerer Beachtung erheblicher Mittelglieder bis auf die neusten Umformungen der mechanischen Vorstellungen auszudehnen. Die Facultät bedauert aufrichtig, wenn der vom Vf. beklagte Mangel freier Arbeitszeit es verschuldet hat, dass einige nicht unerhebliche Gedankenreihen auch der früheren Zeit ausgefallen sind, dass im Fortschritt zu den neueren Zeiten der Massstab der Ausführlichkeit sich merklich verkürzt, dass die reiche analytische Gestaltung der Mechanik durch und nach Lagrange bis auf wenige Andeutungen übergangen, dass endlich in der summarischen Erwähnung der modernsten Theorien die Kritik zu wenig zu Worte gekommen ist. Eine Verfolgung der Beziehungen der metaphysischen Speculation zu den mechanischen Untersuchungen hat der Verfasser unterlassen. Um dieser Unvollständigkeiten willen sieht sich die Facultät leider verhindert, den Fleiss zu belohnen,

welcher unverkennbar auf die ersten Abschnitte der Arbeit verwandt worden ist.

4. Unter dem Motto: je tiefer man eindringt u. s. w. trägt die vierte Abhandlung auf 183 kleinen Quartseiten die Geschichte der mechanichen Principien und ihre kritische Betrachtung in getrennter Darstellung vor. Der geringe Raum, welcher der ersten geschichtlichen Abtheilung gewidmet ist, hat allerdings verhindert, ihr alle wünschenswerthe Fülle und Ausführlichkeit zu geben; sie bietet indessen doch auch in ihrer Kürze einen gewandt und gut geschriebenen, in Bezug auf die Hauptpunkte nicht unvollständigen Ueberblick der Entwicklung der Mechanik, welcher ebensowohl die Sachkenntniss des Verfassers als seine ausgebreitete Bekanntschaft mit den geschichtlichen Quellen beurkundet. Eine Mitberücksichtigung der philosophischen Gedankenkreise, welche die Facultät gewünscht hatte, ist nicht unternommen worden, und vielleicht trägt eben dieser Umstand dazu bei, den zweiten kritischen Theil der Arbeit nicht ganz ebenso befriedigend erscheinen zu lassen. Obgleich der Verf. die verschiedenen Bedeutungen unterscheidet, in welchen von Principien in der Mechanik gesprochen wird, gilt doch in diesem zweiten Theile seine Discussion vorwiegend den gegenseitigen Beziehungen der formalen Principien, welche die Ausgangspunkte für die fruchtbare methodische Behandlung der Probleme bilden, dagegen treten erheblich die sachlichen Grundsätze zurück, welche für jede Methode die Rechtfertigungsgründe einer mechanischen Folgerung überhaupt enthalten. Namentlich einigen modernsten Auffassungsweisen gegenüber beweist der Vf. weniger kritische Zurückhaltung, als ihm eine ausgiebigere Verfolgung dieser allgemeinsten Verhältnisse räthlich gemacht haben

würde. Der hinlänglich bezeugten Sachkenntniss des Verf. wird es jedoch nicht schwer sein, vor einer eventuellen Veröffentlichung auch diesem Theile seiner Arbeit die erwünschte Vertiefung und Vervollkommnung zu geben. Nicht blos in dieser Voraussetzung, sondern auch in Anerkennung des Geleisteten hat die Facultät dieser Abhandlung den zweiten Preis ertheilt.

5. Die fünfte Arbeit mit dem Spruche: s'il y a quelque chose u. s. w. hat der Facultät durch 586 enggeschriebene Folioseiten eine grosse aber angenehm lohnende Mühe verursacht. Sie erregt schon durch ihr ausführliches Inhaltsverzeichniss die Hoffnung, in ihr wirklich alle die Fragen sorgfältig berücksichtigt zu finden, welche das Programm der Facultät der Beachtung der Bearbeiter empfohlen hatte. Die Ausführung bestätigt diese Hoffnung in höchst erfreulicher Weise. Mit vollständigster und freiester Beherrschung der Sache und erstaunlicher Ausdehnung genauester literarischer Kenntniss sind nicht nur alle wesentlichen Punkte erörtert, sondern eine grosse Anzahl kleinerer Discussionen, welche die Facultät nicht für unerlässlich gehalten hätte, aber mit Dank anerkennt, da sie überall dem volleren Verständnisse des Gegenstandes dienen, bezeugen zugleich die grosse Liebe und die Umsicht, mit welcher der Verf. sich in seine Aufgabe vertieft hat. Dem ausserordentlichen so aufgehäuften Stoffe entspricht die Fähigkeit zu seiner Bewältigung. Der Verf. hat Darstellung und Kritik nicht getrennt, sondern folgt, beide vereinigend, dem Verlauf der für die Mechanik sich unterscheidenden Epochen; durch feines Gefühl für klare Vertheilung der Massen ist es ihm gelungen, zugleich auf die ganze geistige Signatur der

Zeitalter, auf den wissenschaftlichen Character der leitenden Persönlichkeiten und auf die fortschreitende Entwicklung der einzelnen Principien und Lehrsätze ganz das belehrende geschichtliche Licht fallen zu lassen, welches die Facultät vor Allem gewünscht hatte. Auch keine der besonderen Forderungen, welche das Programm der Aufgabe ausgesprochen hatte, ist unbeachtet geblieben; die ursprünglichen Aufgaben, an deren Behandlung jedes neue Princip oder Theorem entstand, sind überall mit vollendeter Anschaulichkeit reproducirt und die allmähliche Umformung, die jedes erfahren hat, durch alle Zwischenglieder sorgfältig verfolgt. Die Berührungen der mechanischen Gedanken mit der philosophischen Speculation sind nirgends vermieden; sie sind nicht nur in eigenen Abschnitten entwickelt, sondern der feine philosophische Instinct, der den Verf. auch auf diesem Boden leitet, ist ebenso deutlich in einer grossen Anzahl aufklärender allgemeiner Bemerkungen sichtbar, welche an schicklichen Stellen in die Darstellung der mechanischen Untersuchungen verflochten sind. Den angenehmen Eindruck des Ganzen vollendet eine sehr einfache aber an glücklichen Wendungen reiche Schreibart, die warme Anerkennung jedes Verdienstes, die erklärende Entschuldigung des Misslungenen und die vornehme Schonung, mit der über das Verkehrte hinweggegangen wird. Nur ein Bedenken hegt die Facultät. Der Verf. ist sehr ausführlich in Wiederholungen früher dargestellter Sätze und in Rückverweisungen auf sie; denkt man sich die vorliegende Arbeit als eine Reihe von Vorträgen, so erscheinen diese Recapitulationen als gut berechnete Mittel einer ausgezeichneten Lehrbegabung; auch werden sie im übersichtlichen Druck den Leser nicht ebenso

aufhalten als bei der Durchsicht der Handschrift. Gleichwohl bleibt der Erwägung werth, ob nicht eine grössere Einschränkung hierin wenigstens in der letzten Hälfte der Schrift sich empföhle, wo einestheils ohnehin die Natur der Sache zu häufigen Reproductionen derselben Gedanken unter verschiedenen Formen zwingt, anderntheils Alles, was der Verf. beachtet wünscht, als durch das Frühere bereits hinlänglich eingeschärft gelten kann. Anderes hat die Facultät nicht zu erwähnen; voll Befriedigung, sich als die Veranlasserin dieser schönen Leistung zu wissen, durch welche ihre Aufgabe vollständig gelöst und viele Nebenerwartungen übertroffen sind, zögert sie nicht, dem Verf. den ersten Preis hierdurch öffentlich zuzuerkennen.«

Die Eröffnung der versiegelten Couverts ergab als Verfasser:

der mit dem ersten Preis von 500 Thlr. in Friedrichsd'or gekrönten Arbeit

Dr. E. Dühring, Docenten an der Universität Berlin;

der Arbeit, welcher der zweite Preis von 200 Thlr. in Friedrichsd'or zuerkannt war

Prof. Dr. H. Klein in Dresden.

Hierauf verlas der Decan die beiden in den Jahren 1870 und 1871 verkündeten Aufgaben, über deren Lösung 1873 und 1874 zu berichten ist und die hier unten wiederholt werden mögen, machte zugleich bekannt, dass statutenmässig Anfang April eine weitere Aufgabe für das Jahr 1875 gestellt werden wird, uud sprach die Hoffnung aus, dass alle eine gleiche rege Theilnahme finden mögen, wie sie dem ersten Ausschreiben entgegengekommen ist, und dass so die Stiftung ihren Zweck erfülle, der philosophischen Forschung nach verschiedenen Seiten hin Anregung

14

zu geben und die Erkenntniss der wahren Principien aller Wissenschaft zu fördern.

Preisaufgabe des Jahres 1870.

Speculative Constructionen haben über die Constitution der Materie kein haltbares Ergebniss geliefert. Es bedarf der Induction aus den Resultaten mannigfacher exacter Untersuchungen, um die für die verschiedensten philosophischen Interessen hochwichtigen Fragen zu beantworten, ob die bekannten chemischen Elemente als ursprünglich verschiedene Stoffe oder als irgendwie gebildete Derivationen einer identischen Grundmaterie aufzufassen, und wie in beiden Fällen die Formeln, welche ihre charakteristischen Eigenschaften ausdrücken würden, als Glieder einer Reihe anzuordnen sind. Die wichtigste Vorarbeit hierzu ist die exacte Bestimmung der Atomengewichte dieser Elemente.

Obwohl durch die klassischen Untersuchungen von J. S. Stas die Atomengewichte des Chlors, Broms, Jods, des Kaliums, Natriums, Lithiums, des Bleis, Silbers, des Schwefels und Stickstoffs mit ausserordentlich grosser Schärfe und möglichster Vermeidung constanter Fehler neu ermittelt und die wahrscheinlichen Fehler der Endresultate berechnet sind, so umfassen diese Arbeiten doch nur etwa den sechsten Theil der bis jetzt bekannten Elemente, während die Atomengewichte der übrigen Elemente bald eine grössere bald eine geringere Zuverlässigkeit besitzen.

Die philosophische Honoren-Facultät der Georgia Augusta, der grossen Schwierigkeiten sich bewusst, welche mit diesen Untersuchungen verbunden sind, macht, mit voller Würdigung der eben genannten Arbeiten, zum Gegenstand der

Preisaufgabe der Benekeschen Stiftung für das Jahr 1870 eine neue durchaus exacte Bestimmung der Atomengewichte der Erdmetalle, zugleich mit der Feststellung der Fehlergrenzen der gewonnenen Resultate; sie verlangt ferner eine kritische Bearbeitung des in dieser Beziehung vorhandenen wissenschaftlichen Materials. Die Facultät würde daneben die Frage gern erörtert sehen, ob die Hypothesen von Prout und Dumas zu verwerfen sind, oder ob die noch vorhandenen Unterschiede zwischen jenen Hypothesen und den Beobachtungen durch genügende chemische oder physikalische Gründe sich erklären lassen.

Preisaufgabe des Jahres 1871.

Obgleich bei dem engen Zusammenhange, in den die Griechen Philosophie und Medicin zu bringen gewusst haben, den Alterthumsforschern die grosse Bedeutung, welche für die Erkenntniss der griechischen Philosophie und ihres Entwickelungsganges die Schriften des Hippokrates haben, nicht entgangen ist, so werden doch eingehende Untersuchungen gerade in dieser Hinsicht bis jetzt ganz vermisst — ohne Zweifel wegen der vielen mit dieser Forschung verbundenen Schwierigkeiten. Zu diesen dürfte vor Allem der Umstand gehören, dass unter dem Namen des Hippokrates Werke der verschiedensten Verfasser allmählich vereinigt worden sind, von denen ein Theil neben, ein anderer lange nach diesem, ein dritter vielleicht vor ihm gelebt hat.

Da nun ohne eine gründliche Erörterung der Frage, welche philosophischen Systeme auf die Werke der hippokratischen Sammlung irgend Einfluss ausgeübt haben, ein sicheres Urtheil über die Abfassungszeit dieser Schriften zu gewinnen

nicht möglich ist, da ferner diese Schriften nur nach solchem Urtheil für die Darstellung der philosophischen Systeme zugänglich gemacht und der unbedenklichen Benutzung gewonnen werden, so stellt die philosophische Honoren-Facultät zu Göttingen als Aufgabe:

einen eingehenden und umfassenden Nachweis der philosophischen Systeme, denen die Verfasser der dem Hippokrates zugeschriebenen Schriften folgten, verbunden mit einer Untersuchung über den Gewinn, den die sorgfältige Beachtung jener Systeme sowohl für die Bestimmung der Abfassungszeit der hippokratischen Schriften als auch für die Geschichte der griechischen Philosophie ergiebt.

Die Bearbeitungen dieser Aufgaben sind bis zum 31. August 1872, resp. 1873, dem Decan der philosophischen Facultät zu Göttingen in deutscher, lateinischer, französischer oder englischer Sprache einzureichen. Jede eingesandte Arbeit muss mit einem Motto und mit einem versiegelten den Namen und die Adresse des Verfassers enthaltenden Couvert, welches dasselbe Motto trägt, versehen sein.

Der erste Preis wird mit 500 Thlr. Gold in Friedrichsd'or, der zweite oder das Accessit mit 200 Thlr. Gold in Friedrichsd'or honorirt.

Die Verleihung der Preise findet im Jahre 1873, resp. 1874, am 11. März, dem Geburtstage des Stifters, in öffentlicher Sitzung der Facultät statt.

Gekrönte Arbeiten bleiben unbeschränktes Eigenthum ihrer Verfasser.

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

20. März. № 9. 1872.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Ueber eine reale Abbildung der s. g. Nicht-Euclidischen Geometrie

von

Julius König in Pest.

Herr Felix Klein hat in zwei Aufsätzen »über die sogenannte Nicht-Euclidische Geometrie« (G. A. 1871 Nr. 17 und Math. Ann. IV. 4.) zuerst eine Methode entwickelt, die ziemlich abstracten Untersuchungen der von Hypothesen befreiten Raumlehre [1]), einer sinnlichen Darstellung zugänglich zu machen. Er gelangt daselbst zu dem interessanten Resultate, dass die Geometrie der Räume von constantem Krümmungsmass ein äquivalentes Bild in dem Euclidischen Raume erhält, wenn statt der gewöhnlichen Massbestimmung, die sich auf die imaginären Kreispunkte bezieht, eine allgemeine, auf Flächen 2. Grades begründete angenommen wird.

Um die Untersuchungen der absoluten Raumlehre anschaulich zu gestalten, kann man sich

1) Als absolute Raumlehre möchte ich speciell die Theorie jener m-fachen Mannigfaltigkeiten bezeichnen, die in einem Euclidischen Raume von n Dimensionen darstellbar sind.

auch einer andern Methode bedienen, die ich hier kurz darlegen will.

Nach den Untersuchungen von Riemann und Helmholtz ist die mögliche Verschiedenheit der inneren Raumverhältnisse analytisch dadurch ausgedrückt, dass für jeden Punkt des Raumes eine gewisse Zahl, das s. g. Krümmungsmass existirt, deren Werth eben die Euclidische Hypothese gleich null setzt. Dieselbe kann nun im einfachsten Fall constant sein, dann aber auch eine Function des Ortes werden. Während nun in der Geometrie der Flächen der Werth derselben durch eine dritte Dimension zur Anschauung gebracht wird, fehlt der Anschauung in der Raum-Geometrie jene vierte Dimension, die diess leisten könnte. Nun ist es aber möglich, die Theorie einer Mannigfaltigkeit von 4 Dimensionen geometrisch darzustellen, indem man nach Plücker die grade Linie als Raumelement betrachtet. Dann entspricht jeder graden Linie im Raume ein Punkt in der Ausdehnung von 4 Dimensionen. Bezeichnen wir ein- zwei- und dreifach unendliche Schaaren von Graden, als Linienflächen, Congruenzen und Complexe, wie diess durch Plücker geschehn, so kann man sämmtliche Sätze der Geometrie der Complexe auf Punkträume von drei Dimensionen übertragen, und überzeugt sich leicht, dass die Geometrie eines allgemeinen Complexes durch diese Uebertragung in die eines Raumes von beliebiger Krümmung übergeht.

Diese Theorie ist einer allgemeinen, völlig symmetrischen Darstellung fähig, die auch in Bezug auf geometrische Anschaulichkeit allen Anforderungen genügt. Für jetzt wähle ich eine andere Methode, bei welcher wohl die Symmetrie völlig verloren geht, die aber durch ihre unmit-

telbare geometrische Evidenz dem hier verfolgten Zweck am besten genügt.

Wir wählen zu diesem Behuf im Raume eine Fundamentalebene und ausserhalb dieser eine Grade, die noch der Einfachheit wegen der Ebene parallel sei. Dann bilden alle Graden, welche Punkte der Ebene mit Punkten der Graden verbinden, einen Complex, welcher in der einfachsten Weise als Abbildung des Euclidischen Raumes benutzt werden kann. Wir benutzen hiezu in jener Ebene ein rechtwinkliges Coordinatensystem, ebenso einen Anfangspunkt in der Graden so, dass einem Punkte x, y, z, nun jene Grade des Complexes entspricht, welche den Punkt x, y der Ebene mit dem Punkte z der Graden verbindet. Wir wollen die Verhältnisse dieser Abbildung etwas genauer betrachten:

Einer Graden als einfacher Unendlichkeit von Punkten entspricht eine Linienfläche als einf. Unendl. von Graden und zwar so, dass die Spur derselben auf der Fundamentalebene eine Grade ist. Eine solche Linienfläche soll grade genannt werden.

Der Ebene entspricht ebenso eine Liniencongruenz, die am einfachsten als Schaar ebener Stralenbüschel betrachtet wird, deren Mittelpunkte auf der Fundamentalgraden liegen, und deren Ebenen durch eine entsprechende Schaar paralleler Graden in der Fundamentalebene festgelegt sind.

Die unendlich entfernte Ebene des Raumes wird repräsentirt durch eine der xy-Ebenen parallele Ebene, welche auch durch die Fundamentalgrade geht, indem sie natürlich als zweifach unendliche Schaar von Graden zu verstehen ist. (Grenzebene).

Der Kugel entspricht eine Schaar von Kegelflächen, deren Spitzen auf der z-Graden liegen,

und zwar innerhalb eines Stückes derselben, dessen Streckencoordinaten ihrem absoluten Werthe nach kleiner als der Radius der Kugel R, und deren Leitlinien Kreise in der Fundamentalebene, deren Radius von R bis null abnimmt, während z — vom Zeichen abgesehn — von 0 bis R wächst.

Ebenso wie die Grade nur einen unendlich entfernten Punkt, besitzt die grade Linienfläche nur eine Grade in der Grenzebene. Zwei grade Linienflächen können nur eine gemeinschaftliche Grade besitzen. Liegt diese insbesondere in der Grenzebene, so sollen sie als parallel bezeichnet werden, weil die entsprechenden Graden es sind.

Da ferner die Schaar grader Linienflächen, welche dem ebenen Stralenbüschel entspricht, gegeben ist, ist auch der Begriff des Winkels fixirt, und der Winkel, den zwei grade Linienflächen bilden, kann ebenso gezählt werden, wie der der entsprechenden Graden, da nach der vollen Umdrehung der Graden auch die entspr. Linienfläche in ihre Lage zurückgekehrt ist. Betrachtet man nun ein dem Dreieck analoges Gebilde, so wird auch in diesem die Summe der Winkel gleich zwei Rechten sein.

Lässt man nun die bisher angewendete Fundamental-Ebene und Grade in eine beliebige Fläche und Curve übergehen, und benutzt das eben entwickelte Prinzip der Uebertragung, so erhält man in den entstehenden Complexen die der Anschauung zugängliche Abbildung eines Raumes beliebiger Krümmung.

Die weitere Ausführung soll sich auf den Fall beschränken, wo der Raum eine den Flächen zweiten Grades analoge Krümmung darbietet.

Dann muss die Ebene in eine Fläche, die Grade in eine Curve zweiten Grades übergehn. Noch ist zu bemerken, dass der Analogie nach die Curve in einer Ebene zu liegen hat, die der Tangentialebene des entsprechenden Punktes auf der Fläche parallel ist. Von den 3 Coordinaten bestimmen zwei einen Punkt auf der Fläche, und da dann auch die Lage der Tangentialebene gegeben ist, die Ebene der Fundamentalcurve, wenn ein für allemal festgesetzt, dass diese sich um ihre grosse Axe drehe. Die dritte Coordinate bestimmt einen Punkt der Curve, und damit ist endlich auch die entsprechende Grade gegeben. Man sieht auch, dass ein solcher Complex in einem unendlich kleinen Stück, wo die Fundamental-Fläche und Curve durch ihre Tangentialebene und Tangente vertreten ist, die Eigenschaften des früher behandelten Complexes besitzt, oder in die andere Sprachweise übersetzt: Die Räume sind in ihren kleinsten Theilen eben.

Sei nun zuerst Fläche und Curve im Endlichen geschlossen. Da wir als unendlich ferne oder Grenzelemente jene betrachten, welche die Fundamentalgebilde in ihren unendlich fernen Punkten schneiden, so sieht man unmittelbar, dass unendlich ferne reelle Elemente gar nicht existiren. Der Raum ist ein endlich begrenzter. Die Grade besitzt gar keinen unendlich fernen Punkt, sondern kehrt im Endlichen in sich zurück. Sind insbesondere die beiden Fundamentalgebilde Kugel und Kreis von gleichem Radius, so entspricht der betreffende Complex einem Raum von positivem, constanten Krümmungsmaass. Wird der Radius unendlich gross, während der Mittelpunct immer weiter rückt, so degenerirt der Complex in den

zuerst behandelten, das Abbild des Euclidischen Raumes.

Wählt man als Fundamentalgebilde ein einschaliges Hyperboloid und eine Hyperbel, so erhält man die s. g. hyperbolische Geometrie. Die unendlich fernen Elemente bilden zwei gesonderte zweifach unendliche Mannigfaltigkeiten, d. h. die unendlich enfernte Ebene des Euclidischen Raumes zerfällt in zwei Gebilde. Diesen entsprechen die Graden, welche die beiden unendlich fernen Punkte der Hyperbel mit allen Punkten des Hyperboloids verbindet. Wenn insbesondere Hyperbel und Hyperboloid gleichseitig sind, so erhält man Complexe, denen Räume, entsprechen, wie sie von Bólyai und Lobatschewsky behandelt worden. Es gibt zwei conjugirte Complex- (Raum-) Stücke, so beschaffen, dass man von dem einen nicht in das andere gelangen kann, weil hiezu eine unendlich grosse Strecke durchlaufen werden müsste. Für eine bestimmte Grade ist durch z auch x und y gegeben. Es wird also eine grade Linienfläche zwei Grade enthalten können, welche die Hyperbel in ihren unendlich fernen Punken treffen. In der Uebertragung: Die Grade besitzt zwei gesonderte, unendlich ferne Punkte. Da nun zwei Grade parallel heissen, wenn sie sich in ihren unendlich fernen Punkten schneiden, so gibt es durch einen Punkt zwei Parallelen an jede solche Grade, die sich durch ihre Richtung unterscheiden. Zwei Grade können sich in conjugirten Raumstücken schneiden, das eine derselben existirt für uns nicht; man kann also auch sagen, die Graden schneiden sich gar nicht, obwohl sie in einer Ebene liegen, d. h. obwohl die entsprechenden Linienflächen derselben ebenen Congruenz angehören.

Andere Zusammenstellungen je einer Curve und Fläche zweiten Grades würden andre Complexe geben, auf deren leicht abzuleitende Eigenschaften wir hier nicht mehr eingehn, da das gegebene die beiden bisher behandelten Hauptfälle erschöpft. Was endlich die Winkelsumme des Dreiecks betrifft, so schliesst man daraus, dass alle Graden einer Ebene sich im endlichen schneiden, in bekannter Weise, dass diese grösser als π, und wieder aus dem Satze dass es Grade in einer Ebene gibt die sich gar nicht schneiden, dass diese kleiner als π ist. Aber auch diess kann unmittelbar geometrisch evident gemacht werden. Betrachten wir zu diesem Zweck den Complex, dessen Fundamentalgebilde Kugel und Kreis waren. Nehmen wir zwei grade Linienflächen in demselben. Diese bestimmen eine ebene Congruenz, und alle graden Linienflächen welche in derselben enthalten sind, und zugleich, durch die gemeinsame Grade der beiden ersten gehn, bilden eine einfach unendliche Mannigfaltigkeit, entsprechend dem Stralenbüschel der Punktgeometrie. Der Winkel zweier Linienflächen (Graden) wird also gemessen, wenn man bestimmt, wie oft das zwisehen ihnen enthaltene Stück der Mannigfaltigkeit aufgetragen werden muss, um die ganze zu erzeugen. Nun sieht man, dass diess der Winkel der entsprechenden Spuren auf der Fundamentalfläche ist. Während für Kugel und Kreis die Axen der Fund.-Gebilde alle gleich waren, mögen diese nun bis auf je eine wachsen. Die Kugel geht dann in eine Ellipse über, die Winkel werden immer kleiner, und da, wenn die Axen unendlich gross geworden man als Fundamentalgebilde ein Ebenen- und ein Gradenpaar erhielt, wo die Summe der Winkel π ist, so muss die Winkelsumme im

elliptischen Raume grösser als π sein. Lässt man die Paare zusammmenfallen, und dann in Hyperboloid und Hyperbel übergehn, so wird die Winkelsumme auf diesen immer kleiner, also muss auch die Winkelsumme im hyperbolischen Raume immer kleiner als π sein.

Pest, Januar 1872.

Ueber einen liniengeometrischen Satz.

Von

Felix Klein.

Statt die Coordinaten p_{ik} der geraden Linie im Raume als zweigliedrige Determinanten aus den Coordinaten zweier Puncte oder Ebenen zu definiren, kann man sie bekanntlich auch als selbständige Veränderliche auffassen, welche an eine Bedingungsgleichung zweiten Grades:

$$P = p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0$$

gebunden sind. Bei diesem Ausgangspuncte entsteht die Frage, ob jeder algebraische Linien-Complex durch eine zu $P = 0$ hinzutretende algebraische Gleichung definirt werden kann, oder ob nicht zur reinen Darstellung des Complexes gelegentlich mehrere Gleichungen erforderlich sind. Ich werde nun im Folgenden zeigen: dass allerdings zur Darstellung eines algebraischen Linien-Complexes immer eine zu $P = 0$ hinzutretende Gleichung genügt. Die zum Beweise nothwendigen, sehr einfachen Ueberlegungen, wie sie im Nachstehenden auseinandergesetzt sind, können voraussichtlich überhaupt bei der Untersuchung

analoger Fragen [1]) Anwendung finden und scheinen dadurch ein allgemeineres Interesse zu besitzen.

Rein analytisch gefasst, lautet der zu beweisende Satz folgendermassen: Aus einer allgemeinen [2]) Mannigfaltigkeit von fünf Dimensionen ist eine Mannigfaltigkeit von vier Dimensionen durch eine quadratische Gleichung mit nicht verschwindender Determinante [3])

$$P = 0$$

ausgeschieden. Jede in ihr enthaltene algebraische Mannigfaltigkeit von drei Dimensionen kann durch eine zu $P = 0$ hinzutretende algebraische Gleichung dargestellt werden.«

Statt dieses Satzes mögen wir gleich den folgenden, ihn einschliessenden beweisen:

»Es sei eine Mannigfaltigkeit von n Dimensionen gegeben, wo $n \geqq 4$, und aus ihr eine Mannigfaltigkeit von $(n-1)$ Dimensionen durch eine quadratische Gleichung:

$$P = 0$$

abgeschieden. Jede in der letzteren enthaltene algebraische Mannigfaltigkeit von $(n-2)$ Dimensionen kann durch eine zu $P = 0$ hinzutretende algebraische Gleichung dargestellt werden, falls nicht alle aus den Coëfficienten von P zusammengesetzten fünfreihigen Unterdeterminanten verschwinden.«

1) Ich erinnere hier an eine Betrachtung, welche Cayley gelegentlich anstellt (Quart. Journ. t. III. 1860. p. 234), und die sich darauf bezieht, dass nicht auf allen algebraischen Flächen unvollständige Durchschnittscurven gelegen sein können.

2) Allgemein mag eine Mannigfaltigkeit von n Dimensionen heissen, deren Element von n unabhängig gedachten Parametern abhängt.

3) Diese nähere Bestimmung ist zugefügt, weil sie die quadratische Gleichung, sofern ihre Eigenschaften hier in Betracht kommen, vollständig characterisirt.

Diese Bedingung ist in dem ursprünglich aufgestellten Satze befriedigt, insofern dort die (sechsreihige) Determinante von P selbst nicht verschwindet, um so weniger also ihre fünfreihigen Unterdeterminanten sämmtlich gleich Null sind.

Der Beweis des allgemeinen algebraischen Satzes mag zunächst für $n = 4$ geführt werden, wo also die Bedingung die ist, dass die Determinante von P nicht verschwindet. Bei einem beliebigen n lassen sich hinterher dieselben Betrachtungen anstellen, für $n = 4$ haben wir nur den Vorzug, den Ueberlegungen, wie im Folgenden geschehen soll, ein anschauliches geometrisches Bild zu Grunde legen zu können.

Das einzelne Element der gegebenen Mannigfaltigkeit von vier Dimensionen sei durch die relativen Werthe der fünf homogenen Veränderlichen

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$$

bestimmt. Man wird dieselben immer (und auf unendlich viele Weisen) so wählen können, dass die gegebene quadratische Gleichung $P = 0$ (deren Determinante nicht verschwindet) die folgende Gestalt annimmt:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = 0,$$

oder, indem man

$$x_4 + ix_5 = p, \quad x_4 - ix_5 = q$$

setzt

$$x_1^2 + x_2^2 + x_4^2 + pq = 0.$$

Das Element:

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_4 = 0, p = 0,$$

welches im Folgenden ausgezeichnet werden soll,

ist dabei ein unter den übrigen der Mannigfaltigkeit $P = 0$ angehörigen beliebig ausgewähltes.

In der nunmehr hergestellten Gleichungsform kann die Mannigfaltigkeit $P = 0$ ohne Weiteres auf eine allgemeine Mannigfaltigkeit von drei Dimensionen eindeutig abgebildet werden, ganz dem entsprechend, wie die Abbildung einer Fläche zweiten Grades auf die Ebene durch Projection von einem Puncte der Fläche aus erfolgt. Man setze nämlich, unter

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$$

die homogenen Coordinaten eines Elementes einer allgemeinen Mannigfaltigkeit von drei Dimensionen verstanden:

$$\varrho x_1 = \xi_1 \xi_4, \ \varrho x_2 = \xi_2 \xi_4, \ \varrho x_3 = \xi_3 \xi_4, \ \varrho p = \xi_4 \xi_4,$$
$$\varrho q = -(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2).$$

Die allgemeine Mannigfaltigkeit von drei Dimensionen mag jetzt durch den Punctraum vorgestellt sein, die ξ mögen also homogene Punctcoordinaten bedeuten; dann ist die gegebene Mannigfaltigkeit $P = 0$ durch die vorstehenden Gleichungen eindeutig auf den Punctraum abgebildet. Dabei tritt im Punctraume ein fundamentaler Kegelschnitt auf:

$$\xi_4 = 0, \quad \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 0,$$

dessen Puncten jedesmal ∞^1 Elemente der gegebenen Mannigfaltigkeit $P = 0$ entsprechen. Anderseits sind sämmtliche übrige Puncte der Ebene

$$\xi_4 = 0$$

einem einzigen Elemente der Mannigfaltigkeit $P = 0$, dem Elemente:

$$x_1 = 0, \ x_2 = 0, \ x_3 = 0, \ p = 0$$

zugeordnet, welches, in Analogie mit dem Pro-

jectionspuncte bei der Abbildung der Flächen zweiten Grades, im folgenden das Projectionselement heissen mag.

Fügt man nun zu $P = 0$ eine weitere algebraische Gleichung, die vom $m$ten Grade sein mag;

$$\Omega = 0$$

hinzu, so erhält man im Punctraume als Bild der beiden Gleichungen genügenden Elemente eine Fläche vom Grade $2m$, welche den fundamentalen Kegelschnitt m-fach enthält. Von dieser Bildfläche kann sich gelegentlich, einfach oder mehrfach zählend, die Ebene $\xi_4 = 0$ absondern. Es tritt dies dann und nur dann ein, wenn das Projectionselement selbst der Mannigfaltigkeit $\Omega = 0$, als gewöhnliches oder singuläres Element, angehört. Aber dies können wir immer vermeiden, da es uns ja frei steht, auch wenn die Mannigfaltigkeit $\Omega = 0$ bereits gegeben ist, das Projectionselement unter den Elementen von $P = 0$ zu wählen, wie wir wollen. Es bildet sich also allgemein die Mannigfaltigkeit:

$$P = 0, \qquad \Omega = 0$$

als eine Fläche vom $2m$ten Grade ab, welche den fundamentalen Kegelschnitt zur m-fachen Curve hat, und die Ebene desselben in nicht dem Kegelschnitte angehörigen Puncten nicht trifft.

Es ist aber auch umgekehrt ersichtlich, dass jede Fläche $2m$ten Grades, welche diesen Bedingungen genügt, den vollständigen Durchschnitt von $P = 0$ mit der durch eine hinzutretende Gleichung $\Omega = 0$ vorgestellten Mannigfaltigkeit repräsentirt. Denn die Gleichung einer solchen Fläche muss in jedem Gliede die Ausdrücke ξ_4 und $(\xi_1{}^2 + \xi_2{}^2 + \xi_3{}^2)$ zusammen in der $m$ten

Dimension enthalten. Das einzelne Glied hat also, unter μ eine Zahl $\geqq 0$ und $\leqq m$ verstanden, die folgende Form

$$\xi_4{}^{\mu} \cdot (\xi_1{}^2 + \xi_2{}^2 + \xi_3{}^2)^{m-\mu} \cdot \varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4),$$

wo φ eine homogene Function vom μten Grade der beigefügten Argumente ist. Aber das Product:

$$\xi_4{}^{\mu}\, \varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$$

ist ersichtlich nichts anderes, als eine homogene Function μten Grades der Argumente

$$\xi_1 \xi_4, \quad \xi_2 \xi_4, \quad \xi_3 \xi_4, \quad \xi_4 \xi_4.$$

Jedes Glied der gegebenen Flächen-Gleichung und also die Flächen-Gleichung selbst ist mithin eine homogene Function $m$ten Grades der fünf Argumente:

$$\xi_1 \xi_4, \ \xi_2 \xi_4, \ \xi_3 \xi_4, \ \xi_4 \xi_4, \ (\xi_1{}^2 + \xi_2{}^2 + \xi_3{}^2).$$

Man hat jetzt nur statt dieser Argumente bez.

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3, \quad p, \quad -q$$

zu setzen, um die Gleichung $m$ten Grades

$$\Omega = 0$$

derjenigen Mannigfaltigkeit zu haben, welche mit $P = 0$ zusammen als vollständigen Durchschnitt eine Mannigfaltigkeit bestimmt, deren Bild im Punctraume die ursprünglich gegebene Fläche ist, womit denn die Behauptung, dass die Fläche das Bild eines vollständigen Durchschnittes sei, bewiesen ist.

Eine beliebige in $P = 0$ enthaltene algebraische Mannigfaltigkeit von zwei Dimensionen, wird sich nun aber, — falls wir nicht, was wir immer vermeiden können, das Projectionselement unter ihren Elementen wählen — nicht anders

als eine solche Fläche abbilden können, die den vorgenannten Bedingungen genügt. Denn die Bildfläche muss, der Annahme über die Lage des Projectionselementes entsprechend, die Ebene $\xi_4 = 0$ in keinen anderen Puncten, als in den Puncten des fundamentalen Kegelschnittes treffen, und das ist, weil der Kegelschnit ein irreducibeles Gebilde ist, nicht anders möglich, als wenn sie von gerader Ordnung $= 2m$ ist, und den Kegelschnitt als m-fache Curve enthält.

Hiermit ist denn der Beweis unseres Satzes für $n = 4$ geführt. Seine wesentlichen Momente mögen hier noch ausdrücklich zusammengefasst werden, es sind die folgenden:

1) dass im Punctraume eine irreducibele Fundamental-Curve auftritt,

2) dass eine durch die Fundamentalcurve gelegte Fläche (die Ebene $\xi_4 = 0$) ein einzelnes, beliebig anzunehmendes Element des darzustellenden Gebildes repräsentirt,

3) dass es nur auf das Verhalten der Bildfläche zum Fundamentalkegelschnitte ankommt, ob eine $P = 0$ angehörige Mannigfaltigkeit von zwei Dimensionen als vollständiger Durchschnitt gefasst werden kann. —

Unser Schluss würde dagegen sofort ungültig werden, wenn der Fundamentalkegelschnitt reducibel wäre, also in ein Geradenpaar zerfiele. Denn dann kann man Flächen von der Ordnung $(m' + m'')$ construiren, welche die Geraden bez. m'- und m''-fach enthalten. Dieselben treffen, wie verlangt, die Ebene des Kegelschnittes nur in Puncten des Kegelschnittes, aber vollständige Durchschnitte würden sie erst dann vorstellen, wenn $m' = m''$ wäre.

Dieses Zerfallen des fundamentalen Kegelschnit-

tes tritt nun gerade dann ein, wenn die Determinante der Form P verschwindet, und musste desshalb beim Beweise unseres Satzes diese Möglichkeit ausdrücklich ausgeschlossen werden. In der That, hat P eine verschwindende Determinante (und zunächst noch keine verschwindenden Unterdeterminanten), so kann man ihm die Form geben:

$$0 = x_1^2 + x_2^2 + pq,$$

die Abbildungsfunctionen werden:

$$\varrho x_1 = \xi_1\xi_4, \ \varrho x_2 = \xi_2\xi_4, \ \varrho x_3 = \xi_3\xi_4, \ \varrho p = \xi_4\xi_4,$$
$$\varrho q = -(\xi_1^2 + \xi_2^2),$$

und der fundamentale Kegelschnitt wird:

$$\xi_4 = 0, \ \xi_1^2 + \xi_2^2 = 0,$$

ist also in ein Linienpaar:

$$\xi_4 = 0, \ \xi_1 + i\xi_2 = 0$$
$$\xi_4 = 0, \ \xi_1 - i\xi_2 = 0$$

zerfallen. —

Auf ganz ähnliche Weise, wie nunmehr der Beweis unseres Satzes für $n = 4$ geführt und das Nichtverschwinden der Determinante als nothwendige und hinreichende Bedingung erkannt wurde, erledigt sich die Frage für ein beliebiges n. Ist erstlich $n = 3$, haben wir also eine Fläche zweiten Grades, so entsteht bei der Abbildung derselben auf die allgemeine Mannigfaltigkeit der nächst niederen Dimension ohnehin ein reducibeles Fundamentalgebilde, auch wenn die Determinante der Fläche nicht verschwindet, nämlich ein Punctepaar. Auf Flächen zweiten Grades findet unser Satz desshalb keine Anwendung[1]). Dagegen gilt

1) Ebensowenig gilt der Satz für Kegelschnitte, wie ohne Weiteres ersichtlich.

der Satz allemal, wenn bei der Abbildung der Mannigfaltigkeit $P = 0$ auf die allgemeine Mannigfaltigkeit von $(n - 1)$ Dimensionen — eine Abbildung, die sich immer in gleicher Weise gestaltet — ein irreducibeles Fundamentalgebilde auftritt. Hierzu ist das Nichtverschwinden der aus den Coëfficienten von P gebildeten fünfreihigen Determinanten die nothwendige und hinreichende Bedingung. Als Fundamentalgebilde tritt nämlich eine Mannigfaltigkeit von $(n - 3)$ Dimensionen auf, welche aus einer allgemeinen Mannigfaltigkeit von $(n - 2)$ Dimensionen durch eine quadratische Gleichung abgeschieden wird. Soll das Fundamental-Gebilde zerfallen, so ist dazu das Verschwinden aller aus den Coëfficienten der Gleichung gebildeter dreireihiger Unterdeterminanten die Bedingung; und dies Verschwinden tritt dann und nur dann ein, wenn ein Gleiches bei den fünfreihigen Unterdeterminanten der ursprünglichen quadratischen Gleichung $P = 0$ der Fall war. Hiermit ist denn unser allgemeiner Satz für ein beliebiges n, insbesondere das in ihm enthaltene liniengeometrische Theorem bewiesen.

Ich will hier von der auseinandergesetzten Theorie noch zwei weitere geometrische Anwendungen geben. Die erste bezieht sich wieder auf Liniengeometrie. Man verbinde nämlich mit der quadratischen Gleichung, der die Linien-Coordinaten zu genügen haben:

$$P = 0,$$

eine lineare. So hat man einen linearen Complex, den man auch in der folgenden Weise bestimmen kann. Aus der linearen Gleichung nehme man den Werth einer der Veränderlichen, aus-

gedrückt in den fünf anderen, und substituire ihn in $P = 0$, wodurch eine neue quadratische Gleichung $P' = 0$ entsteht. Der lineare Complex erscheint dann als durch diese Gleichung aus einer allgemeinen Mannigfaltigkeit von vier Dimensionen ausgeschieden. Die Determinante von P' verschwindet nicht, wenn der lineare Complex ein allgemeiner ist; sie verschwindet dann und nur dann, wenn er ein specieller wird [1]). Wir erhalten also den folgenden Satz:

Congruenzen, welche einem allgemeinen linearen Complexe angehören, können als vollständiger Durchschnitt desselben mit einem anderen Complexe dargestellt werden.

Für den speciellen linearen Complex gilt aber der Satz nicht mehr. Ebensowenig wird der analoge Satz gelten, wenn wir zu der Gleichung des linearen Complexes eine weitere lineare Gleichung hinzufügen und die durch beide dargestellte lineare Congruenz in's Auge fassen. Auf einer linearen Congruenz gibt es allerdings Linienflächen, welche sich nicht als vollständiger Durch-

1) Es braucht kaum darauf hingewiesen zu werden, dass die eben vorgetragene Abbildung einer Mannigfaltigkeit $P = 0$ von drei Dimensionen auf den Punctraum mit der Abbildung des linearen Complexes auf den Punctraum gleichbedeutend ist, welche Herr Nöther in diesen Nachrichten 1869. Nr. 15, gegeben und die Herr Lie seinen metrisch-projectivischen Untersuchungen zu Grunde gelegt hat. Ich möchte an dieser Stelle ausdrücklich auf die Abbildung des speciellen linearen Complexes hinweisen, welche die Theorie der Flächen mit einer mehrfachen Geraden mit derjenigen der Flächen mit zwei sich schneidenden mehrfachen Geraden in eine merkwürdige Verbindung setzt, durch welche z. B. die Zeuthen'schen Untersuchungen über die Flächen mit einer mehrfachen Geraden (Math. Ann. t. IV, 1) für die letztgenannten Flächen verwerthet werden können.

schnitt der Congruenz mit einem hinzutretenden Complexe darstellen lassen. Es sind dies diejenigen, welche die Leitlinien der Congruenz ungleich oft enthalten.

Eine zweite geometrische Anwendung bezieht sich auf die Darstellung des Raumpunctes durch die relativen Werthe seiner (mit gewissen Constanten multiplicirten) Potenzen mit Bezug auf fünf Kugeln, welche Herr Lie in Anknüpfung an die Abbildung des linearen Complexes diese Nachrichten 1871 n. 7, p. 208 gegeben hat, während sie Herr Darboux bereits früher (1868) in einer der Pariser Academie eingereichten Abhandlung aufgestellt hatte, die aber noch nicht veröffentlicht ist (cf. Darboux in den Comptes Rendus 1871. Sept.) Der Punct wird durch fünf homogene Coordinaten dargestellt, welche, einzeln gleich Null gesetzt, fünf linear unabhängige Kugeln vorstellen, und diese Coordinaten sind an eine Bedingungsgleichung zweiten Grades mit nicht verschwindender Determinante geknüpft. Der Punctraum ist hiernach das Bild einer Mannigfaltigkeit, die aus einer allgemeinen Mannigfaltigkeit von vier Dimensionen durch diese quadratische Gleichung abgeschieden wird; es liegen also genau die Verhältnisse vor, wie wir sie eben bei dem Beweise des allgemeinen Satzes für $n = 4$ voraussetzten. Dem Projectionselemente entspricht die unendlich ferne Ebene des Punctraumes, der in ihr enthaltene imaginäre Kugelkreis ist der fundamentale Kegelschnitt. Einer Verlegung des Projectionselementes entspricht, wie man leicht sieht, eine Transformation des Punctraum's durch reciproke Radien. Hier erhalten wir also: Jede algebraische Fläche kann vermöge Umformung durch reciproke Radien in eine solche über-

geführt werden, die durch eine Gleichung zwischen den in Rede stehenden Coordinaten rein dargestellt wird. Dagegen würde der entsprechende Satz bei einer analogen Coordinatenbestimmung in der Ebene nicht mehr richtig sein.

Preisaufgaben der Wedekindschen Preisstiftung für Deutsche Geschichte.

Der Verwaltungsrath der Wedekindschen Preisstiftung für Deutsche Geschichte macht hiermit wiederholt die Aufgaben bekannt, welche für den dritten Verwaltungszeitraum, d. h. für die Zeit vom 14. März 1866 bis zum 14. März 1876, von ihm ingemäss der Ordnungen der Stiftung gestellt worden sind.

Für den ersten Preis.

Der Verwaltungsrath verlangt

eine Ausgabe der verschiedenen Texte der lateinischen Chronik des Hermann Korner.

Für den letzten Verwaltungszeitraum war eine Ausgabe der verschiedenen Texte und Bearbeitungen der Chronik des Hermann Korner verlangt und dabei sowohl an die handschriftlich vorhandenen deutschen wie die lateinischen Texte gedacht. Seit dem ersten Ausschreiben dieser Preisaufgabe hat sich aber die Kenntnis des zu benutzenden Materials in überraschender

Weise vermehrt: zu der von der bisherigen Ausgabe der Chronica novella stark abweichenden Wolfenbütteler Handschrift sind zwei andere in Danzig und Linköping gekommen, die jenes Werk in wieder anderer Gestalt darbieten (vgl. Waitz, Ueber Hermann Korner und die Lübecker Chroniken, Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen Bd V, und einzeln Göttingen 1851. 4., Nachrichten 1859 Nr. 5 S. 57 ff. und 1867 Nr. 8 S. 113); ausserdem ist in Wien ein Codex der deutschen Bearbeitung gefunden, der den Korner auch als Verfasser dieser bestimmt erkennen lässt (Peiffer, Germania IX, S. 257 ff.).

Auch jetzt noch würde eine zusammenfassende Bearbeitung aller dieser Texte das Wünschenswertheste sein. Da aber eine solche nicht geringe Schwierigkeiten darbietet, so hat der Verwaltungsrath geglaubt, bei der für den neuen Verwaltungszeitraum beschlossenen Wiederholung die Aufgabe theilen und zunächst eine kritische Edition der verschiedenen Texte der lateinischen Chronik fordern zu sollen.

Hier wird es darauf ankommen zu geben:

1) den in der Wolfenbütteler Handschrift, Helmstad. Nr. 408, enthaltenen Text einer ohne Zweifel dem Korner angehörigen Chronik, als die älteste bekannte Form seiner Arbeit;

2) alles was die Danziger und Linköpinger Handschrift Eigenthümliches darbieten und ausserdem eine Nachweisung ihrer Abweichungen von den andern Texten und unter einander, so dass die allmähliche Entstehung und Bearbeitung des Werkes erhellt;

3) aus der letzten und vollständigsten Bearbeitung der Chronica novella, die bei Eccard (Corpus historicum medii aevi II) gedruckt ist,

wenigstens von der Zeit Karl des Grossen an, alles das was nicht aus Heinrich von Herford entlehnt und in der Ausgabe desselben von Potthast bezeichnet ist, unter Benutzung der vorhandenen Handschriften, namentliich der Lübecker und Lüneburger.

Es wird bemerkt, dass von dem Wolfenbütteler, Danziger und Linköpinger Codex sich genaue Abschriften auf der Göttinger Universitäts-Bibliothek befinden, die von den Bearbeitern werden benutzt werden können, jedoch so dass wenigstens bei der Wolfenbütteler Handschrift auch auf das Original selbst zurückzugehen ist.

In allen Theilen ist besonders auf die von Korner benutzten Quellen Rücksicht zu nehmen, ein genauer Nachweis derselben und der von dem Verfasser vorgenommenen Veränderungen sowohl in der Bezeichnung derselben wie in den Auszügen selbst zu geben. Den Abschnitten von selbständigem Werth sind die nöthigen erläuternden Bemerkungen und ein Hinweis auf andere Darstellungen, namentlich in den verschiedenen Lübecker Chroniken, beizufügen.

Eine Einleitung hat sich näher über die Person des Korner, seine Leistungen als Historiker, seine eigenthümliche Art der Benutzung und Anführung älterer Quellen, den Werth der ihm selbständig angehörigen Nachrichten, sodann über die verschiedenen Bearbeitungen der Chronik, die Handschriften und die bei der Ausgabe befolgten Grundsätze zu verbreiten.

Ein Glossar wird die ungewöhnlichen, dem Verfasser oder seiner Zeit eigenthümlichen Ausdrücke zusammenstellen und erläutern, ein Sachregister später beim Druck hinzuzufügen sein.

Für den zweiten Preis.

Wie viel auch in älterer und neuerer Zeit für die Geschichte der Welfen und namentlich des mächtigsten und bedeutendsten aus dem jüngeren Hause, Heinrich des Löwen, gethan ist, doch fehlt es an einer vollständigen, kritischen, das Einzelne genau feststellenden und zugleich die allgemeine Bedeutung ihrer Wirksamkeit für Deutschland überhaupt und die Gebiete, auf welche sich ihre Herrschaft zunächst bezog, insbesondere in Zusammenhang darlegenden Bearbeitung.

Indem der Verwaltungsrath

eine Geschichte des jüngern Hauses der Welfen von 1055—1235 (von dem ersten Auftreten Welf IV. in Deutschland bis zur Errichtung des Herzogthums Braunschweig-Lüneburg)

ausschreibt, verlangt er sowohl eine ausführliche aus den Quellen geschöpfte Lebensgeschichte der einzelnen Mitglieder der Familie, namentlich der Herzoge, als auch eine genaue Darstellung der Verfassung und der sonstigen Zustände in den Herzogthümern Baiern und Sachsen unter denselben, eine möglichst vollständige Angabe der Besitzungen des Hauses im südlichen wie im nördlichen Deutschland und der Zeit und Weise ihrer Erwerbung, eine Entwicklung aller Verhältnisse, welche zur Vereinigung des zuletzt zum Herzogthum erhobenen Welfischen Territoriums in Niedersachsen geführt haben. Beizugeben sind Regesten der erhaltenen Urkunden, jedenfalls aller durch den Druck bekannt gemachten, so viel es möglich auch solcher die noch nicht veröffentlicht worden sind.

In Beziehung auf die Bewerbung um diese Preise, die Ertheilung des dritten Preises und die Rechte der Preisgewinnenden ist zugleich Folgendes aus den Ordnungen der Stiftung hier zu wiederholen.

1. Ueber die zwei ersten Preise. Die Arbeiten können in deutscher und lateinischer Sprache abgefasst sein.

Jeder dieser Preise beträgt 1000 Thaler in Gold, und muss jedesmal ganz, oder kann gar nicht zuerkannt werden.

2. Ueber den dritten Preis. Für den dritten Preis wird keine bestimmte Aufgabe ausgeschrieben, sondern die Wahl des Stoffs bleibt den Bewerbern nach Massgabe der folgenden Bestimmungen überlassen.

Vorzugsweise verlangt der Stifter für denselben ein deutsch geschriebenes Geschichtsbuch, für welches sorgfältige und geprüfte Zusammenstellung der Thatsachen zur ersten, und Kunst der Darstellung zur zweiten Hauptbedingung gemacht wird. Es ist aber damit nicht bloss eine gut geschriebene historische Abhandlung, sondern ein umfassendes historisches Werk gemeint. Speciallandesgeschichten sind nicht ausgeschlossen, doch werden vorzugsweise nur diejenigen der grösseren (15) deutschen Staaten berücksichtigt.

Zur Erlangung dieses Preises sind die zu diesem Zwecke handschriftlich eingeschickten Arbeiten, und die von dem Einsendungstage des vorigen Verwaltungszeitraums bis zu demselben Tage des laufenden Zeitraums (dem 14. März des zehnten Jahres) gedruckt erschienenen Werke dieser Art gleichmässig berechtigt. Dabei findet indessen der Unterschied statt, dass die ersteren, sofern sie in das Eigenthum der Stiftung über-

gehen, den vollen Preis von 1000 Thalern in Golde, die bereits gedruckten aber, welche Eigenthum des Verfassers bleiben, oder über welche als sein Eigenthum er bereits verfügt hat, die Hälfte des Preises mit 500 Thalern Gold empfangen.

Wenn keine preiswürdigen Schriften der bezeichneten Art vorhanden sind, so darf der dritte Preis angewendet werden, um die Verfasser solcher Schriften zu belohnen, welche durch Entdeckung und zweckmässige Bearbeitung unbekannter oder unbenutzter historischer Quellen, Denkmäler und Urkundensammlungen sich um die deutsche Geschichte verdient gemacht haben. Solchen Schriften darf aber nur die Hälfte des Preises zuerkannt werden.

Es steht Jedem frei, für diesen zweiten Fall Werke der bezeichneten Art auch handschriftlich einzusenden. Mit denselben sind aber ebenfalls alle gleichartigen Werke, welche vor dem Einsendungstage des laufenden Zeitraums gedruckt erschienen sind, für diesen Preis gleich berechtigt. Wird ein handschriftliches Werk gekrönt, so erhält dasselbe einen Preis von 500 Thalern in Gold; gedruckt erschienenen Schriften können nach dem Grade ihrer Bedeutung Preise von 250 Thlr. oder 500 Thlr. Gold zuerkannt werden.

Aus dem Vorstehenden ergiebt sich von selbst, dass der dritte Preis auch Mehreren zugleich zu Theil werden kann.

3. Rechte der Erben der gekrönten Schriftsteller. Sämmtliche Preise fallen, wenn die Verfasser der Preisschriften bereits gestorben sein sollten, deren Erben zu. Der dritte Preis kann auch gedruckten Schriften zuerkannt wer-

den, deren Verfasser schon gestorben sind, und fällt alsdann den Erben derselben zu.

4. Form der Preisschriften und ihrer Einsendung. Bei den handschriftlichen Werken, welche sich um die beiden ersten Preise bewerben, müssen alle äussern Zeichen vermieden werden, an welchen die Verfasser erkannt werden können. Wird ein Verfasser durch eigene Schuld erkannt, so ist seine Schrift zur Preisbewerbung nicht mehr zulässig. Daher wird ein Jeder, der nicht gewiss sein kann, dass seine Handschrift den Preisrichtern unbekannt ist, wohl thun, sein Werk von fremder Hand abschreiben zu lassen. Jede Schrift ist mit einem Sinnspruche zu versehen, und es ist derselben ein versiegelter Zettel beizulegen, auf dessen Aussenseite derselbe Sinnspruch sich findet, während inwendig Name, Stand und Wohnort des Verfassers angegeben sind.

Die handschriftlichen Werke, welche sich um den dritten Preis bewerben, können mit dem Namen des Verfassers versehen, oder ohne denselben eingesandt werden.

Alle diese Schriften müssen im Laufe des neunten Jahres vor dem 14. März, mit welchem das zehnte beginnt (also diesmal bis zum 14. März 1875), dem Director zugesendet sein, welcher auf Verlangen an die Vermittler der Uebersendung Empfangsbescheinigungen auszustellen hat.

5. Ueber Zulässigkeit zur Preisbewerbung. Die Mitglieder der Königlichen Societät, welche nicht zum Preisgerichte gehören, dürfen sich, wie jeder Andere, um alle Preise bewerben. Dagegen leisten die Mitglieder des Preisgerichts auf jede Preisbewerbung Verzicht.

6. Verkündigung der Preise. An dem 14. März, mit welchem der neue Verwaltungszeitraum beginnt, werden in einer Sitzung der Societät die Berichte über die Preisarbeiten vorgetragen, die Zettel, welche zu den gekrönten Schriften gehören, eröffnet, und die Namen der Sieger verkündet, die übrigen Zettel aber verbrannt. Jene Berichte werden in den Nachrichten über die Königliche Societät, dem Beiblatte der Göttingenschen gelehrten Anzeigen, abgedruckt. Die Verfasser der gekrönten Schriften oder deren Erben werden noch besonders durch den Director von den ihnen zugefallenen Preisen benachrichtigt, und können dieselben bei dem letztern gegen Quittung sogleich in Empfang nehmen.

7. Zurückforderung der nicht gekrönten Preisschriften. Die Verfasser der nicht gekrönten Schriften können dieselben unter Angabe ihres Sinnspruches und Einsendung des etwa erhaltenen Empfangsscheines innerhalb eines halben Jahres zurückfordern oder zurückfordern lassen. Sofern sich innerhalb dieses halben Jahres kein Anstand ergiebt, werden dieselben am 14. October von dem Director den zur Empfangnahme bezeichneten Personen portofrei zugesendet. Nach Ablauf dieser Frist ist das Recht zur Zurückforderung erloschen.

8. Druck der Preisschriften. Die handschriftlichen Werke, welche den Preis erhalten haben, gehen in das Eigenthum der Stiftung für diejenige Zeit über, in welcher dasselbe den Verfassern und deren Erben gesetzlich zustehen würde. Der Verwaltungsrath wird dieselben einem Verleger gegen einen Ehrensold überlassen, oder wenn sich ein solcher nicht findet, auf Kosten der Stiftung drucken lassen, und in diesem letztern Falle den Vertrieb einer zuver-

lässigen und thätigen Buchhandlung übertragen. Die Aufsicht über Verlag und Verkauf führt der Director.

Der Ertrag der ersten Auflage, welche ausschliesslich der Freiexemplare höchstens 1000 Exemplare stark sein darf, fällt dem verfügbaren Capitale zu, da der Verfasser den erhaltenen Preis als sein Honorar zu betrachten hat. Wenn indessen jener Ertrag ungewöhnlich gross ist, d. h. wenn derselbe die Druckkosten um das Doppelte übersteigt, so wird die Königliche Societät auf den Vortrag des Verwaltungsrathes erwägen, ob dem Verfasser nicht eine ausserordentliche Vergeltung zuzubilligen sei.

Findet die Königliche Societät fernere Auflagen erforderlich, so wird sie den Verfasser, oder falls derselbe nicht mehr leben sollte, einen anderen dazu geeigneten Gelehrten zur Bearbeitung derselben veranlassen. Der reine Ertrag der neuen Auflagen soll sodann zu ausserordentlichen Bewilligungen für den Verfasser, oder falls derselbe verstorben ist, für dessen Erben, und den neuen Bearbeiter nach einem von der Königlichen Societät festzustellenden Verhältnisse bestimmt werden.

9. Bemerkung auf dem Titel derselben. Jede von der Stiftung gekrönte und herausgegebene Schrift wird auf dem Titel die Bemerkung haben:

> von der Königlichen Societät der Wissenschaften in Göttingen mit einem Wedekindschen Preise gekrönt und herausgegeben.

10. Freiexemplare. Von den Preisschriften, welche die Stiftung herausgiebt, erhalten die Verfasser je 10 Freiexemplare.

Göttingen, den 14. März 1872.

Verzeichniss der bei der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangenen Druckschriften.

Januar 1872.

Fortsetzung.

Proceedings of the London Mathematic Society. Nr. 35. 36. Nr. 40. 8.
Protokolle über die Verhandlungen der allgemeinen Conferenz der Europäischen Gradmessung, abgehalten vom 21—28. September 1871 in Wien.
Protokolle über die Verhandlungen der permanenten Commission der Europäischen Gradmessung, abgehalten am 19. 20. und 21. September und am 28. und 30. September 1871 in Wien. 4.
Nyt Magazin for Naturvidenskaberne. Bd. XVII. Hft. 1. 2. und 3. 4. Bd. XVIII. Heft 1. 2. 3. 4. Christiania 1870. 71. 8.
H. Mohn, det Norske meteorologiskes Institut Storm-Atlas. Ebd. 1870. 4.
Norske Rigsregistranter. 4 Binds. 2. Hefte. Ebd. 1870. 8.
Forhandlinger i Videnskabs-Selskabet i Christiania. Aar 1869 unb 1870. Ebd. 1870. 71. 8.
Norsk meteorologisk Aarbog for 1869. 1870. 3die, 4de Aargang. Ebd. 1870. 71. 4.
Det Kong. Norske Frederiks Universitets Aarsberetning for 1869. 1870. Ebd. 1870. 71. 8.
Salbmagirje. Ebd. 1871. 8.
Beretning om Bodsfaengstets Virksomhed i Aaret 1869. 1870. Ebd. 1870. 71. 8.
A. Blytt, Christiania Omegns Phanerogamer og Bregner. Ebd. 1870. 8.
C. de Seue, Le névé de Instedal et ses glaciers. Ebd. 1870. 4.
G. Armauer Hansen, Bidrag til Lymphekiertlernes normale og pathologiske Anatomi. Ebd. 1871. 4.
Carcinologiske Bidrag til Norges Fauna af G. O. Sars. I. Monographi over de ved Norges Kyster forekommende Mysider. Første Hefte. Ebd. 1870. 4.
Index Scholarum. Ebd. 1871. 4.

(Fortsetzung folgt).

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

27. März. № 10. 1872.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Zur Naturgeschichte der *Phronima sedentaria* Forsk.

von C. Claus.

Eine frühere Mittheilung[1]) über den Fund eines *Phronima*-Tönnchens, dessen gefelderte von scharfkantigen Pentagonen begrenzte Oberfläche auf die Abstammung von *Pyrosoma* hinwies, hat bislang, wahrscheinlich weil die Beobachtung eine vereinzelte geblieben war, keine besondere Berücksichtigung erfahren. Auch hatte ich mich selbst vielleicht zu vorsichtig ausgedrückt in den Worten: »Ebenso sucht sich wahrscheinlich die junge Phronima, wenn sie das Brutlager verlassen hat, eine junge Pyrosoma auf und findet in ihr das Material zur Ernährung und einen Wohnort, den sie selbstständig durch die Schwimmfüsse des Abdomens gleich einem Nachen fortbewegt. Bietet das Tönnchen dem heranwachsenden Thiere keinen Nahrungsstoff mehr, so wird ein grösseres gewählt und zuletzt das Brutgeschäft begonnen.« Und weiterhin »Was man zunächst meiner gewiss nicht

1) C. Claus, Bemerkungen über *Phronima sedentaria* Forsk. und *elongata* n. sp. Zeitschr. für wiss. Zool. tom. XII, 1863.

ganz unbegründeten Zurückführung entgegenhalten wird, ist die Frage, wesshalb sich niemals Ueberreste der Einzelthiere, sondern nur die Reste des gemeinsamen Mantels an dem Tönnchen finden? Ich gebe gern zu, dass der Nachweis der Einzelthiere zu einem endgültigen Beweise nothwendig ist.«

Diesen Nachweis bin ich gegenwärtig zu führen im Stande. Unter einer grossen Zahl von Phronima-Tönnchen, (aus dem Mittelmeer, dem Atlant. Ocean und von der Westküste Südamerikas), die ich seither näher anzusehn Gelegenheit hatte, liessen zwei[1]) Exemplare zum Beweise nichts zu wünschen übrig, indem in ihnen der *Pyrosoma*-Räuber gewissermassen auf der That ertappt war. Beides sind verhältnissmässig kleine Pyrosomen, deren Wandung noch zum Theil in unversehrtem Zustand erhalten ist, während der enge Hohlraum vom Kopf und Leib des »Neapolitano«, um die freundnachbarliche Bezeichnungsweise der Fischer Messina's zu gebrauchen, erfüllt ist. Einzelne Individuen der Tunicatencolonie sind schon zerstört, andere dagegen besonders am geschlossenen Ende noch vollkommen intakt. Hier erscheint die Mantelsubstanz dicker und fester, an den angefressenen Stellen dünner und leichter dehnbar. Kein Zweifel, dass mit dem Ausfressen des Inhalts die Ausweitung und Ausspannung der Mantelsubstanz zu dem tonnenförmigen Gallertgehäuse vollendet wird und schliesslich nur noch warzige oder zipfelförmige Ausläufer (Doliolum papillosum, sulcatum Dell. Chiaj.) der Oberfläche auf den Ursprung hinweisen. Aber auch diese Anhänge gehen später verloren, und es kommt hier und

1) Ich habe inzwischen auch noch ein drittes viel grösseres Exemplar von Pyrosoma mit Phronima aufgefunden.

da sogar zum Durchbruch der ausgefressenen (*D. mediterraneum*) glatten Wandung. Ist nun auch gegen den gegebenen Nachweis kein Widerspruch möglich, so könnte man freilich immer noch der Ansicht sein, dass die Gehäuse nur theilweise von *Pyrosoma* abstammten, der grössere Theil aber verschiedenen andern Thiergattungen entlehnt würde, mit ähnlicher Freiheit »wie die Schneckenschalen von Pagurus.« Der unter Bezugnahme auf diesen Einwurf angestellte Vergleich aller mir zu Gebote stehenden Tönnchen hat mich jedoch bei der grossen Uebereinstimmung des Habitus und der Structur zur Ueberzeugung geführt, dass sie sammt und sonders denselben Ursprung haben und ausschliesslich von ausgefressenen Pyrosomen abzuleiten sind.

»Wie kommt es aber, dass man niemals Männchen in den Tönnchen beobachtet.« Der Beantwortung dieser schon früher von mir aufgeworfenen Frage bin ich nunmehr durch die Entdeckung der männlichen *Phr. sedentaria* ebenfalls näher getreten. Ebenso wenig als Pagenstecher, Keferstein und Ehlers war es mir weder in Nizza noch in Messina geglückt, dem Männchen auf die Spur zu kommen. Auch fand ich die in den Museen aufgestellten Exemplare, woher sie auch stammen mochten, stets weiblichen Geschlechts. Nachdem ich mit der männlichen Form von *Phronimella*[1]) *elongata* bekannt geworden war, die ich zuerst unrichtigerweise mit der Gattung *Phronima* vereinigt hatte, schien mir das Männchen von *Phronima sedentaria* nach seinen sexuellen Differenzen ableitbar. Aber erst kürzlich entdeckte ich dasselbe unter den reichen Schätzen von Hyperiden, die mir Herr Dr. Bolau vom naturh. Museum in Ham-

1) Würzburger naturw. Zeitsch. Tom III, 1862.

burg mit grosser Liberalität zur Bearbeitung anvertraut hatte, und zwar gleich in zahlreichen Exemplaren von zwei verschiedenen Fundorten, aus dem Atl. Ocean und von den Küsten Chilis. Zudem erwies sich das Material aus der letztern Quelle so vollständig, dass ich mit Hülfe desselben zugleich die Entwicklungsweise des männlichen Geschlechts feststellen konnte. Ausser einer sehr grossen Phronima-Mutter von circa 35 Mm. Länge und ihrem geräumigen vollkommen ausgefressenen und ausgedehnten Tönnchen fanden sich als Inhalt desselben Glases 20 verschieden grosse männliche und 12 weibliche Individuen, welche vermuthlich an gleichem Orte zusammen aufgefischt worden waren und wahrscheinlich als Brut des grossen Mutterthieres dem Tönnchen zugehörten. Auffallend würde dann freilich nicht nur der so verschiedene Entwicklungsgrad an den Individuen gleicher Brut, sondern auch das lange Verbleiben derselben im elterlichen Wohnhause erscheinen. Gewöhnlich trifft man allerdings als Inhalt der Phronimabehausung eine zahlreiche aber minder weit in der Entwicklung vorgeschrittene Nachkommenschaft. Sieht man sich dieselbe jedoch näher an, so findet man kleinere und grössere Individuen, die einen zurückgeblieben, die andern merklich vorgeschritten, und wenn auch für gewöhnlich die Auswanderung der Brut frühzeitig erfolgen mag, so wird man es doch von vornherein für wahrscheinlich halten müssen, dass der Zeitpunkt der Zerstreuung mit abhängt von dem frühen oder späten Verbrauch der in der Wandung des Wohnhauses enthaltenen Nahrungsstoffe, dass demnach die Brut ausnahmsweise besonders lange zusammengehalten werden kann.

Die Männchen stimmen in Bau und Gestalt

des Körpers mit den Weibchen überein; was sie aber auf den ersten Blick kenntlich macht, ist die beträchtlich geringere Körpergrösse und die relativ bedeutende Dicke des Abdomens und die Stärke seiner Schwimmfüsse. Dazu kommt die buschige Behaarung der mächtig entwickelten Vorderfühler und der Besitz eines zweiten Antennenpaares, welches dem weiblichen Thiere vollkommen abgeht. Das vordere Fühlerpaar — beim Weibchen schmächtig, ziemlich cylindrisch und nur zweigliedrig — ist im männlichen Geschlecht wie bei allen Hyperidenmännchen als Sitz einer viel reichern feinern Sinnesempfindung mit einer Unzahl feiner Cuticularfäden bedeckt. Diese sitzen vornehmlich auf der Oberfläche des keulenförmigen dicken Schaftes, dessen Innerraum von einem grossen Ganglion erfüllt ist. Offenbar entspricht dieser Abschnitt der gesammten weiblichen Antenne, hat aber oberhalb seines Basalgliedes zwei kurze Mittelglieder zur Sonderung gebracht, die dort fehlen. Die Spitze desselben trägt eine dünne fünfgliedrige Geissel von nur geringer Ausdehnung. Weit länger und gestreckter ist die Geissel des zweiten Antennenpaares. Dieselbe sitzt auf einem dreigliedrigen Schaft auf und besteht aus 12 bis 15 schmalen cylindrischen Gliedern. Mundwerkzeuge und Beine stimmen mit den entsprechenden Gliedmassen des Weibchens überein, die letztern bis auf den Mangel der zum Brutgeschäfte bezüglichen Platten-Anhänge. Nur an der Scheere des 5ten Beinpaares tritt eine auf den ersten Blick bedeutungsvollere Differenz auf, die sich jedoch mit Hülfe der Entwicklungsgeschichte als von untergeordneterm Werthe ergibt. Im Gegensatz zu dem einfachen Zahnfortsatz am Innenrande der weiblichen Greifhand erheben

sich hier vier bis fünf zahnartige Zacken. Vergleicht man jedoch die weiblichen Formen derselben Grösse, so ergibt sich ziemlich genau der nämliche Befund; bei grössern fortpflanzungsfähigen Weibchen treten die zwei äussern Zähne stärker hervor, und die innern erscheinen als Kerben am Innenrande des zweiten Zahn's. So charakterisirt sich rücksichtlich der Scheere die von Guérin als *atlantica* beschriebene Phronima, die nichts als das noch jugendliche kleine Weibchen der *Phr. sedentaria* ist. Bei der grossen ältern Geschlechtsform der Forskalschen *sedentaria* ist der Zahnfortsatz durch Verschmelzung beider Zähne einfach geworden, während die Zahnkerben seines Innenrandes auf die ursprünglich gesonderten Zähne zurückweisen. Auf den Drüsenapparat der Scheere mag hier nur kurz verwiesen sein, er kommt in geicher Weise beim Weibchen vor.

Der männliche Geschlechtsapparat ist durchaus symmetrisch gebaut und besteht jederseits aus einem langgestreckten Hodenschlauche, dessen blindes Ende bis in das vordere Thoracalsegment reicht. Jeder Schlauch bildet während seines Verlaufes 2 mit Samenmasse gefüllte Auftreibungen, von denen die obere gleich auf den kurzen Blindschlauch der Samendrüse folgt, die untere viel grössere am 5ten und 6ten Segmente gelegen, eine bereits fertige Spermatophore einschliesst. Im Anfangstheile des 7ten Thoracalsegmentes biegen die Ausführungsgänge beider Schläuche fast rechtwinklig nach innen um und begegnen sich in einer kurzen conischen Erhebung, an der sie eng aneinander liegend, rechts und links nach aussen münden. Rücksichtlich des Verdauungscanales begnüge ich mich hier auf 2 Paare von kurzen Leberblindschläuchen

hinzuweisen, welche in beiden Geschlechtern am Anfange des weiten und kurzen sackförmigen Magendarms aufsitzen und auffallender Weise den bisherigen Beobachtern entgangen sind.

Von besonderem Interesse erscheint die Beantwortung der Frage nach der allmähligen Ausbildung der sexuellen Differenzen im Verlaufe der jugendlichen Entwicklung. In dieser Hinsicht darf ich an die Beobachtung von unteren Antennenstummeln am Kopfe der jungen *Phronimella elongata* [1]) erinnern. Damals schloss ich auf den spätern Ausfall des untern Paares und glaubte, dass die Phronimiden überhaupt wie die echten Hyperinen ursprünglich die Anlagen beider Antennenpaare besitzen, im weiblichen Geschlechte aber nur die vordern zur weitern Entwicklung brächten. Dieser Schluss war freilich, wie es sich jetzt herausstellt, kein richtiger. Bei Phronima fehlt den geschlechtlich noch indifferenten Jungen das hintere Antennenpaar auch der Anlage nach. An circa 4 Mm. grossen Formen erkennt man jedoch schon an dem Umfang der noch zweigliedrigen Fühleranlagen, ob sie männlich oder weiblich werden. Im ersten Falle nimmt das zweite Glied eine bauchig aufgetriebene Form an und erzeugt an der Spitze einen Fortsatz, an dessen Basis ein Büschel blasser Cuticularfäden sitzt. Später gewahrt man auch etwas oberhalb und vor dem Kieferaugenpaar eine Auftreibung, die sich hornförmig verwölbt und die erste Anlage des 2ten Antennenpaares ist. Schon in diesem Stadium bei einer Grösse von etwa 5 bis 6 Mm. wird die Anlage des Hodens zu den Seiten des Magens bemerkbar. Der Umfang der Vorderantenne nimmt nun rasch weiter

1) Zeitsch. für wiss. Zool. Tom XII, pag. 196 taf. XIX fig. 7 ab.

zu, und es bildet sich an der Spitze des nunmehr durch Differenzirung eines Zwischengliedes 3gliedrig gewordenen Schaftes ein kurzer hakenförmig gebogener 3gliedriger Ausläufer, die Anlage der Geissel. Ebenso gliedert sich die hintere Antenne in einen dreigliedrigen Schaft und einen langen schlauchförmigen Ausläufer, dessen Gliederung von der Spitze an beginnt. In solcher Gestalt treten uns die jungen Männchen vor der Geschlechtsreife von etwa 8 bis 9 Mm. Länge entgegen. Erst im letzten Stadium — nach vorausgegangener Häutung — entfalten sich die Fühlhörner mit ihrem ganzen Reichthum von Sinnesfäden und in der ganzen Länge und Gliederung ihrer Geisseln. Ganz analog verhält sich auch die Entwicklung der männlichen *Phronimella elongata*, deren Fühlhörner weit länger sind und aus einer viel grössern Gliederzahl bestehn. Die von mir früher als Männchen abgebildete Form (Würzb. naturw. Zeitschr. tom. III, Taf. VI, fig. 11) ist das noch jugendliche Männchen vor dem Eintritt der Geschlechtsreife und vor der Entfaltung der Antennen. Die als indifferente Jugendzustände aufgefassten Formen aber beziehen sich auf ganz jugendliche Männchen.

Sämmtliche von mir verglichenen Exemplare gehören zu derselben Art und weichen nur nach Körpergrösse und Scheerenform des fünften Fusspaares in allen möglichen Uebergängen ab. Mit Rücksicht auf die letztere habe ich schon früher gezeigt, dass die Scheere der kleinen *Phr. atlantica* Guérin's durch Verschmelzung der beiden Zahnerhebungen am Innenrande der Scheerenband in die Scheerenform der *Ph. sedentaria* übergeht, welche den vorgeschrittenern Alterszustand der ebenfalls schon geschlechtsreifen

Phr. atlantica vorstellt. Auch Risso's *Phr. custos* fällt als eine durch etwas bedeutendere Stärke der Scheerenhand ausgezeichnete Form mit *Phr. sedentaria* zusammen. Neuerdings hat Sp. Bate die von White als *Phr. atlantica* aufgeführte Varietät von Borneo als *Phr. Bornensis* gesondert, obwohl er keine Abweichung von Belang im Vergleich zu *Phr. custos* und *sedentaria* auffinden konnte und desshalb auch schliesslich die Ansicht ausspricht, alle drei Formen möchten nur Varietäten derselben Species sein. Dies ist in der That auch ganz bestimmt der Fall, nur hätte Sp. Bate bei solcher Einsicht logischer verfahren, sich die Mühe der Beschreibung und der Wissenschaft den Namen einer neuen unhaltbaren Species zu ersparen. Alle vier vermeintliche Arten fallen demnach zusammen und gehen in der *Ph. sedentaria* Forsk. auf, einer Art, welche in den Meeren der östlichen und westlichen Halbkugel ohne beträchtlichere Variationen weit verbreitet ist.

Die interessante aus Altersstufen ableitbare Verschiedenheit der Scheerenhand, welche zur Aufstellung mehrerer Arten Veranlassung gab, sowie die Abweichung in der Gestalt der männlichen Greifhand — Alles auf Entwicklungsphasen zurückführbare Modificationen —, gibt mir von Neuem Anlass, auf die von Fr. Müller beschriebenen zweierlei Scheeren der Männchen von *Orchestia Darwinii*, die wie so manches Andere zu voreiligen Schlussfolgerungen benutzt worden sind, als wahrscheinlich in ähnlichem Zusammenhange erklärbar hinzuweisen.

Verzeichniss der bei der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangenen Druckschriften.

Januar 1872.

Fortsetzung.

Prof. Th. Kjerulf, om skuringsmaerker glacial formationen og terasser samt om grundfjeldets og sparagmitfjeldets maegtighed i Norge. I Grundfjeldet. Ebd. 1871. 8.

Transactions of the New York State Agricultural Society. Vol. XXVII. 1867. Part. 1. 2. Albany 1868. 8.

New York Insurance Report. 1867 — 1869. Part 1. 2. Ebd. 1867. 69. 8.

Eleventh Annual Report of the Chamber of Commerce of the State of New York. For the year 1868 — 69. New York 1869. 8.

Annual Report of the Adjutant General of the State of New-York. Volume I. Albany 1865. 8.

Fourth and fifth Annual Report of the Metropolitan Fire Department of the city of New-York. New-York 1869. 70. 8.

Annual Message of the Governor of the State of New-York. Albany 1870. 8.

Lewis, State Rights: a photograph from the ruins of ancient Greece. Ebd. 1865. 8.

Legislative Honors to the Memory of President Lincoln. Albany 1865. 8.

Edwin F. Johnson, Railroad to the Pacific. Northern Route. 2. Edit. New-York 1854. 8.

The fifth, seventh and the tenth Annual Report of the Trustees of the Cooper Union. Ebd. 1864. 66. 69. 8.

The twenty-fifth and twenty sixth, Annual Report of the New-York Association for improving the condition of the poor 1868. 69. Ebd. 1868. 69. 8.

Annual Report of the General Agent for the relief of sick and wounded soldiers of the State of New-York. Albany 1865. 8.

Journal of the American Geographical and Statistical Society 1870. Vol. II. Part 2. New-York 1870. 8.

Twenty-second Annual Report of the Regents of the University of the State of New-York. Albany 1869. 8.
Report of the State of the New-York Hospital and Bloomingdale Asylum for the year 1869. New-York. 1870. 8.
Introductory Report of the Commissioner of Patents for 1863. 8.
A. B. Conger, Rinderpest. Albany 1867. 8.
Trow's New-York City Directory complied by H. Wilson. LXXXI. For the year ending May I, 1868. New-York. 8.
Wilson's Business Directory of New-York City. Ebd. 1867. 8.
Manual for the use of the Legislature of the State of New York 1870. Albany 1870. 8.
Amended Charter of the City of Albany 1870. Ebd. 1870. 8.
Extra American Exchange and Review. From the Insurance Department of March 1870. Philadelphia. 8.
Annual Report of the State Geologist of New Jersey. For 1869. Trenton. N. J. 1870. 8.
John Swinburne, compound and comminuted gunshot fractures of the thigh etc. Albany 1864. 8.
Rules and regulations of the Green Wood Cemetery 1870. New-York 1870. 8.
Proceedings of the second Annual Meeting of the National Board of Trade, held in Richmond. December 1869. Boston 1870. 8.
C. H. Hitchcock, first Annual Report upon the Geology and Mineralogy of the State of New Hampshire. Manchester 1869. 8.
Monthly Report of the Deputy Special Commissioner of the revenue in charge of the Bureau of Statistics. Treasury Department. 4.
American Society of Civil Engineers. Nr. XIV. Transactions. 8.
Astronomical Observations and Researches made at Dunsink the Observatory of Trinity College Dublin. First Part. Dublin 1870. 4.

Februar 1872.

Nature, 118. 119. 120. 121.
Memoirs of the Royal Astronomical Society. Part I. Vol. XXXIX. 1870—1871. London 1871. 4.
A general index to the first thirty-eight volumes of the

memoirs of the Royal Astronomical Society. London 1871. 8.

Monthly notices of the Royal Astronomical Society. Vol. XXXI. Ebd. 1871. 8.

R. Lipschity Untersuchung eines Problems der Variationsrechnung in welchem das Problem der Mechanik enthalten ist. 4.

Sitzungsberichte der physicalisch-medicinischen Societät zu Erlangen. Hft. 3. Mai 1870 — August 1871. Erlangen 1871. 8.

Neues Lausitzisches Magazin herausg. von Prof. Dr. E. E. Struve. Bd. 48. Zweites (Doppel-) Heft. Görlitz 1871. 8.

La politique commerciale de la France, ou le traité de 1860 avec l'Angleterre, traduit de l'anglais par M. R. B. Murray. Paris. 8.

XXVIII u. XXIX Jahresbericht der Pollichia, eines naturwissenschaftlichen Vereins der Rheinpfalz. Dürkheim a. d. H. 1871. 8.

Annales de l'Observatoire Royal de Bruxelles. Bogen 7. 1871.

Bulletin de l'Académie R. des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique. 41e année, 2e série. T. 33. Nr. 1. Bruxelles 1872. 8.

Mémoires de la Societé des Sciences Physiques et naturelles de Bordeaux. T. VIII. 2me cahier. Paris. Bordeaux 1872. 8.

Mémoires de l'Académie R. de St. Pétersbourg VIIe série. T. XVI. Nr. 9—14. 1871. — T. XVII. Nr. 1—10. 1871. St. Pétersbourg 1870, 71. 4.

Bulletin de l'Académie R. de St. Pétersbourg. T. XVI. Nr. 2—6. 4.

Observatorio astronomico Arjentino. Discursor sobre su Inauguracion verificada el 24 de Octubre de 1871. 4. Buenos Aires 1872.

Monatsberichte der Berliner Academie d. W. December 1871.

Der zoologische Garten. 1871. Nr. 7—12.

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

15. Mai. №. 11. 1872.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 11. Mai.

Marx, über das Vorkommen und die Beurtheilung der Hundswuth in alter Zeit. (Erscheint in den Abhandlungen.)
Claus, zur Kenntniss vom Bau und der Entwickelung der Apus- und Branchibus-Larven.
Stern, über den Werth einiger Summen. (Erscheint in den Abhandlungen.)
Wieseler, über die Quadriga oberhalb des Giebels des Capitolinischen Tempels und die Jupiterstatue auf ihr.
Enneper, Bemerkungen über die orthogonalen Flächen.
Oscar Grimm in Petersburg, zur Kenntniss einiger weniger bekannten Binnenwürmer. (Vorgelegt von Henle.)
Bauer, über Hemimorphismus beim Kalkspath. (Vorgelegt vom Secretair.)
Hübner und J. Post, vorläufige Notiz über leichte Abspaltung von Blausäure aus Nitro-, Dinitrobenzol und ähnlichen Verbindungen.
Riecke, Bemerkungen über die Pole eines Stabmagnets (Vorgelegt von Weber.)
Wöhler, Analyse des Meteoreisens von Ovifak in Grönland.

Analyse des Meteoreisens von Ovifak in Grönland.

Von F. Wöhler.

Gleich wie man in andern wenig besuchten Gegenden der Erde Massen von gediegenem Ei-

sen findet, deren kosmischer Ursprung ganz unzweifelhaft ist durch die Art ihres Vorkommens und durch die gleiche mineralogische und chemische Beschaffenheit, die sie mit Eisenmassen, deren Herabfallen man beobachtet hat, und mit dem metallischen Eisen in den Stein-Meteoriten gemein haben, so hat man schon früher auch in Grönland solche Eisenmassen gefunden, und unter Andern berichten schon Ross und Sabine dass sie bei den Eskimos an der Baffinsbay verschiedene eiserne Geräthschaften gefunden haben, welche jene nach ihrer Beschreibung von zwei grossen, 100 Meilen weit nördlich von der Insel Disko am Strande des Cap York liegenden, bis jetzt noch nicht aufgesuchten Blöcken genommen hatten und die sich durch ihren Nickelgehalt als Meteoreisen erwiesen. Aber der merkwürdigste und grösste Fund ist im J. 1870 von Professor A. E. Nordenskiöld in Grönland, auf der Insel Disko in der Baffinsbay zwischen dem 69 und 70 Breitegrad, gemacht worden. Nachdem er Grönländer mit der Aufsuchung solcher Massen beauftragt und auf deren Auffindung eine Belohnung gesetzt hatte, bekam er endlich in Godhavn die Nachricht, dass sich solche bei Ovifak auf der südlichen Seite der Insel Disko fänden. Er war so glücklich, unmittelbar an dem Fundort zu landen und hier den grössten Meteoriten, der je gefunden worden ist, zu entdecken. Ausser diesem fanden sich ganz nahe dabei noch zwei andere grosse und eine Menge kleinerer Eisenmassen. Die grossen lagen dicht am Strande zwischen Ebbe und Fluth unter abgerundeten Granit- und Gneisblöcken am Fusse eines hohen Basaltrückens [1]). Sie wurden später durch ein

1) Das Nähere siehe in Nordenskiöld's Redogörelse för en Expedition till Grönland. Stockholm 1871.

von der schwedischen Regierung abgesandtes Schiff nach Europa gebracht. Der grösste Block, der nach Nordenskiöld's Beschreibung auch im Aeusseren ganz den Habitus eines Meteoriten hat und selbst die eigenthümlichen Eindrücken ähnlichen Vertiefungen zeigt, befindet sich jetzt im Reichsmuseum zu Stockholm. Sein Gewicht wird auf 50,000 Pfund geschätzt; das der beiden andern grossen auf 20,000 und 9000 Pfund. Das Gesammtgewicht der übrigen kleineren beträgt 1484 Pfund. Zum Theil sind sie mit einem dunkeln trappähnlichen Gestein verwachsen, und die meisten kleineren haben die für Sammlungen leidige Eigenschaft, unter Sauerstoff-Absorption an der Luft zu einer aus rostigen Eisenkörnern bestehenden Masse zu zerfallen.

Theils von Nordenskiöld selbst, theils von andern schwedischen Chemikern sind bereits zahlreiche Analysen davon gemacht worden, die alle die dem Meteoreisen characteristischen Bestandtheile: Nickel, Kobalt, Phosphor, Einfach-Schwefeleisen, eine ungewöhnlich grosse Menge von Kohlenstoff und ausserdem in einigen eine organische Materie nachgewiesen haben. Einige dieser Analysen sind bereits in der oben genannten Schrift enthalten, andere werden in einer demnächst erscheinenden ausführlichen Abhandlung publicirt werden, die auch Nordenskiöld's Beweise für den von mancher Seite bezweifelten kosmischen Ursprung dieser Massen und die Gründe gegen den terrestrischen enthalten wird.

Ausser diesem an sich schon so merkwürdigen Fund machte er die Entdeckung, dass, nur wenige Meter von jener Fundstelle entfernt, aus der Basaltbreccie ein trappähnliches, vom Basalt auch in der Zusammensetzung wesentlich ver-

schiedenes Gestein hervorragt, welches, ausser einzelnen Eisenkörnern und Kugeln, eine mehrere Zoll breite und einige Fuss lange Ader von metallischem Eisen enthält. Diese Masse betrachtet er mit grösster Wahrscheinlichkeit ebenfalls als einen Eisen-Meteoriten, der von einer aus einem Silicat-Gestein bestehenden Schale umgeben ist.

Unter den verschiedenen Proben von Ovifak-Eisen, welche ich der Liberalität des Prof. Nordenskiöld verdanke, befindet sich auch ein über 900 Grm. schweres Stück von dem letztgenannten Eisen aus dem schwarzen Silicatgestein. Gern entsprechend dem Wunsche seines Entdeckers, dessen ganze Zeit gegenwärtig durch die grossen Vorbereitungen zu der neuen Polar-Expedition in Anspruch genommen ist, habe ich die Analyse dieses letzteren Eisens vorgenommen und theile in dem Folgenden die erhaltenen Resultate mit.

Diese Masse hat das Ansehen von grauem Roheisen. Sie ist vollkommen metallglänzend, von grauer Eisenfarbe und krystallinischem, halb blättrigem, halb kleinkörnigem Bruch. Sie ist sehr hart, durchaus nicht geschmeidig, ziemlich leicht pulverisirbar und polarmagnetisch. Sie ist passiv, das heisst sie reducirt kein Kupfer aus Vitriollösung; wird sie aber unter der Lösung mit gewöhnlichem Eisen berührt, so wird sie sogleich verkupfert. Ihr spec. Gewicht ist 5,82 bei + 20° C. Eine angeschliffene Fläche zeigt, dass sie aus einer dunkleren Grundmasse besteht, in der ein Netzwerk von einem weissen, stark glänzenden Metall eingesprengt ist. An der Luft ist sie ganz unveränderlich. Auf der einen Seite des Exemplars sitzt noch ein Stück Silicatgestein.

Nordenskiöld hatte bereits gefunden, dass

Fragmente von der grössten Masse beim Glühen ein sehr grosses Volumen eines Gases entwickelten, dessen Natur aber nicht näher untersucht wurde. Demselben Versuche unterwarf ich das in Rede stehende Eisen. In einem luftleer gemachten eisernen Rohr bis zum Glühen erhitzt, entwickelte es mehr als das 100 fache seines Volums eines undeutlich riechenden, mit blauer Flamme brennbaren Gases. Dieses Gas war Kohlenoxydgas gemengt mit wenig Kohlensäuregas. Hieraus ging hervor, dass dieses Eisen eine beträchliche Menge Kohle und zugleich eine Sauerstoff-Verbindung enthält, auch dass es ursprünglich keiner hohen Temperatur ausgesetzt gewesen sein kann. Nach dem Glühen waren die Eisenstückchen viel heller geworden, ohne aber ihre Festigkeit verloren zu haben, und wurden von Salzsäure viel leichter aufgelöst, als zuvor, hinterliessen aber dabei noch Kohle.

Zur Bestimmung des Sauerstoffgehalts wurde es in einem Glasrohr in getrocknetem Wasserstoffgas erhitzt. Es bildete sich eine Menge Wasser und es verlor 11,09 Procent an Gewicht, d. h. es enthält 11,09 Proc. Sauerstoff.

Von Salzsäure wird es nur langsam und nur theilweise aufgelöst unter Entwickelung eines anfangs nach Schwefelwasserstoff, später nach Kohlenwasserstoff, riechenden Wasserstoffgases unter Zurücklassung einer ansehnlichen Menge eines schwarzen, körnigen, magnetischen Pulvers, auf welches kalte Salzsäure nicht wirkt, welches aber in der Wärme aufgelöst wird unter Entwickelung eines übel riechenden kohlehaltigen Wasserstoffgases, und unter Zurücklassung von theils amorpher russartiger Kohle, theils von schwach glänzenden Kohlenstückchen, die ungefähr das Ansehen von Coaksstückchen haben

und fast ohne Rückstand verbrennbar sind. Diese Lösung enthält, wie die kalt entstandene, ausser Eisen, Nickel und Kobalt.

Wird das gepulverte Eisen mit concentrirtem Eisenchlorid digerirt, so löst sich ohne alle Gasentwickelung ein Theil auf und es bleiben gegen 30 Procent ungelöst. Dieser schwarze Rückstand ist in Salzsäure unlöslich. Nach dem Trocknen bei 200° in trocknem Wasserstoffgas geglüht, bildete er Wasser und verlor 19 Proc. an Gewicht. Nun wurde er von Salzsäure mit grosser Heftigkeit unter Entwickelung von Schwefelwasserstoff und Zurücklassung von fast reiner Kohle aufgelöst. Diese war theils pulverig, theils erschien sie unter dem Mikroskop in Form von graphitähnlichen Stückchen. Von Salzsäure und von Eisenchlorid scheint also aus diesem Eisen nur das freie Metall, und nicht das mit Sauerstoff und mit Schwefel verbundene aufgelöst zu werden.

Der gesammte Kohlenstoffgehalt in diesem Eisen wurde auf diese Weise, durch Behandlung mit Eisenchlorid, zu 3,73 Procent gefunden.

Zur Controle wurde das fein geriebene Eisen nach Art einer organischen Analyse mit Kupferoxyd und Sauerstoffgas verbrannt. Hierdurch wurden 3,69 Proc. Kohlenstoff gefunden [1]).

Der an verschiedenen Stellen ohne Zweifel variirende Schwefelgehalt wurde durch Schmelzen des fein geriebenen Eisens mit einem Gemenge von kohlensaurem Natron und Salpeter als schwefelsaurer Baryt bestimmt. Es wurden 2,82 Proc. Schwefel gefunden. — Auf ähnliche Weise wurde der Phosphorgehalt bestimmt.

Nach dem Mittel aus mehreren Analysen enthält dieses Eisen:

1) Analyse von Dr. Jannasch.

Eisen	80,64
Nickel : . . .	1,19
Kobalt	0,47
Phosphor . . .	0,15
Schwefel . . .	2,82
Kohle	3,69
Sauerstoff . . .	11,09
	100,05

Ausserdem enthält es Spuren von Kupfer und Chrom und an ungleichen Stellen variirende kleine Mengen eines weissen, Thonerde, Kalk und Magnesia enthaltenden Silicats.

Es ist schwer zu sagen und muss vorläufig unentschieden bleiben, in welchem Verhältniss der unerwartete Sauerstoffgehalt in dieser Masse mit Eisen verbunden ist. In Betracht ihrer homogenen Beschaffenheit und ihres krystallinischen Gefüges könnte man vermuthen, dass sie aus einer bis jetzt unbekannten Oxydationsstufe des Eisens, aus einem Suboxydul, Fe^2O, bestehe; aber dies ist nicht mit dem analytischen Resultat in Einklang zu bringen, es würde dann kein Eisen für den Schwefel und den Kohlenstoff übrig sein.

Es bleibt also nur übrig anzunehmen, dass sie entweder Eisenoxydul oder Eisenoxyd oder Oxyd-Oxydul enthalte. An Eisenoxydul würde sie 49,9 Proc., an Eisenoxyd 36,9, an Oxyd-Oxydul 41,2 Proc. enthalten.

Da das Oxyd-Oxydul, das Magneteisenerz, zu den verbreitetsten Eisenerzen gehört und da Nordenskiöld in einem anderen Ovifak-Eisen wirkliche Octaëder von Magnetit gefunden hat, Eisenoxyd neben metallischem Eisen auch weniger annehmbar ist, so könnte man vorläufig als am wahrscheinlichsten annehmen, dass

dieser Meteorit ein inniges Gemenge von Magneteisenerz und metallischem Eisen sei, enthaltend ausserdem Phosphor- Nickel und Kobalteisen, Schwefeleisen, Kohlenstoffeisen und freie Kohle. Hiernach würde er enthalten:

Eisen	46,60
Eisenoxyd - Oxydul . .	40,20
Nickel	1,19
Kobalt	0,47
Phosphor	0,15
Kohle	3,69
Einfach - Schwefeleisen	7,75
	100,05

Dass diese Masse beim Glühen nicht allen Sauerstoff und allen Kohlenstoff als Kohlenoxyd verliert, dürfte daraus zu erklären sein, dass letzterer zum Theil frei und in festen Stückchen darin enthalten ist, und dass vielleicht nur der chemisch gebundene, als Kohlenstoffeisen dem Magnetit innig beigemengte und damit in Berührung befindliche als Kohlenoxydgas weggeht.

Hemimorphismus beim Kalkspath;

von **Bauer.**

Ein Hemimorph aus gebildeter Kalkspathkrystall ist, so weit meine Erfahrung reicht, noch nicht bekannt gemacht worden; die nachfolgende Beschreibung eines solchen ist desshalb von einigem Interesse.

Der Krystall stammt von Andreasberg, aus einer Druse mit vielen andern Krystallen, die aber alle an einem Ende aufgewachsen sind, sodass an ihnen keine Beobachtungen über Hemimorphismus gemacht werden können. Blos der

in Rede stehende Krystall ist an einem andern quer angewachsen, so dass man seine beiden Enden beobachten kann.

Die Krystallflächen, welche beobachtet wurden, sind die folgenden:

Die erste sechsseitige Säule herscht vor. Sie ist ziemlich eben und glatt und der Länge nach fein, in der Quere stellenweise gröber gestreift.

Die Kanten dieser Säule werden durch die Flächen der 2ten sechsseitigen Säule gerade abgestumpft. Diese Flächen sind sehr schmal, aber stark glänzend.

Die beiden Enden sind nun folgendermassen ausgebildet:

Am einen unteren Ende ist es blos die Basis, die den Krystall begrenzt. Sie zeigt die für die Andreasberger Krystalle charakteristische milchige Trübung und ist ganz glatt und eben, aber wenig glänzend.

An dem andern, oberen Ende bemerkt man zunächst über den Flächen der ersten sechsseitigen Säule noch kleine Flächen eines spitzen Rhomboeders von der Stellung des Hauptrhomboëders, welches letztere nicht als Krystallfläche, wohl aber an einer Ecke als Blätterbruch vorhanden ist. Die Flächen jenes Rhomboeders sind klein, aber eben und glänzend und erlauben eine sehr gute Messung der Winkel gegen die Flächen des Hauptrhomboeders und der ersten Säule, zwischen welchen beiden sie liegen. Aus diesen Messungen ergiebt sich dass es das zweite schärfere Rhomboeder $\frac{a}{4} : \frac{a}{4} : \infty a : c$ ist.

Viel entwickelter sind aber an diesem Ende die Flächen eines Skalenoëders von einer dem Hauptrhomboeder entgegengesetzten Stellung. Die Flächen dieses Skalenoëders sind zwar ziem-

lich stark glänzend, aber stark gekrümmt, so dass sie namentlich da, wo sie in einer stumpfen Endecke an einander stossen, ziemlich allmählig an einander übergehen. Die Bestimmung des Flächenausdrucks wird dadurch erleichtert, dass das erwähnte zweite schärfere Rhomboëder in den stumpfen Endkanten des Skalenoëders liegt. Eine wegen der starken Flächenkrümmung nur annähernd richtige Messung des stumpfen Skalenoëderendkantenwinckels giebt 155° 23′, und daraus und aus dem angegebenen Zonenverband ergiebt sich der Flächenausdruck:

$$3a' : \frac{2b'}{5} : \frac{6a'}{13} : \frac{b'}{4} : \frac{6a'}{11} : \frac{2b'}{3} : c$$

Berechnet man hieraus den Winkel der stumpfen Endkante des Skalenoëders, so erhält man:

beobachtet:	berechnet:
155° 23′	155° 22′

eine bei der Flächenkrümmung sehr auffallende zufällige Uebereinstimmung.

Spuren eines weiteren viel schärferen Skalenoëders derselben Stellung zeigen sich dadurch, dass die abwechselnden Flächen der ersten Säule unter der stumpfen Endkante des vorhin erwähnten Skalenoëders am oberen Ende nach beiden Seiten hin nach oben und aussen gekrümmt sind, welche Krümmung am unteren Ende vollständig fehlt. Die Winkel der stumpfen Endkanten dieses zweiten Skalenoëders sind sehr nahe = 180°, aber nicht messbar.

Ausser von den erwähnten Flächen ist das obere Ende auch noch von der Basis begrenzt, die das Skalenoëder oben abstumpft. Sie ist wenig entwickelt, und physikalisch von der Basis am unteren Ende nicht zu unterscheiden.

Die oben erwähnte gröbere Querstreifung der Flächen der ersten sechsseitigen Säule ist

blos unmittelbar unterhalb der Flächen des zweiten schärferen Rhomboëders und entsteht durch treppenförmige Abwechslung dieser Flächen mit den Säulenflächen. Auch diese Querstreifung ist also demnach dem oberen Ende eigenthümlich.

Da hemimorphe Krystalle, wie Turmalin etc. die Erscheinung der Pyroelektricität zu zeigen pflegen, so wurde auch der vorliegende Krystall im hiesigen physikalischen Cabinet darauf hin untersucht. Er wurde im Sandbad bis 150° erhitzt und in einer isolirenden Zange einem sehr empfindlichen Goldblattelektroskop genähert. Es zeigte sich aber bei wiederholten Versuchen keine Spur von Elektrizität. Weiter als bis 150° wurde der Krystall nicht erhitzt, um ihn nicht der Gefahr des Zerspringens auszusetzen.

Der Krystall gehört dem mineralogischen Cabinet der hiesigen Sammlung und wurde mir von Herrn Prof. Sartorius von Waltershausen zur Untersuchung freundlichst überlassen, wofür ich ihm auch hier meinen Dank ausdrücke.

Universität.

Preisaufgabe der Beneke'schen Stiftung für das Jahr $18^{74}/_{75}$.

Die Abhängigkeit veränderlicher Grössen von einander, welche wir allgemein durch das Wort Function zu bezeichnen pflegen, ist für gewisse besondere Arten der Abhängigkeit bereits genauer untersucht worden. Insbesondere sind die periodischen Functionen in der Theorie der Abel'schen Functionen Gegenstand mathematischer Untersuchung geworden. Aber auch unter diesen ist nur ein kleiner Theil, die sogenannten hyperelliptischen Functionen, so weit

gefördert, dass man im Stande ist zu wirklichen Darstellungen überzugehen. Es sind diejenigen Functionen, bei deren Untersuchung eine zweiblättrige Riemann'sche Fläche zu benutzen ist. Für einen wesentlichen Fortschritt in dieser Richtung würde es daher zu halten sein, wenn die nächste Classe Abel'scher Functionen ($p=3$) genauer untersucht und bis zur Möglichkeit wirklicher Darstellungen gefördert würde. Aber diess kann nicht ausgeführt werden, ohne dass die Theorie der ebenen Curven 4. Ordnung nach den Principien der neueren Algebra in ihren Grundzügen vollendet werde. Es wird daher von der philosophischen Honoren-Facultät gewünscht:

eine vollständige Behandlung der Theorie der Abel'schen Function für $p=3$, in Zusammenhang mit der algebraischen Theorie der ebenen Curven 4. Ordnung.

Die Bearbeitungen dieser Aufgabe sind bis zum **31. August 1874 dem Decan der philosophischen Facultät in deutscher, lateinischer, französischer oder englischer Sprache** einzureichen. Jede eingesandte Arbeit muss mit einem **Motto** und mit einem versiegelten, den **Namen** und die **Adresse** des Verfassers enthaltenden **Couvert**, welches dasselbe **Motto** trägt, versehen sein.

Der erste Preis wird mit **500 Thlrn. Gold in Friedrichsd'or**, der zweite mit **200 Thlrn. Gold in Friedrichsd'or** honorirt.

Die Verleihung der Preise findet im **Jahr 1875 am 11. März**, dem Geburtstage des Stifters, in öffentlicher Sitzung der Facultät statt.

Gekrönte Arbeiten bleiben unbeschränktes Eigenthum ihrer Verfasser.

Göttingen, 2. April 1872.

G. Waitz, Decan.

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

22. Mai. №. 12. 1872.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Zur Kenntniss des Bau's und der Entwicklung von Apus und Branchipus.

Von C. Claus.

Die Entwicklungsgeschichte von *Apus* und *Branchipus*, die seit Zaddach's bekannter Dissertation (1841) und seit Leydig's Bemerkungen über *Artemia salina* und *Branchipus stagnalis* (1851) meines Wissens nicht wieder zum Gegenstand eingehender Beobachtungen gemacht worden ist, schien mir noch manche werthvolle Aufschlüsse über Bau und Verwandtschaft der Entomostraken erwarten zu lassen und desshalb ein ergiebiges Feld für erneute Untersuchungen abzugeben. In dieser Ueberzeugung habe ich die durch die Güte der Herrn v. Siebold in München und Brauer in Wien dargebotene Gelegenheit, *Apus*- und *Branchipus*larven aus eingetrocknetem Schlamme zu erziehen, freudig aufgegriffen und wie die nachfolgenden Mittheilungen zeigen werden, nicht ohne zu neuen Ergebnissen gelangt zu sein, deren ausführliche mit Abbildungen begleitete Darstellung ich mir als Gegenstand einer besondern Abhandlung für einen andern Ort vorbehalte.

Die Naupliuslarven von *Branchipus* wurden bereits von Bénedict Prévost ziemlich genau

beschrieben und nicht minder geschickt wenn auch nicht ganz correkt in Jurine's bekanntem Werke und später von Baird abgebildet. Zahllose glänzende Körnchen und Fettkügelchen, welche in den Zellgeweben angehäuft sind, bedingen die trüb-gelbe Färbung des Körpers und lassen anfangs nur das Auge, den Darmkanal und einige Muskelbänder mehr oder minder deutlich durchschimmern, während das Nervencentrum und der grösste Theil der Muskulatur, auch eine gleich zu beschreibende Drüse des 2ten Gliedmassenpaares anfangs noch verdeckt bleibt. Von den 3 Gliedmassenpaaren ist das vordere einfach und endet wie auch in den spätern Stadien mit 3 Tastborsten. Das 2te sehr mächtige fungirt als Ruderarm, ist am Basalgliede des Stammes mit einem Kieferfortsatz bewaffnet, welcher in eine bewegliche Hakenborste ausläuft, trägt auch am Ende des zweiten Stammgliedes eine kräftige Hakenborste und endet mit zwei Aesten, von denen der innere einfach bleibt und mit 4 Terminalborsten besetzt ist, während der viel grössere 13gliedrige Aussenast an seiner Innenseite 13 lange Schwimmborsten trägt. An dem Basalgliede des viel kürzern dritten Gliedmassenpaares oder Mandibularfusses erhebt sich bereits der Kieferfortsatz in Form einer rundlichen Auftreibung, von der grossen langgestreckten Oberlippe grossentheils bedeckt. Der hintere Leibesabschnitt scheint auffallend scharf von dem die drei Gliedmassen tragenden Vorderleib abgesetzt und besitzt eine gestreckt ovale am hintern Pole wenig ausgebuchtete Gestalt. Allmählig vollzieht sich die Umgestaltung der Larvenform, indem sich mit der langsamen Klärung der Gewebe und Auflösung der Körnchen der hintere Leibesabschnitt kegelförmig streckt und von der Basis aus durch Wucherung der dem fötalen Hautblatte entsprechenden Zellenschicht der Haut zuerst 4,

dann 5 bis 6 paarige Querwülste als erste Anlage von ebenso viel Segmenten und Gliedmassen zur Sonderung bringt. Auch am Vorderleib entstehen 2 wenngleich schwächere Aufwulstungen, die am besten in seitlicher Lage unterhalb des freien Abschnitts der Oberlippe erkannt werden und die Anlagen der Maxillen darstellen.

Nachdem sich die zahlreichen Körnchen grossentheils aufgelöst haben, ist der Leib mit der folgenden Häntung hell und durchsichtig geworden. Die Muskelgruppen, das 2lappige Gehirn nebst Schlundring treten deutlich hervor, ebenso in der Basis der zweiten Antenne ein schleifenförmig gebogener feinkörniger Drüsenschlauch, die Antennendrüse, und innerhalb der Oberlippe 2 in der Umgebung einer grossen medianen Zellen gelegene, mit grossen Kernblasen versehene Zellen als die den Phyllopoden und Cladoceren eigenthümlichen Lippendrüsen. Am Pigmentkörper des Auges erkennt man 2 helle gelblich glänzende Kugeln und zu deren Seiten zwei strangförmige Ausläufer des Gehirns, welche in einer Anschwellung der Hypodermis enden. Diese Bildung stellt die Anlage eines auch bei Apus vorkommenden paarigen Sinnesorganes zu den Seiten des unpaaren Stirnauges dar. Am dritten Gliedmassenpaar ist der Kieferfortsatz zu einer feinbezähnten Mandibel verlängert. Die Kiefer und Beine heben sich bestimmter hervor, insbesondere die beiden ersten Beinpaare, die sich bereits in 2 Quer-Abtheilungen zu gliedern beginnen. Auch die Anlagen der vordern Ganglienpaare der Bauchkette und der vordern Kammern des Herzens nehmen aus den mehr medianen Theilen des Keimwulstblastem's, dessen Hauptmasse die Gliedmassen hervor bildet, ihren Ursprung. Diese Bildungsvorgänge, über welche die vorliegenden und spätern Stadien der glashellen

Larven sichere Aufschlüsse verschaffen, schliessen sich an die fötalen Entwicklungsvorgänge anderer Arthropoden innig an. Durch Verdickung des Hautblattes kommt es an der Bauchseite zur Entstehung einer Art Keimstreifens, welcher rechts und links nach dem Rücken übergreift und anfangs nur eine einzigen Schicht grosser polygonaler Zellen unterhalb der Zellen des Hautblattes erkennen lässt.

Die Segment- und Gliedmassenanlage wird in der Weise eingeleitet, dass sich die Zellen der Quere nach in Doppelreihen ordnen, welche bald in der Medianlinie der Bauchseite unterbrochen werden. Aus dem Primitivtreifen entwickeln sich auf diese Weise die paarigen Keimwülste, deren Breite und Dicke in Folge der lebhaften Zellwucherung rasch zunimmt. An den beiden vorderen Segmenten differenzirt sich der Inhalt der Keimwülste zuerst in die Ganglien der Bauchkette (innerste und tiefste Zellgruppe der Medianseite), in das Gewebe der Gliedmassen und dorsalwärts in die Rückenmuskulatur und in die Anlage der vordersten Herzkammern. Auch in dem Doppelsegmente der beiden Maxillenpaare kommt es in ähnlicher Weise zur Anlage von 2 kleinen Ganglienpaaren, die unter einander durch Querbrücken und sowohl mit den nachfolgenden Ganglien als mit dem vorausgehenden 2lappigen untern Schlund- oder Mandibelganglion durch Längscommissuren in Verbindung stehen. Mit dem Wachsthum und der Streckung des kegelförmigen Leibes schreitet die Differenzirung der Keimwülste mit entsprechender Ganglien- und Herzkammerbildung von vorn nach hinten vor. Bald sind die Anlagen der drei bis vier vordern Beinpaare mit den entsprechenden Ganglien ge-

sondert, hinter denen noch 5 Segmente, die 2 bis 3 vordern mit deutlichen Ausbuchtungen der Haut, die hintern nur durch die neugebildeten queren Zellwülste hervortreten.

Das nachfolgende Stadium, nach Abstreifung der Haut aus dem beschriebenen hervorgegangen, zeigt bei der geringen Körpergrösse von 1 Mm. 4 freie Fusspaare, von denen die beiden vordern die Gliederung in vier Lappen, 2 äussere mit Häkchenausläufern, einen schmalen mittlern und einen grossen innern Lappen, erkennen lassen. Dahinter folgen drei deutlich abgeschnürte Keimwülste und in dem gemeinsamen Endstück des Abdomens 4 in der Bildung begriffene Segmente, so dass also die 11 vordern Segmente nachweisbar sind. An dem merklich verbreiterten Stirntheil des Kopfes treten jetzt auch die Anlagen zu dem paarigen Auge auf, im Gegensatz zu Apus und Estheria weit von einander und dem grossen Medianauge abstehend. Dieselben sind ebenfalls auf Verdickungen des Hautblattes zurückzuführen, und zwar sowohl der Pigmentkörper mit den Krystallkegeln, als das mit dem Gehirn in Verbindung tretende Ganglion opticum. Von den Ganglien der Bauchkette erscheinen die vordern seitlich mehr auseinander gerückt und bereits durch je 2 Quercommissuren verbunden, die hintere, die man bis in das 8te Segment verfolgen kann, stossen in der Medianlinie zusammen. Auch sieht man das weite nunmehr fünfkammerige Herz, dessen letzte Kammer noch durch eine flügelähnliche Querbrücke mit dem Keimhautblasteme verbunden ist, Pulsationen ausführen.

Etwas grössere Larven zeigen 5 freie Segmente mit ebenso viel deutlich gesonderten Gliedmassenpaaren, von denen nun auch das dritte und vierte den Differenzirungsgrad der beiden vordern erlangt haben, dann folgen wieder 3 deut-

lich abgeschnürte Keimwülste und in dem Endstück des Abdomens, dessen Furcalausschnitt 2 spitze Endhaken als Anfänge der Terminalborsten hervortreibt, die Anlage zu wenigstens 5 bis 6 neuen Segmenten.

Nach eingetretener Häutung hat die Larve eine Länge von circa 1,25 Mm. erreicht. Nun haben wenigstens die vordern Beinpaare einen freien Borstenbesatz ihrer Lappen erhalten. Neben dem Mittellappen haben sich zwei kleine neue Lappen gesondert, und an der Dorsalseite springt die Anlage des Kiemensäckchens und der basalen Borstenplatte vor. Auch das 5te Beinpaar erscheint gesondert, und hinter den 3 nachfolgenden freien und abgeschnürten Keimwülsten treten in dem langgestreckten Endabschnitt des Abdomens die Anlagen zu 8 bis 9 Segmenten auf, von denen die 3 vordern bereits vorspringende Keimwülste bilden. Bis zu diesen lässt sich die Differenzirung der Bauchganglien verfolgen, während das Herz bis in das 9te Segment hineinreicht, dessen Kammer noch in der Bildung begriffen ist. Die Breite des Stirntheils und Grösse des Seitenauges ist bedeutender geworden, die Furcalausbuchtung endet jederseits mit 2 Borsten.

Larven von 1,5 Mm. Länge haben 9, solche von 1,6 Mmlänge 10 freie Segmente, letztere besitzen 7 Beinpaare, von denen die vier vordern an Grösse bedeutend hervortreten und alle Theile des ausgebildeten Phyllopodenfusses zeigen. Das 6te Beinpaar entbehrt noch des Borstenbesatzes, das 7te zeigt schon deutliche Lappensonderung, ein 8tes ist in der Entstehung begriffen. Das 11te Körpersegment erscheint noch mit dem gemeinsamen Hinterleibsstück verbunden, in welchem aber alle nachfolgenden Segmente als kurze Querringe nachweisbar sind. Die Ganglionsonderung lässt sich bis zum 10ten, die Bildung

der Herzkammern bis zum 14ten Segmente verfolgen. Der Furcalschnitt ist noch verhältnissmässig kurz, an den Seiten der beiden Endborsten findet sich eine, beziehungsweise zwei neue Borstenanlagen. Von den Gliedmassen des Kopfes haben die Tastantennen eine Anzahl feiner mit Knöpfchen endigender Riechcylinder gewonnen, die Ruderantennen erscheinen der Grösse nach relativ reducirt, bezüglich des Baues jedoch noch ebenso unverändert wie die Taster der Mandibeln. Am Stirntheil bereitet sich die Abschnürung des medianen Abschnitts, welcher das unpaare Auge und die frontalen fast linsenartig vorspringenden Sinnesorgane enthält, von den die paarigen Augen umschliessenden Seitentheilen vor. Diese gestalten sich in den nachfolgenden Stadien allmählig zu den beweglichen Stilaugen um und enthalten jetzt schon die Anlage eines transversalen als Herabzieher wirksamen Muskelbandes.

Larven von 2 Mm. Länge besitzen sämmtliche Fusspaare, die drei hintern jedoch noch von sehr geringer Grösse, das letzte sogar noch ohne Lappenanlagen. An dem nachfolgenden Hinterleib treten alle Segmente als schmale Querringe auf, die hinteren freilich noch undeutlich gesondert, die beiden vordern aber, die spätern Genitalsegmente mit Keimwülsten versehen, welche offenbar Fussanlagen gleichwerthig sind und auch wie diese an der medianen Seite Ganglienpaare erzeugen.

Das Herz erstreckt sich bis an das letzte (19te) Segment, welches jedoch von dem weitem den Mastdarm umschliessenden Präfurcalsegmente noch nicht abgeschnürt ist. Die Furcalglieder erheben sich als ganz ansehnliche conische Zapfen und sind ausser den beiden grossen Terminalborsten mit 3 bis 5 kleinen Borsten jederseits besetzt.

Auch die Anlagen der Geschlechtsdrüsen erscheinen als zwei seitliche die vier ersten Abdominalsegmente durchsetzende strangförmige Wülste, welche der Hypodermis dicht anliegen. Die weitere mit mehrfachen Häutungen verbundene Entwicklung lässt sich kurz dahin zusammenfassen, dass die Beinpaare der Reihe nach an Grösse und Differenzirung zunehmen, und die Segmente des Hinterleibs ebenso wie die Furcalglieder eine fortschreitende Streckung und Verlängerung zeigen.

An Larven von 3 Mm. Länge haben sich sämmtliche Fusspaare soweit ausgebildet, dass auch das 11te wenn auch noch recht kleine Fusspaar Borsten-umrandete Stammlappen gewonnen hat. Die Augen erscheinen bereits als kurze kugliche Stilaugen vom Kopfe abgeschnürt. An den Ruderantennen bereiten sich Veränderungen vor, welche die wesentliche nach den beiden Geschlechtern verschiedene Umgestaltung einleiten. Obwohl noch vom Bau der Larvenantennen erscheinen sie doch der Grösse nach bedeutend reducirt und mehr vom Werthe tasterartiger Anhänge. Die zugehörige Drüsenschleife ist noch als geschrumpfte Körnchenmasse nachweisbar. Von den langen Ruderborsten finden sich nur kurze Reste, während sich dagegen die Gruppen zarter Tastfäden schärfer hervorheben. Auch die Mandibulartaster sind in der Schrumpfung und Reduction ihrer Borsten begriffen, um im nächsten Stadium ganz abgeworfen zu werden. Am Abdomen zeigen die beiden Genitalsegmente eine innigere Verschmelzung ihrer Bauchseite, an welcher sich die Anlage des Genitalhöckers nachweisen lässt. Das 8te Hinterleibssegment hat sich noch nicht von dem die Mastdarmmuskulatur umfassenden Präfurcalabschnitt gesondert. Die gestreckten Furcalglieder sind an beider Seite mit je 10 bis 12 Borsten besetzt.

Mit dem Eintritt in das nachfolgende Stadium vollzieht sich im Zusammenhange mit der fortschreitenden sexuellen Differenzirung eine wesentliche Umgestaltung. Nicht nur dass die Tastantennen als lange Stäbe hevorragen und die Augenstile eine langgestreckte Form gewinnen, vor allem verliert das 2te Antennenpaar seinen Borstenbesatz und schlägt sich oberhalb der mächtigen Oberlippe nach dem Stirntheil empor; im weiblichen Geschlecht verkümmert der Nebenast allmählig, während sich Hauptast und Stamm zu dem messerförmigen Anhang umgestalten. Im männlichen Geschlecht dagegen krümmt sich der verschmälerte Hauptast zur Bildung des Greifhakens und neben demselben entwickelt sich ein schlauchförmiger Auswuchs, der in Verbindung mit dem erstern das accessorische Copulationsorgan darstellt. Der Mandibulartaster erhält sich noch einige Zeit als rudimentärer borstenloser Anhang. Am Abdomen vollzieht sich die sexuelle Differenzirung und die Abschnürung des 8ten und 9ten Segmentes. Im weiblichen Geschlecht vereinigen sich die Genitalwülste zur Herstellung eines breiten unpaaren Höckers, in welchem unterhalb der durch 3 Quercommissuren verbundenen Ganglienpaare aus einer paarigen Zellengruppe die Kittdrüsenanlage hervorgeht, während sich Oviducte als Quergänge und Ovarien als Längsschläuche zu den Seiten des Darmcanales von dem Hautblatte abheben. Im männlichen Geschlechte bleiben die Genitalhöcker paarig und nehmen als höckerförmige Vorsprünge die Ausführungsgänge der beiden Keimdrüsen auf.

Die Naupliuslarven von *Apus* verlassen das Ei nicht mit 2, sondern mit 3 Gliedmassenpaaren wie die von Branchipus. Das vordere ist kurz,

einfach stabförmig und endet mit einer Hauptborste, neben der eine zweite viel kürzere und schmächtigere Borste entspringt. Unverhältnissmässig gross und in seiner Function den Ruderantennen der Cladoceren entsprechend erscheint das 2te Gliedmassenpaar. Dasselbe ist mit einem beweglichen grossen Kieferhaken an der Banis und 2 terminalen Aesten versehen, von denen der kürzere eingliedrig mit 3 Borsten endet, der längere 5gliedrige fünf lange Seitenborsten trägt. Das dritte Gliedmassenpaar tritt bei der dunkeln trübkörnigen Beschaffenheit der Leibessubstanz nicht so deutlich hervor, zumal nur sein Endabschnitt über den Seitenrand des Körpers hinaus reichen kann, und ist von Zaddach übersehen worden. Ein Mandibularfortsatz ist noch nicht vorhanden, während er in der Naupliuslarve von Branchipus als kugliche Auftreibung des Basalgliedes in diesem Alter nachweisbar ist. Das hintere Drittheil des Larvenleibes birgt unterhalb des Integuments die Anlagen zu 5 vordern Brustsegmenten, von denen die beiden vordern am deutlichsten als schwache schräg aufsteigende Querwülste erkannt werden.

Nach Abstreifung der Haut, deren Rücken bereits die Umrisse der uhrglasförmigen Erhebung des spätern Nackenorganes in voller Grösse umschrieben zeigt, hat die Larve die ovale Naupliusform verloren und durch schildförmige Verbreiterung des vordern Leibesabschnitts und Streckung des kegelförmig sich verschmälernden hintern Leibesabschnitts eine Gestalt gewonnen, die an die der Caligiden erinnert. Noch immer enthält der Körper eine Menge feinere und gröbere Fettkörnchen, welche Muskulatur, Nervensystem und Darmkanal theilweise verdecken, allmählig aber klärt sich der Leibesinhalt durch Auflösung der Körnchen auf, und die Gewebe treten deut-

licher und schärfer hervor. Der schildförmige Vorderleib umfasst Antennen und Kiefersegmente, an denen jedoch von der Mandibel abgesehen erst ein Maxillenpaar nachweisbar ist. Oberhalb des unpaaren mit 2 lichtbrechenden Körpern versehenen Auges erheben sich auf 2 kugligen Auftreibungen 2 griffelförmige Glieder mit glänzenden Endkörperchen und fibrillärem Inhalte. Es sind die zwei auch bei andern Entomostraken aufgefundenen Sinnesfäden des Stirnrandes (Copepoden, Cirripedienlarven). Das obere Ende des Darmcanales, schon im frühern Stadium nach den Seiten verbreitet, erscheint jetzt in zwei zipfelförmige Seitenfortsätze, die ersten Anlagen der sog. Leberschläuche, ausgezogen. Die Oberlippe ist kurz, am freien Rande mit 4 papillenähnlichen Erhebungen versehen und deckt die Spitzen der Mandibeln, die als ansehnliche conische Fortsätze am Basalglied des dritten Gliedmassenpaares hervorgewachsen sind. An der Basis des 2ten Gliedmassenpaares, welches die frühere Form unverändert erhalten hat, findet sich eine schleifenförmig gebogene Drüse, welche unterhalb des Hakengliedes ausmündet. Je mehr sich die Larve durch Resorption der Körnchen aufhellt, um so bestimmter wird die Mündungsstelle des Ausführungscanales als Oeffnung nachweisbar. Diese Drüse, die sich ebenso bei Branchipus, bei Estheria und Limnadia (bei der sie Lereboullet als räthselhaftes Organ erwähnt und abbildet), sicher auch bei den übrigen Phyllopoden findet, entspricht morphologisch der von mir bei den Cyclopslarven abgebildeten Drüsenschleife (Copepoden Taf. 1 Fig. 2, 3, 5 III. Fig. 9) und ist ein bei den Entomostraken auf das Larvenleben beschränktes Organ, das von der Schalendrüse wohl zu unterscheiden ist. Dahingegen scheint mir nichts im Wege

zu stehen, diese Drüse morphologisch der sog. grünen Drüse des Flusskrebses oder um es allgemeiner auszudrücken, dem Drüsengang in den hintern Antennen der Malacostraken gleich zu stellen. Der nach hinten zugespitzte und tiefgablig ausgebuchtete mit 2 Furcalfortsätzen endigende Hinterleib zeigt deutlich 5 Segmente, undeutlich noch ein 6tes als ringförmige Querbinde von dem conischen Endstücke gesondert. Auch die Gliedmassen werden wenigstens an den 3 bis 4 vordern Segmenten als Querwülste mit wellig gelapptem Hinterrande erkannt, an dem schon sämmtliche Lappen und Kieferfortsätze des spätern Beines in Form kurzer Vorsprünge angelegt sind.

An etwas vorgeschrittenern der Häutung nahen Formen dieses 2ten Larvenstadiums ist die Zahl der Segmente scheinbar eine grössere geworden, da 3 neue Segmentanlagen durch die Cuticula hindurchschimmern. Aehnliches wiederholt sich für die unmittelbar vor der Häutung stehenden ältern Stadien. Die abgestreifte Cuticula, die man durch Isolirung der Larve alsbald leicht erhält, gibt jedoch für die Richtigkeit des angegebenen Zahlenverhältnisses den unzweideutigen Beweis, wie überhaupt stets die abgeworfene Haut zur Rektifikation der an der lebenden Larve gemachten Beobachtungen heranzuziehen ist.

Mit der 2ten Häutung tritt die Larve in das 3te Stadium ein (Zaddach fig. 5. Taf. IV) welches beinahe 1 Mm. lang ist und schon 6 kurze aber deutlich gelappte Fusspaare mit den Branchialsäckchen, auch eine 7te undeutlich gelappte Fussanlage besitzt, hinter welcher noch 2 bis 3 Segmente als kleine Ringe hervortreten. Das Rückenschild ist noch kurz, kaum von halber Länge des Körpers und bedeckt nur die Segmente der beiden vordern Fusspaare, lässt jedoch be-

reits die Schalendrüsen ihren Umrissen nach schwach hindurchschimmern. Am Kaurand der Mandibel, deren Taster noch vollkommen als Fuss fungirt, hebt sich ein unterer Zahnfortsatz ziemlich deutlich ab. Das Herz wird bis in das 6te Fuss-Segment verfolgt und contrahirt sich lebhaft. Die Furcalglieder sind kaum 3mal so lang als breit und laufen in einen kurzen Borstenhöcker aus.

Nach abermaliger Abstreifung der Haut (3te Häutung) tritt die Larve — bei warmer Witterung noch vor Beginn des zweiten Tages seit Abwerfen der Eihülle — in das vierte Stadium ein (Zaddach fig. 9.) und hat nun eine Länge von 1 bis $1^1/_4$ Mm. erreicht. Nunmehr finden sich 7 bis 8 Paare gelappter Fusspaare, an der Rückenseite sämmtlich mit mehr oder minder ausgebildeten Branchialsäckchen und Fächerplatte (7ter Randlappen). Die drei bis vier vordern Paare werden vom Rückenschilde bedeckt. Alle besitzen die medianwärts vorstehende Kieferlade. Ein 9tes Beinpaar beginnt die Lappenbildung, und 3 bis 4 neue in der Entstehung begriffene heben sich sammt ihren kurzen Segmenten vom Hinterleibsabschnitt ab, dessen Furcalglieder jetzt 4 bis 5 mal so lang als breit sind und in je einen langen Borstenfortsatz auslaufen. Ueber und hinter dem Stirnauge markiren sich die Pigmentanlagen der paarigen Augen. Die Lebersäckchen bilden schon 3 Ausstülpungen, und die Schalendrüse ist in ihren 3 Schleifengängen vollkommen ausgebildet. Die blassen Zapfen des frontalen Sinnesorganes haben sich vom Stirnrand dorsalwärts entfernt und liegen zu den Seiten einer taschenförmigen Einsackung des Integuments. Die Ruderantennen, noch immer als Haupt-Bewegungsorgane durch gleichzeitige Ruderschläge den Körper stossweise forttreibend, haben an Umfang kaum verloren und lassen un-

terhalb ihres grossen Kieferhakens die Mündung der vordern Schleifendrüse leicht erkennen. Die 3gliedrigen Mandibulartaster stehen beinartig nach hinten gewendet, und am Kaurand der Mandibel sind 2 grössere Zahnfortsätze gesondert. Am grossen Maxillenpaare lässt sich die Anlage einer 2ten vordern Lade (Zaddach's Maxille des ersten Paares) nachweisen, und zu ihren Seiten erhebt sich am äussern untern Winkel ein Querhöcker, welcher die Anlage des 2ten Maxillenpaares darstellt. Das Herz, mit 2 vordern Seitenarterien reicht bis in das 9te Fusssegment, ebenso ist die Bauchkette bis zu dem entsprechenden Segmente hin mit allen ihren dicht gedrängten Ganglien zu verfolgen.

Mit der 4ten Häutung hat die Larve im 5ten Stadium eine Länge von $1^1/_2$ Mm. erreicht (Zaddach fig. 13). Nunmehr beginnt mit der in den Vordergrund tretenden Schwimmbewegung der Phyllopodenfüsse die Rückbildung des 2ten Antennenpaares und die Verkümmerung des Mandibulartasters. Der Kaurand der Mandibel zeigt 3 scharf abgesetzte Zahnfortsätze.

Die Maxille des 2ten Paares läuft median wärts fast fingerförmig in eine Borste aus, die frühste Bewaffnung des späteren Kaurandes. Man bemerkt aber weiterhin an der Aussenseite des ersten Maxillenpaares unmittelbar an der Einlenkungsstelle dieses Gliedemassenpaares ein kurze etwas gekrümmte höckerförmige Erhebung, die ich für die Anlage des fingerförmigen Anhangs halte, auf dessen Spitze die Schalendrüse nach aussen mündet.

Es sind 9 deutlich gelappte Fusspaare vorhanden, welche — mit Ausnahme des letzten — Kieferfortsätze u. Branchialsäckchen besitzen. Ein 10tes Paar ist in der Lappengliederung und 4 neue mit ihren als Höcker abgesetzten Segmenten in der Anlage

begriffen. Unter dem Integument werden noch etwa 6 kurze Querbinden als neue Segmentanlagen erkannt. Die Leberblindschläuche haben sich in dem Masse vergrössert, dass die beiden seitlichen Paare durch Einschnürungen je in 2 Abschnitte zu zerfallen beginnen, das ventrale Paar dagegen erscheint noch einfach, auf dem Querschnitt als längsovaler Sack etwa vom Ansehn einer Gehörblase, für die es zumal bei seiner Lage an der Antennenbasis auf den ersten Blick ausgegeben werden könnte. Das Herz erstreckt sich bis in das 10te Fusssegment. Die Furcalglieder erreichen nicht ganz den dritten Theil der gesammten Körperlänge, ihre Endborsten sind nunmehr beweglich abgesetzt und an ihrer Einlenkungsstelle von 3 bis 4 spitzen Stacheln umstellt.

Nachdem die Haut zum 5tenmale abgeworfen ist, hat die Larve (Zaddach fig. 14) eine Länge von 2$^{1}/_{4}$ bis 2$^{1}/_{2}$ Mm. erreicht, von welcher beinahe zwei Fünftheile auf die langgestreckten Furcalfäden kommen. Der Pigmentkörper der paarigen, einem Ganglien aufliegenden Augen kommt dem unpaaren Auge an Umfang gleich. An den Ruderantennen schreitet die Reduktion durch Verkümmerung des Kieferhakens vor, an dessen Basis jedoch die Schleifendrüse noch vollkommen intakt liegt. Der Mandibulartaster ist bis auf einen kleinen Rest geschwunden, und am Kaurand der Mandibel finden sich 5 gesonderte Zahnfortsätze, welche mehr als $^{3}/_{4}$ der Länge des Kaurandes einnehmen. Die beiden Laden des vordern Maxillenpaares erscheinen verstärkt. Es sind 11 bis 12 vollkommen gelappte mit Kieferfortsätzen versehene Fusspaare vorhanden, von denen 9 bis 10 Branchialanhänge und Fächerplatte tragen; dann folgen noch 2 kleinere undeutlich gelappte Fusspaare und 5 bis 6 kleine

Fussanlagen, so dass im Ganzen 20 abgeschnürte Segmente gezählt werden, hinter denen noch unterhalb des Integumentes 6 bis 7 neue Segmentanlagen als Querbinden erkannt werden.

In ähnlicher Weise schreitet die Umgestaltung des wachsenden Leibes in den nachfolgenden rasch sich vollziehenden Häutungen vor; die Zahl der Beinpaare mehrt sich in stetiger Zunahme, während die Rückbildung der Antennen weitere Fortschritte macht. Nach der 6ten Häutung (7 Stadium) besitzt die Larve sechs, nach der 7ten sieben, nach der 8ten acht nunmehr die ganze Länge des Kaurandes einnehmende Zähnhöcker der Mandibel, deren Taster vollkommen geschwunden ist. Das Thier hat im 9ten Stadium eine Länge von 4 Mm. erlangt, von welcher die Hälfte auf das Rückenschild kommt. Hinter der grossen 2lappigen Maxille folgt die kleine mit mehreren Borsten besetzte hintere Maxille. Der Ausbildungsgrad der Leberschläuche entspricht etwa der von Zaddach in Fig. 20 abgebildeten Larvenform, die ich auf dieses Stadium beziehe. Leider gelang es mir bisher nur selten, Larven zur weitern Entwicklung zu bringen; die bekannten parasitischen Schläuche (Amöbidium), an der Oberfläche des Körpers massenhaft angehäuft, hemmten die Bewegung und veranlassten das baldige Absterben. Die sexuellen Verschiedenheiten, welche v. Siebold an etwas weiter vorgeschrittenen Larven mit 3 Mm. langem Rückenschilde am 11ten Fusspaare beobachtete, werden bereits im neunten Stadium, dessen Mandibeln übrigens schon die vollständige Bezahnung besitzen, eingeleitet. So nahe die Vermuthung liegt, dass auch die vordere Antenne nach Zahl und Grösse der sog. Riechfäden sexuelle Unterschiede zur Ausbildung bringt, so habe ich mich doch durch den Vergleich der Fühler überzeugt, dass dieselben in beiden

Geschlechtern übereinstimmen, indem sie bei Männchen wie Weibchen an der Oberfläche des schwach säbelförmig gebogenen Endgliedes viele Hunderte jener zarten mit glänzenden Körnchen endigenden Organe tragen. Die Schalendrüse verhält sich mit ihren drei eingeschachtelten Windungen wie bei *Limnadia*, was man sehr deutlich schon an den 4 Mm. langen Larven nachweist. An der dem Schalenrand zugewendeten Aussenseite biegen äussere und innere Windung in einander um, während an der Dorsalseite (Medianseite) äussere und mittlere Windung unter Schlingenbildung zusammenhängen. Hier setzt sich der die Längsspalte begrenzende innere Gang nach aufwärts biegend bis in Gegend über der Maxille fort und wird nach seiner Vereinigung mit dem aus dem mittleren Gang hervorgehenden Drüsencanal zum Ausführungsgang der Schalendrüse.

Ueber die jüngsten *Estheria*larven will ich schliesslich zur Berichtigung der seitherigen Beschreibungen hinzufügen, dass dieselben ebenso wie die *Apus*- und *Branchipus*larven sämmtliche Gliedmassenpaare der *Nauplius*form besitzen. Das vordere Paar fehlt keineswegs, wie man bisher dargestellt hat, vollständig, sondern ist als ein subcuticularer Wulst angelegt, an dessen Spitze eine lange Borste hervorragt, also morphologisch in ähnlicher Weise differenzirt, wie das dritte Gliedmassenpaar der ausgeschlüpften *Achtheres*larve.

Fast regelmässig zieht man aus Apus-Schlamm *Daphnia brachiata*, *Cypris fusca* und eine Cyclopsart, die ich schon früher in Apuspfützen bei Cassel beobachtet und als C. minutus beschrieben hatte. Auch die Eier dieser Entomostraken vermögen also der Eintrocknung Widerstand zu leisten.

Bemerkungen über die orthogonalen Flächen.

Von

A. Enneper.

In dem »Mémoire sur les surfaces orthogonales« (Compt. rend. t. 54 p. 556—557) hat Bonnet gezeigt, dass die Bestimmung der dreifach orthogonalen Flächensysteme sich auf die Integration einer Differentialgleichung dritter Ordnung reduciren lässt und gefunden, dass die Gleichung einer Fläche einer Differentialgleichung dritter Ordnung genügen muss, wenn die Fläche einem orthogonalen Systeme angehören soll. Einen andern Beweis dieses Satzes hat Darboux aufgestellt (Annales scientif. de l'éc. norm. t. III. p. 113) und dabei den Satz aufgestellt: Schneiden sich zwei Systeme von Flächen orthogonal in Krümmungslinien, so existirt ein drittes System, welches zu den beiden Systemen orthogonal ist.

Die Beweise von Bonnet und Darboux führen zu sehr weitläufigen Rechnungen, wenn die Bedingungsgleichung aufgestellt werden soll, man kann indessen diese Gleichung auf eine derartige Form bringen, aus welcher unmittelbar hervorgeht, dass, wenn die Tangenten zu einem Systeme von Krümmungslinien einer Fläche die Normalen einer andern Fläche sind, dieses auch mit den Tangenten zum zweiten Systeme von Krümmungslinien der Fall ist. Dieses lässt sich einfach auf folgende Weise darthun.

Die Gleichung der gegebenen Fläche sei $f = 0$. Im Puncte (x, y, z) bilde die Normale mit den Coordinatenaxen die Winkel a, b, c. Nimmt man:

$$\Delta^2 = \left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2,$$

so ist:

1) $\frac{df}{dx} = \Delta \cos a, \quad \frac{df}{dy} = \Delta \cos b, \quad \frac{df}{dz} = \Delta \cos c.$

Die Differentialgleichung der Krümmungslinien lässt sich auf die Form bringen:

2) $$\begin{vmatrix} dx, & dy, & dz \\ \cos a, & \cos b, & \cos c \\ d\cos a, & d\cos b, & d\cos c \end{vmatrix} = 0,$$

wo:

3) $d\cos a = \frac{d\cos a}{dx} dx + \frac{d\cos a}{dy} dy + \frac{d\cos a}{dz} dz,$

und analog $d\cos b$ und $d\cos c$. Zur Gleichung 2) tritt noch die folgende:

$$\cos a\, dx + \cos b\, dy + \cos c\, dz = 0.$$

Sind t_0 und t Unbestimmte, so giebt die Gleichung 2):

4) $$\begin{aligned} t_0 \cos a &= t\,dx + d\cos a, \\ t_0 \cos b &= t\,dy + d\cos b, \\ t_0 \cos c &= t\,dz + d\cos c. \end{aligned}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen respective mit $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$ bildet die Summe der Producte, so folgt $t_0 = 0$. Wegen der Gleichung

3) und zweier analogen Gleichungen gehen die Gleichungen 4) über in:

$$\left(t+\frac{d\cos a}{dx}\right)dx+\frac{d\cos a}{dy}dy+\frac{d\cos a}{dz}dz=0,$$

$$5)\quad \frac{d\cos b}{dx}dx+\left(t+\frac{d\cos b}{dy}\right)dy+\frac{d\cos b}{dz}dz=0,$$

$$\frac{d\cos c}{dx}dx+\frac{d\cos c}{dy}dy+\left(t+\frac{d\cos c}{dz}\right)dz=0.$$

Die Elimination von dx, dy, dz zwischen den Gleichungen 5) führt bekanntlich in Beziehung auf t auf eine quadratische Gleichung, deren Wurzeln durch t' und t'' bezeichnet werden mögen. Sind α, β, γ die Winkel, welche die Tangente zu einer der Krümmungslinien im Puncte (x, y, z) mit den Coordinatenaxen bildet, so sind in den Gleichungen 5) die Differentiale dx, dy, dz respective $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ proportional.

Die Gleichungen 1) geben:

$$\frac{d\cos a}{dy}-\frac{d\cos b}{dx}=-\frac{1}{\Delta^2}\frac{df}{dx}\frac{d\Delta}{dy}+\frac{1}{\Delta^2}\frac{df}{dy}\frac{d\Delta}{dx},$$

oder auch:

$$\frac{d\cos a}{dy}-\frac{d\cos b}{dx}=-\frac{\cos a}{\Delta}\frac{d\Delta}{dy}+\frac{\cos b}{\Delta}\frac{d\Delta}{dx}.$$

Ebenso ist:

$$\frac{d\cos a}{dz}-\frac{d\cos c}{dx}=-\frac{\cos a}{\Delta}\frac{d\Delta}{dz}+\frac{\cos c}{\Delta}\frac{d\Delta}{dx}.$$

Die erste der vorstehenden Gleichungen multiplicire man mit $\cos\beta$, die zweite mit $\cos\gamma$ und bilde die Summe der Producte. Wendet man noch rechts die Gleichung:

$$\cos a \cos\alpha + \cos b \cos\beta + \cos c \cos\gamma = 0$$

an, so folgt:

$$\cos\beta\left(\frac{d\cos a}{dy} - \frac{d\cos b}{dx}\right) + \cos\gamma\left(\frac{d\cos a}{dz} - \frac{d\cos c}{dx}\right) =$$

$$-\frac{\cos a}{\Delta}\left(\cos\alpha\frac{d\Delta}{dx} + \cos\beta\frac{d\Delta}{dy} + \cos\gamma\frac{d\Delta}{dz}\right),$$

oder:

$$6)\qquad \cos\alpha\frac{d\Delta}{dx} + \cos\beta\frac{d\Delta}{dy} + \cos\gamma\frac{d\Delta}{dz} = \Delta . S$$

gesetzt:

$$7)\qquad \begin{aligned} \cos\beta\frac{d\cos a}{dy} + \cos\gamma\frac{d\cos a}{dz} = -S\cos a \\ + \cos\beta\frac{d\cos b}{dx} + \cos\gamma\frac{d\cos c}{dx}. \end{aligned}$$

In den Gleichungen 5) setze man nun:

$$\frac{dx}{\cos\alpha} = \frac{dy}{\cos\beta} = \frac{dz}{\cos\gamma}.$$

Die erste Gleichung 5) lässt sich dann mittelst der Gleichung 7) transformiren. Durch ganz ähnliche Betrachtungen lassen sich die beiden andern Gleichungen transformiren. Man findet so:

$$\cos\alpha\frac{d\cos a}{dx}+\cos\beta\frac{d\cos b}{dx}+\cos\gamma\frac{d\cos c}{dx}=$$

$$-t\cos\alpha+S\cos a,$$

$$\cos\alpha\frac{d\cos a}{dy}+\cos\beta\frac{d\cos b}{dy}+\cos\gamma\frac{d\cos c}{dy}=$$

$$-t\cos\beta+S\cos b,$$

$$\cos\alpha\frac{d\cos a}{dz}+\cos\beta\frac{d\cos b}{dz}+\cos\gamma\frac{d\cos c}{dz}=$$

$$-t\cos\gamma+S\cos c.$$

Die erste der vorstehenden Gleichungen in Verbindung mit:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

giebt:

$$\cos a\frac{d\cos\alpha}{dx}+\cos b\frac{d\cos\beta}{dx}+\cos c\frac{d\cos\gamma}{dx}=$$

9) $$t\cos\alpha-S\cos a,$$

$$\cos\alpha\frac{d\cos\alpha}{dx}+\cos\beta\frac{d\cos\beta}{dx}+\cos\gamma\frac{d\cos\gamma}{dx}=0.$$

Den Wurzeln t' und t'' der oben bemerkten quadratischen Gleichung für t mögen die Werthe a', b', c', S' und a'', b'', c'', S'' von α, β, γ, S entsprechen, wo S durch die Gleichung 6) bestimmt ist. Nimmt man in den Gleichungen 9) $t=t'$, so gehen dieselben über in:

$$\cos a \frac{d\cos a'}{dx} + \cos b \frac{d\cos b'}{dx} + \cos c \frac{d\cos c'}{dx} =$$

$$t\cos a' - S'\cos a,$$

$$\cos a' \frac{d\cos a'}{dx} + \cos b' \frac{d\cos b'}{dx} + \cos c' \frac{d\cos c'}{dx} = 0.$$

Zu diesen beiden Gleichungen nehme man noch die folgende:

10) $$\cos a'' \frac{d\cos a'}{dx} + \cos b'' \frac{d\cos b'}{dx} + \cos c'' \frac{d\cos c'}{dx} = P.$$

Man findet, mit Rücksicht, dass die Richtungen, bestimmt durch die Winkel:

$$a, \quad b, \quad c;$$

$$a', \quad b', \quad c';$$

$$a'', \quad b'', \quad c'';$$

gegenseitig zu einander orthogonal sind:

$$\frac{d\cos a'}{dx} = (t'\cos a' - S'\cos a)\cos a + P\cos a'',$$

$$\frac{d\cos b'}{dx} = (t'\cos a' - S'\cos a)\cos b + P\cos b'',$$

$$\frac{d\cos c'}{dx} = (t'\cos a' - S'\cos a)\cos c + P\cos c''.$$

Diese Gleichungen geben:

$$
11)\quad \begin{aligned}
&\cos b'\frac{d\cos c'}{dx}-\cos c'\frac{d\cos b'}{dx}=(\cos b'\cos c''-\cos b''\cos c')P \\
&+(t'\cos a'-S'\cos a)(\cos b'\cos c-\cos b\cos c').
\end{aligned}
$$

Die durch P bezeichnete Quantität, welche durch die Gleichung 10) definirt ist, lässt sich in jedem besonderen Falle berechnen. Setzt man weiter:

$$
12)\quad \begin{aligned}
&\cos a''\frac{d\cos a'}{dy}+\cos b''\frac{d\cos b'}{dy}+\cos c''\frac{d\cos c'}{dy}=Q, \\
&\cos a''\frac{d\cos a'}{dz}+\cos b''\frac{d\cos b'}{dz}+\cos c''\frac{d\cos c'}{dz}=R,
\end{aligned}
$$

so erhält man analog wie die Gleichung 11) die beiden folgenden:

$$
\cos c'\frac{d\cos a'}{dy}-\cos a'\frac{d\cos c'}{dy}=(\cos c'\cos a''-\cos c''\cos a')Q
$$

$$
+(t'\cos b'-S'\cos b)(\cos c'\cos a-\cos c\cos a'),
$$

$$
\cos a'\frac{d\cos b'}{dz}-\cos b'\frac{d\cos a'}{dz}=(\cos a'\cos b''-\cos a''\cos b')R
$$

$$
+(t'\cos c'-S'\cos c)(\cos a\cos b'-\cos a'\cos b).
$$

Addirt man zur Summe der beiden vorstehenden Gleichungen die Gleichung 11), so erhält man das bemerkenswerthe Resultat:

$$13)\quad \cos b' \frac{d\cos c'}{dx} - \cos c' \frac{d\cos b'}{dx} + \cos c' \frac{d\cos a'}{dy}$$
$$- \cos a' \frac{d\cos c'}{dy} + \cos a' \frac{d\cos b'}{dz} - \cos b' \frac{d\cos a'}{dz} =$$

$$\begin{vmatrix} P, & Q, & R \\ \cos a', & \cos b', & \cos c' \\ \cos a'', & \cos b'', & \cos c'' \end{vmatrix} =$$

$$\pm (P\cos a + Q\cos b + R\cos c).$$

Soll die Tangente, bestimmt durch die Winkel a', b', c' die Normale einer Fläche und deren Parallelflächen sein, so muss die Gleichung:

$$\cos a'\, dx + \cos b'\, dy + \cos c'\, dz = 0$$

die totale Differentialgleichung einer Fläche sein. Die Bedingung der Integrabilität wird dann in Folge der Gleichung 13):

$$14)\quad P\cos a + Q\cos b + R\cos c = 0.$$

Vertauscht man in der Gleichung 13) a', b', c' respective mit a'', b'', c'', so gehen in Folge der Gleichung:

$$15)\quad \cos a' \cos a'' + \cos b' \cos b'' + \cos c' \cos c'' = 0$$

und der Gleichungen 10) und 12) P, Q, R über in $-P$, $-Q$, $-R$. Hieraus folgt unmittelbar,

dass die Gleichung 14) auch die Bedingung der Integrabilität der totalen Differentialgleichung:

$$\cos a''\, dx + \cos b''\, dy + \cos c''\, dz = 0$$

enthält. Ist T eine beliebige Function von x, y, z, so giebt die Gleichung 10) mit T multiplicirt nach 15):

$$TP = \cos a'' \frac{dT \cos a'}{dx} + \cos b'' \frac{dT \cos b'}{dx} + \cos c'' \frac{dT \cos c'}{dx}.$$

Ebenso lassen sich Q und R transformiren. Statt $\cos a'$, $\cos b'$, $\cos c'$ kann man in P, Q, R Werthe setzen, welche diesen Quantitäten proportoinal sind, dasselbe gilt auch für $\cos a''$, $\cos b''$ und $\cos c''$ in der Gleichung 14).

Während die Gleichung 14) von selbst auf den zu beweisenden Satz führt, kann es in einigen Fällen zweckmässig sein, zur Anwendung auf bestimmte Flächen an Stelle dieser Gleichung eine andere zu substituiren, welche sich auf folgende Weise ergiebt. Zur Abkürzung setze man:

$$16)\quad \begin{aligned} &\frac{d^2f}{dx^2} = A, \quad \frac{d^2f}{dy^2} = A', \quad \frac{d^2f}{dz^2} = A'', \\ &\frac{d^2f}{dx\,dy} = B'', \quad \frac{d^2f}{dx\,dz} = B', \quad \frac{d^2f}{dy\,dz} = B. \end{aligned}$$

Haben α, β, γ wieder dieselbe Bedeutung wie vorhin, so giebt die Differentialgleichung der Krümmungslinien, wenn man wieder:

$$\frac{dx}{\cos\alpha} = \frac{dy}{\cos\beta} = \frac{dz}{\cos\gamma}$$

setzt, folgende Gleichungen, in denen s_0 und s zwei Unbestimmte sind:

$$s_0 \frac{df}{dx} = s\cos\alpha + A\cos\alpha + B''\cos\beta + B'\cos\gamma,$$

$$s_0 \frac{df}{dy} = s\cos\beta + B''\cos\alpha + A'\cos\beta + B\cos\gamma,$$

$$s_0 \frac{df}{dz} = s\cos\gamma + B\cos\alpha + B'\cos\beta + A''\cos\gamma.$$

Diese Gleichungen geben:

17) $$\frac{\cos\alpha}{L} = \frac{\cos\beta}{M} = \frac{\cos\gamma}{N},$$

wo:

$$\begin{vmatrix} \frac{df}{dx}, & \frac{df}{dy}, & \frac{df}{dz} \\ B'', & s+A', & B \\ B', & B, & s+A'' \end{vmatrix} = L, \quad \begin{vmatrix} \frac{df}{dx}, & \frac{df}{dy}, & \frac{df}{dz} \\ B', & B, & s+A'' \\ s+A, & B'', & B' \end{vmatrix} = M,$$

$$\begin{vmatrix} \frac{df}{dx}, & \frac{df}{dy}, & \frac{df}{dz} \\ s+A, & B'', & B' \\ B'', & s+A', & B \end{vmatrix} = N.$$

Da nun:

$$\frac{df}{dx}\cos\alpha + \frac{df}{dy}\cos\beta + \frac{df}{dz}\cos\gamma = 0,$$

so ist nach 17):

$$18)\qquad L\frac{df}{dx} + M\frac{df}{dy} + N\frac{df}{dz} = 0.$$

Diese Gleichung ist in Beziehung auf s quadratisch, wenn für L, M und N ihre obigen Werthe substituirt werden. Soll nun:

$$\cos\alpha\, dx + \cos\beta\, dy + \cos\gamma\, dz = 0$$

die totale Differentialgleichung einer Fläche sein, so ist nach 17):

$$19)\qquad \begin{aligned} &M\frac{dN}{dx} - N\frac{dM}{dx} + N\frac{dL}{dy} - L\frac{dN}{dy} \\ &+ L\frac{dM}{dz} - M\frac{dL}{dz} = 0. \end{aligned}$$

Zwischen dieser Gleichung und der Gleichung 18) ist s zu eliminiren, die resultirende Gleichung enthält dann die Bedingung, für welche die Fläche, bestimmt durch die Gleichung $f = 0$, einem orthogonalen Systeme angehören kann. Eine sehr einfache Anwendung gestatten die Gleichungen 18) und 19) auf eine besondere Form der Gleichung $f = 0$, welche zuerst Serret (Journ. de Math. A. 1847. t. XII, p. 241) ausführlicher untersucht hat und wovon Bouquet (J. d. M. T. XI, p. 446) schon früher einzelne Fälle angeführt hatte, zum Beweis, dass nicht jede Fläche, repräsentirt durch eine Gleichung

von der Form $F(x, y, z) = \alpha$, wo α ein Parameter ist, einem orthogonalen Systeme angehören kann, wie Chasles irrthümlich behauptet hatte (Journ. de l'éc. polyt. Cah. XXV).

Sei X nur von x, Y nur von y endlich Z nur von z abhängig. Man setze:

$$\frac{dX}{dx} = X', \quad \frac{d^2X}{dx^2} = X'' \text{ u. s. f.}$$

Die von Serret betrachtete Gleichung ist:

$$X + Y + Z = \alpha,$$

wo α ein variabeler Parameter ist. Setzt man zur Abkürzung:

$$(s + X)(s + Y)(s + Z) = H,$$

so findet man leicht:

$$L = \frac{X'}{s + X''} H, \quad M = \frac{Y'}{s + Y''} H, \quad N = \frac{Z'}{s + Z''} H.$$

Die Gleichungen 18) und 19) werden dann:

$$20) \qquad \frac{X'^2}{s + X''} + \frac{Y'^2}{s + Y''} + \frac{Z'^2}{s + Z''} = 0.$$

$$21) \qquad \begin{aligned} & Y'Z'(Y'' - Z'')(s + X'')^2 \frac{ds}{dx} \\ & + X'Z'(Z'' - X'')(s + Y'')^2 \frac{ds}{dy} \\ & + X'Y'(X'' - Y'')(s + Z'')^2 \frac{ds}{dz} = 0. \end{aligned}$$

Die Gleichung 20) giebt nach x differentiirt:

$$\left[\frac{X'^2}{(s+X'')^2}+\frac{Y'^2}{(s+Y'')^2}+\frac{Z'^2}{(s+Z'')^2}\right]\frac{ds}{dx}=$$

$$\frac{2(s+X'')X'X''-X'^2X'''}{(s+X'')^2}.$$

Mittelst dieser Gleichungen und der analogen Differentialquotienten von s nach y und z nimmt die Gleichung 21) folgende Form an:

$$\begin{vmatrix} X'X'''-2X''^2, & Y'Y'''-2Y''^2, & Z'Z'''-2Z''^2 \\ 1, & 1, & 1 \\ X'', & Y'', & Z'' \end{vmatrix}=0,$$

was in etwas veränderter Schreibweise die von Serret aufgestellte Bedingungsgleichung ist. Bei dieser Gelegenheit seien noch folgende Systeme bemerkt, welche sich durch besondere Annahmen ergeben und in den von Serret gefundenen Resultaten sich nicht vorfinden. Es sind α, β, γ Parameter, p, m, n ganze Zahlen. Das erste System ist folgendes:

$$\frac{x^m y^n}{z^{m+n}}=\alpha,\quad x^2+y^2+z^2=\beta,$$

$$\frac{\dfrac{x^2}{m}+\dfrac{z^2}{m+n}}{\dfrac{y^2}{m}+\dfrac{z^2}{m+n}}=\gamma.$$

Diese Gleichungen verificiren sich leicht geometrisch. Ist a eine Constante, $i = \sqrt{-1}$, sind die Zahlen p, m, n durch die Gleichung verbunden:

$$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2}$$

so geben folgende Gleichungen ein orthogonales System:

$$\frac{(\cos m a x i)^{\frac{1}{m^2}} (\cos n a q i)^{\frac{1}{n^2}}}{(\cos p a z)^{\frac{1}{p^2}}} = \alpha,$$

$$\frac{(\sin m a x i)^{n^2} (\sin n a y i)^{m^2}}{(\sin p a z)^{m^2 + n^2}} = \beta,$$

$$\frac{\sin^2 p a z - \sin^2 m a x i}{\sin^2 p a z - \sin^2 n a y i} = \gamma.$$

Sollen die Flächen reell sein, so muss $m + n$ durch 2 theilbar sein.

Zur Kenntnis einiger wenig bekannten Binnenwürmer.

Von **Oscar Grimm**, in St. Petersburg.

Vorgelegt von J. Henle.

Indem eine genaue Beschreibung meiner neuesten Untersuchungen im Gebiet der Helminthologie in russischer Sprache in den Abhandlungen der Petersburger Naturforschergesellschaft erscheinen wird, nehme ich mir die Freiheit dieselbe der k. Societät im Auszuge vorzulegen.

Taenia sagitta m.

Der berühmte Helmintholog Rudolphi erwähnt in seinem Werk Entozoorum Synopsis S. 144 eines Bandwurmes, den er im Darme von Cobitis barbatula aufgefunden hat. Da er aber nur ein Fragment, nicht aber ein volles Exemplar des Wurmes besass, so gab er auch keine eingehendere Beschreibnng dieser als neu von ihm erkannten Art, sondern stellte sie grade zu den Grubenköpfen und belegte sie mit dem Namen Bothriocephalus barbatulae. Diesing stellte diese Art in seinem Systema helminthum zu den Species dubiae und setzte zu dem von Rudolphi gesagten nur noch hinzu, dass »Fragmenta acephala servantur im M. C. V«. (Syst. helm. I. p. 608.). Etwas umständlicher spricht sich S. Leuckart aus über das Aussehen dieses Helminthen, indem er sagt, »an dem sehr kleinen kopflosen Stücke, das ich sah, war nichts Ausgezeichnetes. Die Glieder länger als breit, oder vollkommen quadratisch. Keine deutlichen Ovarien (Sig. Leuckart, Zoologische Bruchstücke. I. p. 57.). Das ist Alles, was wir von diesem Bandwurme kennen und deshalb wird wohl nicht überflüssig sein, wenn ich im folgen-

den die Resultate meiner anatomischen Untersuchung kurz zusammen fassen werde, die ich an diesem Wurm unlängst angestellt habe.

Ich fand nämlich hier, in Petersburg, und im Nowgorod'schen Gouvernement 3 erwachsene Exemplare des Wurms in Cobitis barbatula, nachem ich einige Hunderte dieses so häufig in unseren kleineren Flüssen vorkommenden Fischchens durchmustert hatte. Aus dem Gesagten geht schon hervor, dass dies ein sehr seltner Wurm sein muss. Hier muss ich noch bemerken, dass, dem Kopfe nach, dieser Wurm der Taenia filicollis Rud. nicht unähnlich ist, sich aber von ihr durch die längeren Glieder, wie wir es unten sehen werden, unterscheidet.

Die Länge des grössten Exemplares betrug 45 Mm. bei einer Breite von 1 Mm. Der Kopf ist verdickt und endigt mit einer Spitze die keine Hacken trägt; die 4 Saugnäpfe liegen paarweise auf der Grundhälfte des Kopfes; sie sind etwas in die Quere verlängert und stark muskulös, weshalb der Wurm auch so fest an die Wände des Darms sich ansaugt, dass man beim Einsammeln sehr vorsichtig sein muss, wenn man nicht »Fragmenta acephala« erhalten will. Das zu seiner Basis verengte Köpfchen geht in den ziemlich dünnen Hals über, welcher ungefähr 12 Mm. lang und 0,5 Mm. breit ist. Hinter dem Halse fängt die Kette an, in der ich 23 einzelne Glieder gezählt habe. Die ersten, resp. jüngsten Glieder sind fast vollkommen quadratisch; weiterhin werden sie etwas länger, so dass die letzten acht Glieder 1,4 bis 1,5 Mm. lang sind; dabei beträgt ihre Breite 1 Mm., bei einer Dicke von nur 0,3 Mm., so dass der Wurm vollkommen plattgedrückt erscheint. Das letzte Glied ist immer von hinten abgerundet. Dies

ist alles was wir an einem unlädirten Exemplare zu sehen bekamen.

Wenn wir nun aber einzelne zuvor mit Carmin und Glycerin bearbeitete Glieder und dünne Querschnitte unter dem Mikroskop untersuchen, so überzeugen wir uns, dass der Bau der Körpermasse dieses Bandwurmes sich überhaupt durch nichts von dem Bau anderer Bandwürmer unterscheidet. Wir finden hier wie auch bei Cyathocephalus trumcatus, dass der Körper aus folgenden Elementen besteht: — aus der körnchenreichen Grundsubstanz, die von sich schlängelnden dorso-ventralen Muskelbündeln durchsetzt wird; einer Schicht Längenmuskeln und einer Schicht Quer- oder Ringmuskeln, einer Schicht feinkörniger Rindensubstanz, in der die Enden der dorso-ventralen Muskeln liegen, und endlich der sehr feinen äusseren Haut, die gar keine Muskeln besitzt. In der Längsaxe eines jeden reifen Gliedes liegt das centrale Rohr des Eierstocks, welcher aber manchmal näher zur einen oder andern flachen Seite zu liegen kommt, wie man es auf den Querschnitten bemerkt. Von diesem Centralrohr verlaufen nach beiden Seiten zu unregelmässig gebogene und theils sich auch verzweigende Ausläufer, die in ihrer Lage mittelst der dorso-ventralen Muskeln erhalten werden. In der Mitte des Hauptrohres geht von ihm die Scheide ab, die, nachdem sie eine schwache Biegung gemacht hat, sich in der Mitte der seitlichen Oberfläche des Gliedes nach aussen öffnet; die Scheide ist ziemlich breit, so dass die Eier sie leicht passiren können. In dem von mir untersuchten Exemplare waren die Eier in der Mehrzahl der Glieder vollkommen reif; — sie enthielten eine grob und- feinkörnige Masse und waren mit einer ziemlich dicken

Haut umgeben. Aber wie in diesen reifen Gliedern, so auch in den jüngeren bin ich nicht im Stande gewesen die sog. Dotterstöcke aufzufinden; ob sie hier so früh verschwinden, oder zu fein sind, weiss ich nicht; auf den Querschnitten sind sie aber nicht anfzufinden.

Gleich über der Scheide liegt und öffnet sich nach aussen das männliche Zeugungsorgan; dasselbe besteht aus einem ziemlich grossen und kolbenförmigen Cirrusbeutel, in dem der eingezogene Cirrus liegt; der Cirrus ist ziemlich dick und am Grunde dünner als am Ende; dessen Kanal ist durch den Cirrusbeutel zu sehen. In den Wänden des Cirrusbeutels trafen wir, wie immer, Längs- und Quermuskeln. Die Samendrüsen waren nicht zu sehen.

Dies ist alles was ich von dem Bau des Bandwurmes erfahren konnte. Die Unvollkommenheit meiner Untersuchung wurde aber durch den Mangel an Material bedingt. Dennoch aber fühle ich mich berechtigt zu sagen, dass auch dies Wenige genügt, um dem beschriebenen Bandwurm seine natürliche Stellung in der Reihe seines Gleichen anzuweisen und somit die Zahl der zweifelhaften Arten zu beschränken.

Noch muss ich hinzusetzen, dass aus dem Gesagten doch klar ist, dass ich wohl mich nicht irre, indem ich den von mir aufgefundenen Wurm als dem Bothriacephalus barbatulae Rud. identisch halte.

Taenia ambigua Duj.

Im Darme des bei uns so häufig vorkommenden Stichlings (Gasterosteus aculeatus), von denen ich im vergangenen Sommer mehr als 100 aufgeschnitten habe, fand ich unter andern 6 Exemplare einer Bandwurmgattung. Sie unterscheiden sich sehr leicht von allen ihren Ver-

wandten und sind augenscheinlich zu der von Dujardin aufgestellten Species Taenia ambigua zu rechnen, obgleich die Bestimmung, einer kurzen Beschreibung des äusseren Habitus nach, höchst schwierig ist und sehr leicht zu einem Irrthum führen kann.

Das grösste von mir aufgefundene Exemplar hatte 30 Mm. Länge und 1 Mm. Breite. Die Grössenverhältnisse der einzelnen Körpertheile eines 11,5 Mm. langen Exemplars sind folgende: die Länge des Köpfchens — 0,13 Mm., dessen Breite — 0,25 Mm., dessen Dicke — 0,15 Mm., der Durchmesser der Saugnäpfe — 0,05 Mm., die Länge des Halses — 1,1 Mm., die Länge der ersten unreifen Glieder — 0,014 Mm.; dieselben verlängern sich allmälig, indem sie 0,02 Mm., 0,03 Mm. u. s. w. lang werden; reifere Glieder, ungefähr aus der Mitte des Wurms, haben eine Länge von 0,20 M., und das vollkommen reife vorletzte Glied ist 0,43 Mm. lang. Die Dicke des Wurmkörpers steigt bis zu 0,5 Mm.

Das Köpfchen des Wurms von der Seite betrachtet, erscheint etwas angeschwollen; wenn man es von der Fläche betrachtet, so sieht man an den in Weingeist conservirten Exemplaren eine Furche, die über den Kopf, an dessen freiem Ende, von der einen flachen Seite des Wurms zur andern verläuft. Diese Furche ist aber gewiss keine constante Bildung, wird aber dadurch hervorgerufen, dass der Wurm, überhaupt sehr contractil, sein Köpfchen öfters einzieht, namentlich wenn er in Weingeist gelegt wird. Einen Rüssel besitzt er nicht. Die Saugnäpfe, die eine runde Form haben, sind paarweise auf den den flachen Seiten des Körpers entsprechenden Kopftheilen angeordnet. Die Geschlechtsöffnungen liegen am Rande der Glieder, eine über der andern. Alle Glieder, die mit dem Alter allmählig breiter

werden, haben eine ziemlich unregelmässige Form, besonders aber ihre Ränder. Die Farbe des Wurms ist rein weiss. Indem wir noch hinzusetzen, dass das letzte Glied an seinem hintern Rande beständig etwas aufgeschlitzt ist, haben wir eine möglichst vollständige Darstellung des Aeussern des Bandwurms geliefert.

Dieser Bandwurm ist höchst zart, was der Anfertigung der Schnitte für das Mikroskop sehr hinderlich erscheint, und gar nicht zulässt, die Haut von einem ganzen Gliede abzuziehen, was bekanntlich eine sehr vortheilhafte Untersuchungsmethode darstellt. Auf den Querschnitten erkennen wir nun, dass diese Zartheit von der schwachen Entwicklung der äusseren Haut und der Muskelbündel der drei bekannten Systeme abhängt, und noch durch den jugendlichen Zustand der Grundsubstanz vermehrt wird. Die Grundsubstanz besteht im vordern Körpertheile, d. h. in den jüngeren Gliedern, aus feinen, polygonalen und mehr oder weniger abgerundeten Zellen, in denen der Kern zu sehen ist. Diese Zellen sind durch eine feinkörnige Masse unter einander verbunden. In den ältern Gliedern werden diese Zellen seltner, nehmen öfters eine unregelmässige Form an und scheinen abgestorben zu sein; die sie unter einander verbindende feinkörnige Masse nimmt aber zu, so dass sie endlich den ganzen inneren Raum des Gliedes einnimmt und die Reste der Zellen, sowie auch die stark lichtbrechenden Körper enthält. In dieser Grundsubstanz liegen die Geschlechtsorgane und die Muskulatur. Die letztere besteht auch hier aus den für Taenia sagitta beschriebenen 3 Systemen; nur weichen die Muskeln hier dadurch ab, dass sie ungemein dünn und zart sind, so dass die Längs- und Ringmuskeln eine sehr dünne Schicht bilden, die kaum von der Rindenschicht

und der Grundsubstanz absticht, und die dorsoventralen Muskeln sind auch kaum bemerkbar. Ebenso ist auch die äussere Haut sehr fein, dagegen ist die Rindenschicht zu der Grösse des Wurms verhältnissmässig entwickelt.

Von dem weiblichen Geschlechtsorgan habe ich nur die Keimdrüse und den Uterus aufgefunden; die Keimdrüse liegt in der Mitte des Gliedes und hatte in dem untersuchten Stadium ein spindelförmiges Aussehen; von ihr geht der Uterus aus, der aus einem Rohre mit feinen faserigen Wandungen besteht, das mehrere Schlingen bildet. Der Uterus verläuft in die Scheide, die sich zum Seitenrande des Gliedes begiebt, wo sie nach aussen mit einer ziemlich grossen Oeffnung mündet.

Neben dem weiblichen Geschlechtsporus liegt eine andere Oeffnung, die in das männliche Geschlechtsorgan führt. Das letzte besteht aus dem kolbenförmigen Cirrrusbeutel mit dem nach innen gewendeten Cirrus, der an seinem Ende etwas anschwillt. Hinter dem Cirrusbeutel liegt die doppelte Samendrüse.

In dem letzten, also am meisten entwickelten Gliede waren nur Keime, nicht aber entwickelte Eier zu sehen.

Ueber das Vorkommen des Echinorhynchus polymorphus im Flusskrebs.

Im November des vorigen Jahres fand ich hier in Petersburg fast in allen von mir geöffneten Flusskrebsen (Astacus fluviatilis) eine Menge röthlicher, ovaler Körper, die an der äusseren Oberfläche des Darms befestigt waren. Diese vollkommen regelmässig ovalen Körper hatten 1,7 Mm. Länge und 0,7 Mm. Breite; sie waren

sehr hart, so dass ich ein scharfes Rasiermesser gebrauchen musste, um sie beim Schneiden nicht zu zerdrücken. Das Eine, hintere Ende der röthlichen Hülle ist nach innen gewendet, wo es eine ziemlich tiefe Einbuchtung bildet. Ausser dieser Hülle war noch eine zweite, äussere zu sehen, die sehr fein und strukturlos erschien und eine Spindelform hatte. Ins Wasser gelegt, streckte sich aus dem vordern Ende erst ein mit Hacken besetzter Rüssel, und dann auch der vordere ebenfalls mit kleinen Flöckchen bedeckte Körpertheil des im Innern der röthlichen Hülle sich befindenden Geschöpfs[1]). Dies ist ein Kratzer, und im vordern Körpertheil sind sehr gut die Rüsselscheide und die Lemnisken zu sehen. Wie diese, so sind auch die andern Organe, die Geschlechtswerkzeuge, schon vollkommen entwickelt gewesen; ja sogar auch die zwar noch unreifen Eierklumpen lagen schon im sog. Ligamentum suspensorium, welches sie stark anschwellten.

Nach der von mir angestellten genauen Untersuchung des ganzen Organismus, bin ich zu der Ueberzeugung gekommen, dass dies junge Echinorhynchus polymorphus sind. Pr. v. Siebold hatte also vollkommen Recht, indem er den von ihm im Flusskrebs aufgefundenen Kratzer als Echinorhynchus miliarius erkannte[2]). Aber auch Greef hat nicht Unrecht, indem er meint dass hier, im Flusskrebs, der Echinorhynchus

1) Eine Abbildung dieses halbhervorgestreckten Echinorhynchen, der wahrscheinlich eben erst in den Magen des neuen Wirthes angelangt ist und noch seine Embryonalhülle nicht abgestreift hat, finden wir bei Goeze, Naturg. der Eingeweidewürmer. Tab. XIII, Fig. 2 p. 165. »Der kleine Kratzer der wilden Ente.«

2) Dr. C. E. v. Siebold, Helminthologische Beiträge. Archiv f. Naturg. Bd. I. p. 64.

miliarius nie seine vollkommene Reife erreichen wird.[3]) Da Ech. miliarius (auch Gregarina miliaria), d. h. junge Ech. polymorphus im Gammarus wohnen und zur geschlechtlichen Entwicklung im Darme der Enten und Gänse kommen, und die letzteren wohl keine Flusskrebse als Nahrung gebrauchen, so ist natürlich das Vorfinden dieser Kratzer in dem Flusskrebs sehr sonderbar. Wenn wir aber in Betracht nehmen, dass die im Flusskrebs aufgefundenen Echinorhynchen vollkommen entwickelt sind, und sich nur von ihren Embryonalhüllen nicht befreien können, da dazu die Einwirkung des Magensaftes des entsprechenden Wirthes nöthig ist, so können wir wohl annehmen, dass die Embryonen dieses Kratzers ins Innere des Flusskrebses auf demselben Weg kommen, wie auch in die kleineren Krebse (Gammarus), und da sie hier ähnliche Verhältnisse vorfinden, so entwickeln sie sich auch bis zu dem Stadium, wo sie ihre Embryonalhüllen abwerfen müssen. Da sie aber mit ihrem Wirth nicht in den Magen gewisser Wasservögel gelangen, so können sie, vollkommen entwickelt, nicht zur Geschlechtsreife kommen. Es kann immer sein, dass sie manchmal dennoch auf irgend eine Weise in einen entsprechenden Vogelmagen gelangen, und dann entwickeln sie sich gewiss zu Ech. polymorphus, wie auch diejenigen aus Gammarus; im entgegengesetzten Fall aber werden sie wohl im Flusskrebs sterben müssen, indem sie ihre Geschlechtsreife nicht erreichen.

Ueber das Vorkommen der Ascaris dentata Rud. in der Leber von Cobitis barbatula.

In der Leber des Cobitis barbatula fand ich

3) Greef, Untersuchungen über Ech. miliarius. Archiv f. Naturg. 1864 H. 1. p. 107.

immer ziemlich harte, wie aus Körnchen bestehende Körper runder oder etwas verlängerter Gestalt, die im Durchmesser ungefähr 1 Mm. hatten. Die Zahl solcher in einer Leber eingeschlossener Körper war manchmal nur 3 oder 4, öfter aber belief sie sich bis auf 20, 30 und auch sogar mehr. Beim Oeffnen dieser Körper, resp. Kapseln, erwies sich, dass sich in ihnen kleine runde Würmer befanden, die bald in eine Spirale, bald unregelmässig zusammengerollt da lagen. Die Zahl der in einer Kapsel sich befindenden Nematoden wechselt von 1 bis 5. Die grössten Exemplare hatten 5 Mm., und die kleinsten 2,5 Mm. in die Länge. Sie sind vollkommen entwickelt, so dass ich sie mit voller Gewissheit als zu Ascaris dentata angehörend bestimmen konnte. Ich werde hier nichts von ihrer von mir untersuchten Anatomie mittheilen, will nur hervorheben, dass sie Polymyarier sind. Unter allen von mir durchmusterten Exemplaren, deren Zahl sich wohl bis auf einige Hunderte belief, war kein einziges Männchen zu sehen, so dass in mir der Gedanke auftauchte, ob hier nicht eine ungeschlechtliche Fortpflanzung stattfindet; da ich aber die in dieser Hinsicht unternommenen Experimente, Reise halber, abbrechen musste, konnte ich diese Frage auch nicht entscheiden. Ich denke aber, dass ich dabei schwerlich etwas verloren habe, denn schwerlich ist meine Vermuthung richtig gewesen; aber wohl werden diese jungen Nematoden auf passivem Wege in den Magen eines neuen Wirthes einwandern, und dies ist der gemeine Kaulbarsch (Acerina cernua), da nur im Darme dieses Fisches Ascaris dentata bis jetzt von mir hier aufgefunden worden ist. Bemerkenswerth ist aber, dass der so häufig in der Leber von Cobitis

barbutala vorgefundene Wurm nur sehr selten im reifen Zustande im Kaulbarsche sich vorfindet, und zwar habe ich nur 4 Exemplare desselben aus nahezu 100 Kaulbarschen einsammeln können.

Vorläufige Bemerkung über leichte Abspaltung von Blausäure aus Nitro-, Dinitrobenzol und ähnlichen Verbindungen.

Von **Julius Post** und **H. Hübner.**

Wohl absichtlich ist in die wenigsten Lehrbücher[1]) die schon im Jahre 1828 von Wöhler[2]) gemachte merkwürdige Beobachtung übergegangen, dass die Pikrinsäure beim Behandeln mit Barytwasser Blausäure abscheidet. Diese Angabe musste bei der sonst beobachteten grossen Beständigkeit der Benzolabkömmlinge unwahrscheinlich erscheinen.

Bei Gelegenheit von Versuchen über Nitrophenole beobachteten wir die auffallende Thatsache, dass sogar Dinitrobenzol beim Kochen mit Kali- oder Natron-Lauge rasch eine Zersetzung erleidet unter Abscheidung von Blausäure. Dieselbe wurde als Berlinerblau und Cyansilber nachgewiesen. Die Reinheit des Dinitrobenzols wurde durch den Schmelzpunkt (90°) und eine Verbrennung festgestellt. Die Alkalilauge war auf einen Gehalt an Blausäure geprüft worden und wurde bei den später wiederholten Versuchen aus Natrium bereitet.

Weitere Versuche in dieser Richtung haben bis jetzt gezeigt, dass selbst ganz verdünnte Lauge bei längerem Kochen mit Dinitrobenzol eine erhebliche Menge von Blausäure aus dem

1) In den Lehrbüchern von Gerhardt, Kolbe, Kekulé, Limpricht fehlt diese Angabe.
2) Pogg. Ann. 13,488.

Molekül der Benzolverbindung abscheidet. Auch Mononitrobenzol liefert mit schmelzendem Kali kurze Zeit in Berührung gebracht Blausäure. Ob diese Zersetzung selbst beim Behandeln mit verdünnter Kalilauge gelingt ist noch nicht entschieden.

Nach diesen Beobachtungen konnte es kaum zweifelhaft sein, dass sich die Pikrinsäure ebenso wie die nitrirten Kohlenwasserstoffe verhält, da in ihr der Benzolkohlenstoff durch die Verbindung mit 4 chemisch negativen Gruppen vielmehr als in den nitrirten Kohlenwasserstoffen gelockert ist. Als wir das Verhalten der Pikrinsäure zur Kalilauge prüften, konnten wir die Angaben von Wöhler vollständig bestätigen.

Wir sind damit beschäftigt, diese Versuche auf möglichst viele Nitro- und Amido-Verbindungen auszudehnen um solche Verbindungen herauszufinden, aus welchen neben der Blausäure zur Untersuchung geeignete Spaltungstheile entstehen, da dies bei den Nitrobenzolen nicht der Fall zu sein scheint.

Göttingen den 2. Mai 1872.

Bemerkungen über die Pole eines Stabmagnetes

von **Eduard Riecke**.

(Vorgelegt von Wilhelm Weber.)

Wenn wir die Wirkung eines magnetischen Körpers auf einen ausserhalb desselben gelegenen Punkt betrachten, so können wir uns die Aufgabe stellen, ein System von zwei magnetischen Polen so zu bestimmen, dass es auf den betrachteten Punkt dieselbe Wirkung ausübe wie der

gegebene Magnet. Diese Aufgabe wird zunächst eine unendliche Zahl von Lösungen zulassen; zu einer bestimmten wird sie erst, wenn wir an das System der beiden Pole noch die folgenden Anforderungen stellen:

1. *Die in denselben vereinigt gedachten magnetischen Massen sollen gleich gross aber entgegengesetzt sein.*

2. *Das magnetische Moment des von den beiden Polen gebildeten Systems soll gleich sein dem magnetischen Moment des gegebenen Körpers.*

3. *Die beiden Pole sollen auf einer gegebenen geraden Linie z. B. der magnetischen Axe des Körpers symmetrisch zu einem auf dieser Geraden gegebenen Punkt etwa dem Mittelpunkt des Magnets gelegen sein.*

Unbestimmt bleibt dann nur noch der Abstand der beiden Pole von einander und zu der Bestimmung dieses Abstandes wird die zu Anfang gestellte Bedingung dienen, dass die Wirkung der beiden Pole für einen gegebenen äusseren Punkt identisch sein soll mit der Wirkung des gegebenen Magnets.

Aus dieser letzteren Bedingung ergiebt sich unmittelbar, dass die Lage der Pole abhängt von der Lage des gegebenen äusseren Punktes, dass also im allgemeinen für jeden anderen gegebenen Punkt die Lage der Pole eine andere sein wird, wie diess Lamont, Handbuch des Magnetismus S. 295 für den Fall eines Linearmagnetes weiter ausgeführt hat.

Von practischer Bedeutung ist die Frage nach den Polpunkten besonders in zwei Fällen magnetischer oder galvanischer Massbestimmung, einmal bei der Bestimmung eines Stabmagnetismus aus der Ablenkung einer Magnetnadel, und dann bei der Bestimmung einer Stromstärke mit

der Tangentenboussole. Es erschien desshalb nicht ohne Interesse diese beiden Fälle etwas eingehender zu behandeln.

Die Voraussetzungen, von welchen wir hierbei ausgehen werden, sind folgende:

1. *Der betrachtete Magnet gleichgültig ob Ablenkungsstab oder Nadel einer Tangentenboussole besitzt drei zu einander senkrechte Symmetrieebenen.*

2. *Die ideale Vertheilung des Magnetismus an der Oberfläche des Magnets sei symmetrisch gegen dieselben drei Ebenen, so dass also der mit negativer magnetischer Masse belegte Theil der Oberfläche des Magnets von dem mit positiver Masse belegten durch eine der Symmetrieebenen geschieden wird.*

3. *Die Entfernung derjenigen Punkte oder Stromelemente, für welche die zugehörigen Polpunkte des Magnets bestimmt werden sollen, von dem Mittelpunkt des letzteren sei so gross, dass die fünften Potenzen der Dimensionen des Magnets vernachlässigt werden könnnen gegen die fünfte Potenz jener Entfernung.*

I. Pole eines Ablenkungsstabes.

Den Mittelpunkt des Ablenkungsstabes machen wir zum Mittelpunkt, die Symmetrieaxen zu Axen eines rechtwinkligen Coordinatensystemes, durch dessen yz Ebene die mit entgegengesetzter magnetischer Masse belegten Theile der Oberfläche des Stabes von einander getrennt sein mögen, es wird dann die x Axe des Systemes zusammenfallen mit der magnetischen Axe des Stabes. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf die Wirkung, welche der Stab ausübt auf einen in der xy Ebene gelegenen Punkt mit den Coordinaten $a\, b$. Irgend ein Punkt der Ober-

fläche des Stabes sei belegt mit der nordmagnetischen Masse μ; das Potential dieser Masse auf den Punkt P ist dann gleich

$$\frac{\mu}{r}$$

wo

$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2.$$

Führen wir an Stelle der rechtwinkligen Coordinaten Polarkoordinaten ein durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} x &= \varrho \cos\vartheta \cos\varphi & a &= e\cos\alpha \\ y &= \varrho \cos\vartheta \sin\varphi & b &= e\sin\alpha \\ z &= \varrho \sin\vartheta \end{aligned}$$

und setzen wir:

$$\cos\vartheta \cos(\alpha - \varphi) = u$$

so ergiebt sich durch Entwicklung nach Potenzen von $\frac{\varrho}{e}$ für das Potential der Werth

$$\frac{\mu}{e}\left\{1 + \frac{\varrho}{e}P^1(u) + \frac{\varrho^2}{e^2}P^2(u) + \frac{\varrho^3}{e^3}P^3(u) + \frac{\varrho^4}{e^4}P^4(u)\right\}$$

wo P^1, P^2, P^3, P^4 Kugelfunktionen erster bis vierter Ordnung von u.

Dem Punkte (x, y, z) mit der Masse μ diametral gegenüber liegt auf der Oberfläche des Stabes ein Punkt mit den Coordinaten $(-x, -y, -z)$ r der Masse $-\mu$. Für das Potential dieses Punkts auf den Punkt P ergiebt sich der Werth:

$$-\frac{\mu}{e}\left\{1 + \frac{\varrho}{e}P^1(-u) + \frac{\varrho^2}{e^2}P^2(-u) + \frac{\varrho^3}{e^3}P^3(-u) + \frac{\varrho^4}{e^4}P^4(-u)\right\}$$

Das von den beiden betrachteten Punkten zu-

sammengenommen auf den Punkt P ausgeübte Potential ist demnach

$$\frac{2\mu}{e}\left\{\frac{\varrho}{e}P^1(u)+\frac{\varrho^3}{e^3}P^3(u)\right\}$$

Bilden wir diesen Ausdruck für sämmtliche auf der Oberfläche des Stabes vertheilte erdmagnetische Massen μ und addiren wir alle so erhaltenen Terme, so erhalten wir das von der gesammten Oberflächenbelegung oder von dem gegebenen Stabmagnete selbst ausgeübte Potential. Es ergiebt sich demnach für dieses Potential der Werth

$$W=\frac{2}{e^2}\Sigma\mu\varrho P^1(u)+\frac{2}{e^4}\Sigma\mu\varrho^3P^3(u)$$

wo die Summen sich hinerstrecken über die mit nordmagnetischem Fluidum belegte Hälfte der Oberfläche; eine weitere Ausführung dieser Summen mit Rücksicht auf die vorausgesetzten Symmetrieverhältnisse giebt:

$$\Sigma\mu\varrho\, P^1(u) = 4\cos\alpha\,\Sigma\mu x$$

$$\Sigma\mu\varrho^3P^3(u) = \cos\alpha\left\{\begin{array}{l}(10\cos^2\alpha-6)\,\Sigma\,\mu x^3\\+(30\sin^2\alpha-6)\,\Sigma\,\mu x y^2\\-6\,\Sigma\mu x z^2\end{array}\right\}$$

wo die Summen nur noch über denjenigen Theil der Staboberfläche zu erstrecken sind, welcher innerhalb der durch die positiven Zweige der Coordinatenaxen gebildeten Oktanten liegt.

Setzen wir nun an Stelle des gegebenen Magnetes zwei magnetische Pole mit den Massen M und $-M$, welche zu beiden Seiten des Mittelpunctes in dem Abstande $2L$, auf der x-Axe gelegen sind, so ist das Potential derselben auf den Punkt P

$$V = \frac{2}{e^2} M L P^1(\cos\alpha) + \frac{2}{e^4} M L^3 P^3(\cos\alpha)$$

Die beiden Potentiale V und W werden identisch sein wenn in den für dieselben gegebenen Ausdrücken die Coefficienten der entsprechenden Potenzen von e gleich sind, wir erhalten demnach die Beziehungen

$$\text{I.} \quad M L\, P^1(\cos\alpha) = \Sigma \mu \varrho\, P^1(u)$$

$$\text{II.} \quad M L^3 P^3(\cos\alpha) = \Sigma \mu \varrho^3 P^3(u)$$

aus welchen sich die Werthe von M und L bestimmen lassen.

Führen wir an Stelle von $P^1(\cos\alpha)$ und $P^3(\cos\alpha)$ die bekannten Werthe dieser Functionen, an Stelle der auf der rechten Seite befindlichen Summen die oben gegebenen Ausdrücke ein, so reducirt sich die erste Gleichung auf:

$$\text{I}'. \qquad M L = 4 \Sigma \mu x$$

d. h. die erste Gleichung ist identisch mit der von uns zu Anfang gestellten Forderung dass das magnetische Moment des von den beiden Polen gebildeten Systemes gleich sein soll dem magnetischen Moment des gegebenen Stabes. Durch Elimination von M ergiebt sich dann zur Bestimmung von L

$$\text{II}'. \quad L^2 = \frac{\Sigma \mu x^3}{\Sigma \mu x} - 3\, \frac{5\sin^2\alpha - 1}{5\sin^2\alpha - 2}\, \frac{\Sigma \mu x y^2}{\Sigma \mu x} + \frac{3}{5\sin^2\alpha - 2} \cdot \frac{\Sigma \mu x z^2}{\Sigma \mu x}.$$

Hat der betrachtete Magnet insbesondere die Gestalt eines Rotationskörpers, welcher die x Axe zur Retationsaxe hat, so ist

$$\Sigma \mu x y^2 = \Sigma \mu x z^2$$

und es ergiebt sich dann:

$$L^2 = \frac{\Sigma \mu x^3}{\Sigma \mu x} . - 3 . \frac{\Sigma \mu x y^2}{\Sigma \mu x}$$

Wir können die in diesen Formeln enthaltenen Resultate folgendermassen zusammenfassen.

Um den Mittelpunkt des Stabmagnets beschreiben wir in einer durch seine Axe hindurch gehenden Symmetrieebene einen Kreis mit eieinem solchen Halbmesser R, dass die fünfte Potenz der Länge des Magnets vernachlässigt werden kann gegen die fünfte Potenz von R.

Mit Bezug auf alle ausserhalb jenes Kreises R auf einem durch den Mittelpunkt des Magnets gezogenen Radius liegenden Punkte können wir dann den Magnet ersetzen durch ein und dasselbe Paar magnetischer Pole, dagegen ändert sich die Lage der Polpunkte mit der Richtung der Radien.

Nur wenn der betrachtete Magnet die Gestalt eines Rotationskörpers besitzt, dessen Axe mit der magnetischen Axe zusammenfällt, ist die Lage der Polpunkte unabhängig von der Richtung der Radien, das Polpaar also für sämmtliche ausserhalb des Kreises R liegenden Punkte ein und dasselbe.

Für ein gleichförmig magnetisirtes Ellipsoid z. B. ergiebt sich zur Bestimmung der Lage der Polpunkte die Gleichung

$$L^2 = \frac{3}{5} a^2 - \frac{3}{5} . \frac{5 \sin^2 \alpha - 1}{5 \sin^2 \alpha - 2} b^2 + \frac{3}{5} . \frac{1}{5 \sin^2 \alpha - 2} . c^2$$

wobei vorausgesetzt ist, dass die magnetische Axe des Ellipsoids zusammenfällt mit der Hauptaxe a und dass der betrachtete äussere Punkt in der Ebene der Axen a, b gelegen ist.

Insbesondere wird für $b = c$

$$L^2 = \frac{3}{5}(a^2 - b^2)$$

II. Pole der Nadel einer Tangentenboussole.

Den Mittelpunkt des Stromkreises machen wir zum Mittelpunkt eines mit demselben fest verbundenen Coordinatensystemes x, y, z, dessen $x\,y$ Ebene mit der Ebene des Kreises zusammenfällt; die x Axe denken wir uns horizontal, die y Axe vertikal nach oben gerichtet; letztere sei gleichzeitig die Axe um welche sich die im Mittelpunkte des Kreises aufgehängte Nadel dreht. Mit der Nadel denken wir uns fest verbunden ein Coordinatensystem ξ, η, ζ dessen Axen zusammenfallen mit den Symmetrieaxen derselben. Die Ebene $\eta\,\zeta$ möge wiederum die mit entgegengesetztem Fluidum bedeckten Hälften der Nadeloberfläche von einander trennen.

Wir setzen voraus, dass die Nadel so in der Mitte des Stromkreises aufgehängt sei, dass ihr Mittelpunkt mit dem Mittelpunkt des letzteren zusammenfällt, und dass die Axe η des mit ihr fest verbundenen Coordinatensystems zusammenfällt mit der Drehaxe y.

Nehmen wir auf der Oberfläche der Nadel zwei diametral gegenüberliegende Punkte, so werden diese mit gleicher aber entgegengesetzter magnetischer Masse belastet sein, und wir erhalten für das Drehungsmoment, welches der von einem Strom von der Stärke 1 durchflossene Kreis auf die betrachteten Punkte zusammengenommen ausübt, den Werth:

$$\frac{4\pi}{r}\mu x + \frac{4\pi}{r^3}\left\{\mu x \varrho^2 - 5\mu x z^2\right\}$$

wo r der Halbmesser des Stromkreises, x, y, z die Coordinaten des betrachteten Punktes in dem mit dem Kreise fest verbundenen System, ϱ seine Entfernung von Mittelpunkt und μ die in ihm vorhandene magnetische Masse.

Das auf die ganze Nadel ausgeübte Drehungsmoment wird:

$$D = \frac{4\pi}{r} \Sigma \mu x + \frac{4\pi}{r^3} \left\{ \Sigma \mu x \varrho^2 - 5 \Sigma \mu x z^2 \right\}$$

wo die Summen über die ganze mit positivem Fluidum belegte Hälfte der Nadeloberfläche zu erstrecken sind.

Führen wir an Stelle der Coordinaten x, y, z die Coordinaten ξ, η, ζ und den Ablenkungswinkel α der magnetischen Axe ξ aus der Ebene des Stromkreises ein, so wird:

$$D = \frac{16\pi}{r} . \cos \alpha \Sigma \mu \xi$$
$$+ \frac{12\pi}{r^3} \cos \alpha \left\{ \begin{array}{l} (1 - 5 \sin^2 \alpha) \Sigma \mu \xi^3 + \Sigma \mu \xi \eta^2 \\ + (15 \sin^2 \alpha - 4) \Sigma \mu \xi \zeta^2 \end{array} \right\}$$

Ersetzen wir andererseits die Nadel durch zwei auf der Axe ξ gelegene Pole M und $-M$ im Abstande L vom Mittelpunkt, so ergiebt sich für das auf das System dieser beiden Pole ausgeübte Drehungsmoment

$$D = \frac{4\pi}{r} \cos \alpha . ML + \frac{3\pi}{r^3} \cos \alpha M L^3 (1 - 5 \sin^2 \alpha)$$

Die beiden Momente sind gleich, wenn die Coëfficienten der entsprechenden Potenzen von r gleich sind, wir erhalten somit die Beziehungen:

$$\text{I.}\quad ML = 4\Sigma\mu$$

$$\text{II.}\quad ML^3(1-5\sin^2\alpha) = 4(1-5\sin^2\alpha)\Sigma\mu\xi^3 + 4\Sigma\mu\xi\eta^2 + 4(15\sin^2\alpha-4)\Sigma\mu\xi\zeta^2$$

Die erste dieser Gleichungen ist wieder identisch mit der Bedingung, dass das magnetische Moment des von den beiden Polen gebildeten Systems gleich sein soll dem Moment der gegebenen Nadel; für den Abstand der Pole ergiebt sich dann:

$$L^2 = \frac{\Sigma\mu\xi^3}{\Sigma\mu\xi} + \frac{1}{1-5\sin^2\alpha}\frac{\Sigma\mu\xi\eta^2}{\Sigma\mu\xi} + \frac{15\sin^2\alpha-4}{1-5\sin^2\alpha}\cdot\frac{\Sigma\mu\xi\zeta^2}{\Sigma\mu\xi}$$

Für den Fall eines Rotationskörpers ist wieder

$$L^2 = \frac{\Sigma\mu\xi^3}{\Sigma\mu\xi} - 3\frac{\Sigma\mu\xi\eta^2}{\Sigma\mu\xi}$$

Wir sehen also *dass bei der Nadel einer Tangentenboussole die Lage der Pole im allgemeinen abhängt von dem Ablenkungswinkel. Hat dagegen die Nadel die Gestalt eines Rotationskörpers, dessen Axe zusammenfällt mit ihrer magnetischen Axe, so sind die Pole für alle Ablenkungswinkel ein und dieselben, und sie sind in diesem Falle identisch mit den Polen der als Ablenkungsstab benützten Nadel.*

Für ein dreiaxiges Elipsoid ergiebt sich wieder

$$L^2 = \frac{3}{5}a^2 + \frac{1}{5}\frac{1}{1-5\sin^2\alpha}\cdot b^2 + \frac{1}{5}\cdot\frac{15\sin^2\alpha-4}{1-5\sin^2\alpha}\cdot c^2$$

und für $b = c$

$$L^2 = \frac{3}{5}(a^2 - b^2)$$

Die Pole der Nadel einer Tangentenboussole werden in der Regel dadurch bestimmt, dass man durch letztere succesive zwei Ströme gehen lässt deren relative Stärke anderweitig bestimmt werden muss, und dass man die jedesmaligen Ablenkungen beobachtet. Man kann eine solche Strommessung umgehen, wenn man denselben Strom durch zwei Boussolen von verschiedenen Halbmessern gehen lässt und die Ablenkung der Nadel, deren Pole bestimmt werden sollen, zuerst in der einen dann in der anderen Boussole beobachtet.

Verzeichniss der bei der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangenen Druckschriften.

März, April 1872.

Nature 122. 124. 125. 126. 128. 129. 130. 131.
N. v. Kokscharow, Materialien zur Mineralogie Russlands. Bd. VI. St. Petersburg 1870. 8. Mit Atlas.
H. Brugsch, Hieroglyphische Grammatik. Leipzig 1872. gr. 8.
Jahrbuch der k. k. Geologischen Reichsanstalt. Jahrg. 1871. Bd. XXI. No. 4. October, November, December, mit
Dr. G. Tschermak, Mineralogische Mittheilungen. Heft II. Wien 1872. 8.
Verhandlungen der k. k. zoologisch-botanischen Gesellschaft in Wien. Jahrg. 1871. Bd. XXI. Wien 1871. 8.
Compte-rendu de la Comission archéologique pour l'année 1869. St. Petersburg 1870. Mit Atlas. Fol.

Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux. Tome VI. Paris 1868. Tome VIII. 1er Cahier. Paris 1870. 8.
Bulletin de l'Académie Royale des Sciences des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique. 40e année, 2e série, tome 31, Nr. 1—4. — 41e année, 2e série, tome 33, Nr. 2—3. Bruxelles 1871 et 1872. 8.
Annales de l'Observatoire Royal de Bruxelles. Bogen 3 und 8. 1871.
Résumé des Observations sur la Météorologie et sur la Physique du Globe. 1870.
M. A. de la Rive, Notice sur E. Verdet. Paris 1870. 8.
Archives Néerlandaises des Sciences exactes et naturelles. Tome VI. 4ème et 5ème Livraison. La Haye. 8.
Verhandelingen rakende de Natuurlijke en Geopenbaarde Godsdienst, utgegev. d. Teylers Godgeleerd Genootschap. Nieuwe Serie. Tweede Deel. Haarlem. 8.
Nederlandsch Kruidkundig Archief. Verslagen en Mededeelingen der Nederlandsche Botanische Vereenigung. 1e Deel 1e Stuk. Nijmegen 1871. 8.
Tagebuch der Nachrichten und des Unterrichts von der Kasan'schen Universität. 1865 Heft VI. 1868 Heft I—VI. 1867 Heft I—VI. 1868 Heft I—VI. 1869 Heft I—VI. Kasan. 8.
Gelehrte Denkwürdigkeiten der Kasan'schen Universität, historisch-philologische und politisch juridische Wissenschaften. 1864 Heft I—II. Kasan 1866. 8.
Gelehrte Denkwürdigkeiten der Kasan'schen Universität, physische, mathematische und medicinische Wissenschaften. 1864 Heft I—II. Kasan 1865. 8.
Arbeiten des Kaiserl. Petersburger botan. Gartens. Bd. I. Heft I. Petersburg 1871. 8.
A. Popoff, Theorie der Wellen, die entstanden sind durch fortschreitenden äussern Druck. Kasan 1868. Fol. [1]).
Dritter Bericht des botanischen Vereins in Landshut über die Vereinsjahre 1869—71. Mit einer Karte. Landshut 1871. 8.
Monatsbericht der Berliner Akademie. Januar 1872.
Dr. J. Kühn, Berichte aus d. physiolog. Laboratorium und der Versuchsanstalt des landwirthschaftl. Instituts der Universität Halle. Heft I. Halle 1872. 8.

1) Die Werke aus Kasan in russischer Sprache.

Abhandlungen herausgeg. vom naturwissenschaftlichen Vereine zu Bremen. Bd. III. Heft I, beigeheft. der VII. Jahresbericht. Bremen 1872. 8.

Zeitschrift der deutschen morgenländ. Gesellschaft. Bd. XXV. Heft IV. Leipzig 1871. 8.

Berichte über die Verhandlungen der Kgl. Sächs. Gesellschaft d. Wissenschaften zu Leipzig. Mathem.-phys. Classe. 1870, III. IV—1871, Heft I—III. Leipz. 1871. 8.

Fechner, Zur experimentalen Aesthetik. I. Theil. gr 8.

W. Weber, Elektrodynamische Maasbestimmungen Nr. 1. Leipzig 1871. gr. 8.

P. A. Hansen, Untersuchung des Weges eines Lichstrahls etc. Des X. Bandes d. Abhandl. der mathem.-phys. Classe der kgl. Sächs. Gesellsch. d. Wissenschaften Nr. II. Leipzig 1871. gr. 8.

Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft. VII. Jahrg. Heft I. Leipzig 1872. 8.

Dr. C. Fuchs, Die künstlich dargestellten Mineralien nach G. Rosés krystallo-chemischem Mineralsysteme geordnet. Haarlem 1872. Fol.

Lotos, Zeitschrift für Naturwissenschaften. Jahrg. XXI. Prag 1871. 8.

Verhandlungen des naturhistorisch-medicinischen Vereins zu Heidelberg. Bd. VI. I. 8.

Proceedings of the London Mathematical Society Nr. 32 u. 41. 8.

War Department, Surgeon General's Office Circular Nr. 3. Report of Surgical Cases in the Army. Washington 1871. Fol.

Annual Report of the Surgeon General U. St. Army 1871. 8.

A. Kölliker, Beiträge zur Kentniss der Polypen. Würzburg 1870. 8.

G. Künstler, Die unsern Kulturpflanzen schädlichen Insekten. Wien 1871. 8.

G. Ritter von Frauenfeld. Die Grundlagen des Vogelschutzgesetzes. Wien 1871. 8.

Prof. M. Nowicki, Ueber die Weizenverwüsterin Chlorops taeniopus Meig, und die Mittel zu ihrer Bekämpfung Wien 1871. 8.

Dr. C. L. Grotefeld, Chronologische Anordnung der athenischen Silbermünzen. Hannover 1872. 8.

H. v. Schlagintweit-Sakülünski, Untersuchungen über die Salzseen im westl. Tibet und in Turkistán. I. Theil. München 1871. Fol.

Archiv des Vereins für siebenbürgische Landeskunde Neue Folge. Bd. IX. Heft III. Kronstadt 1871. — Bd. X. Heft I. Hermannstadt 1872. 8.
Jahresbericht des Vereins für siebenbürg. Landeskunde für das Vereinsjahr 1870/71. Hermannstadt. 8.
S. Transch, Schriftsteller-Lexikon oder biographisch-literarische Denk-Blätter der Siebenbürger Deutschen. Bd. II. Kronstadt 1870. 8.
Programm des Gymnasiums zu Hermannstadt. 1871.
Programm des ev. Gymnasiums in Schässburg. 1871.
Programm des ev. Obergymnasiums in Bistritz. 1871.

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

29. Mai. №. 13. 1872.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Ueber die Capitolinische Quadriga und die Jupiterstatue auf ihr.

Unsere monumentale Kunde des Capitolinischen Tempels beruht zunächst auf Münzen. Von diesen hat die ihm bekannten Denare des M. Voltejus und des Petillius Capitolinus schon Justus Ryckius de Capitolio Rom. comment., Gandavi MDCXVII benutzt, vgl. p. 45 und p. 60. Ein paar in neuerer Zeit aufgefundene Denare desselben Petillius sind von dem Baron von Koehne in der wiederholt, zuletzt in den Berliner Blättern für Münz- Siegel- und Wappenkunde Bd. V, 1870, S. 257 fg., veröffentlichten Abhandlung »Der Tempel des Capitolinischen Jupiter« behandelt worden, welche ich kürzlich in den Götting. gel. Anzeigen Stück 10, vom 8ten Mai 1872, S. 724 fg. besprochen habe. Die Denare des Voltejus und des Petillius beziehen sich auf den ersten und den zweiten, Sullanischen Bau. An sie reihen sich Bronzemünzen mit dem Bilde des Vespasian, des Titus und des Domitian, welche den Bau des Vespasian betreffen, vgl. Cohen Méd. imp. T. I, p. 319, n. 407—410, p. 374 fg., n. 269—272, p. 444, n. 456. Dazu füge man ein

paar Silbermünzen Domitians, die Cohen p. 396, n. 68 u. n. 71 beschrieben hat. Endlich geben Silbermünzen Domitians, über welche in neuerer Zeit in Kürze Ch. Lenormant Iconogr. d. Empereurs Rom. p. 43, z. pl. XXIV, n. 3, und Cohen Med. imp. a. a. O. p. 387, Anm. 1, umfassend M. Pinder in den Abhandl. der Berlin. Akad. d. Wissensch. aus d. J. 1855 gesprochen hat[1], unter dieser Gattung von Monumenten die genaueste Kunde über den von Titus begonnenen, von Domitian vollendeten vierten Bau. Daran schliessen sich zwei theils im Originale erhaltene theils nur durch Abbildungen bekannte Marmorreliefdarstellungen, über die wir in neuester Zeit genügendere Kunde erhalten haben, wie jüngst in den Götting. gel. Anz. S. 738 fg. bemerkt ist, während über die von W. Abeken Mittelitalien S. 227 kurz erwähnte »Zeichnung eines alten Reliefs im cod. Vat. 3439 Blatt 83« leider keine weitere Kunde gegeben ist. Andere von mir in den Gött. gel. Anz. St. 19 gelegentlich erwähnte den Capitolinischen Tempel betreffende Bildwerke kommen wenigstens für die Gruppen und Statuen oberhalb des Giebelfeldes nicht in Betracht[2].

Die berühmte Quadriga oberhalb der Spitze des Giebelfeldes des Capitolinischen Tempels, ursprünglich der einzige und später stets der wichtigste statuarische Schmuck, mit welchem das prächtige Gebäude noch über dem bilderreichen tympanum fastigii versehen war[3], tritt uns mit der Statue des Jupiter in ihr zuerst auf den Denaren des Petillius entgegen. Das älteste thönerne Viergespann des ersten Baues war ohne eine solche Statue, wie K. O. Müller Etrusker II, S. 248 fg. mit Wahrscheinlichkeit annahm. Was W. A. Becker Handb. d. Röm. Alterth. Th. I, S. 398 dagegen bemerkte, hat nicht viel auf sich,

obgleich es von Baron von Koehne S. 261 angenommen wird[4]). Diesem Viergespann folgte nach früher allgemeiner Annahme die von den Ogulniern im J. d. St. 458 aufgestellte Quadriga mit einer Statue des Jupiter darauf. Ryckius glaubte, dass das Werk von Silber gewesen sei (a. a. O. p. 19), während Becker a. a. O. es als »wahrscheinlich bronzenes« betrachtete, obgleich er früher in der Schrift de com. Rom. fab. maxime Plautinis, Lips. 1837, p. 38 anderer Ansicht gewesen war; wie denn schon Nardini an ein Bronzewerk gedacht hatte, D. Detlefsen de arte Rom. antiquissima, Part. I, p. 9, an demselben nicht zweifelt und von Koehne von dem bronzenen Viergespann als von einer ausgemachten Thatsache spricht. Ferner war Ryckius der Ansicht, das die silberne Quadriga an die Stelle der älteren thönernen getreten sei, während Becker meinte, dieses sei bei der hohen Bedeutung, welche dieser Quadriga beigelegt wurde (Serv. z. Aen. VII, 188), kaum glaublich, und vermuthete, das von den Ogulniern aufgestellte Werk habe seinen Platz auf dem anderen, dem nördlichen Giebel gehabt; die betreffende Statue sei die bei Cicero de Divin. I, 10, als in fastigio Jovis Optimi Maximi befindlich erwähnte des Summanus gewesen, vgl. besonders de com. Rom. fab. p. 38 fg. Seiner Ansicht, nach welcher also die auf einer Quadriga stehende Statue des Summanus oberhalb des hinteren Giebels ein Gegenstück bildete zu der des Jupiter über dem vorderen, pflichtet O. Jahn bei Arch. Beitr. S. 82, Anm. 49. Auch Detlefsen denkt an zwei verschiedene Quadrigen, die auf beide Giebel des Tempels vertheilt gewesen seien[5]). Dagegen urtheilt Baron von Koehne ebenso wie Ryckius, aber ohne Zweifel unabhängig von ihm, indem er voraussetzt,

dass die den Einflüssen der Witterung ausgesetzte Quadriga zur Zeit der Ogulnier wahrscheinlich beschädigt gewesen sei. Von einer solchen Beschädigung verlautet inzwischen auch nicht das Allermindeste. Andererseits wird aber derjenige, welcher die Ueberzeugung hegt, dass die thönerne Quadriga ursprünglich eines Jupiterbildes entbehrte, sich darüber wundern, dass die Ogulnier den Summanus auf eine Quadriga stellen liessen.

In der betreffenden Belegstelle bei Livius X, 32 heisst es von diesen: aenea in Capitolio lamina et trium mensarum argentea vasa in cella Jovis Jovemque in culmine cum quadrigis, et ad ficum Ruminalem simulacra infantium conditorum Urbis sub uberibus lupae posuerunt. Das Material des Jupiter und des Viergespanns wird offenbar gar nicht besonders erwähnt. Ryckius dachte ohne Zweifel deshalb an Silber, weil von diesem Metall unmittelbar vorher die Rede ist; allein seine Ansicht, nach welcher zu Jovem zu ergänzen wäre: argenteum, hat nicht bloss in sprachlicher sondern auch in sachlicher Hinsicht durchaus keine Wahrscheinlichkeit. Die andere Meinung, dass es sich um ein Werk aus Bronze handle, anlangend, so ist die Begründung derselben durch Detlefsen a. a. O., wenn er sagt: Ogulnios ex publicatis foeneratorum bonis non quadrigas tantum dedicavisse Livius tradit, verum vasa quoque asgentea statuasque aeneas, ut quadrigas etiam aeneas fuisse non dubitandum sit, offenbar durchaus unzulänglich. Jene Meinung hat nur den Umstand für sich, dass Metall zu den betreffenden Werken in der Etruskischen Kunst neben dem Thon sowie in der Griechisch-Römischen hauptsächlich benutzt wurde. Besonders freilich wurden diese in vergoldeter

Bronze ausgeführt. Livius hat drei dahingehörende Beispiele und zwar gerade für das Capitol aus der Zeit vor dem Sullanischen Bau erwähnt; vgl. XXIX, 38: Quadrigae aureae in Capitolio positae ab aedilibus curulibus C. Livio et M. Servilio Gemino, XXXV, 41: de mulcta damnatorum quadrigae inauratae in Capitolio positae, in cella Jovis, supra fastigium aediculae, XXXVIII, 38: sejuges in Capitolio aurati ab Cn. Cornelio positi. Aber das Nichtangeben des Materials in der Stelle über die von den Ogulniern aufgestellten Jupiter bleibt auch so sehr bedenklich.

Sollte also etwa ursprünglich geschrieben sein: Jovemque in culmine *aureum* cum quadrigis? Aureum konnte wegen der Aehnlichkeit der drei letzten Buchstaben mit dem folgenden cum sehr wohl ausfallen. Es würde auch sehr gut passen, dass der Historiker hinsichtlich des Materials eine Steigerung nach dem Werthe — Erz, Silber, Gold — beliebt hätte.

Allein selbst die wahrscheinlichste Conjectur ist doch nur Conjectur. Wie wenn auch nach der handschriftlichen Lesart das Material freilich nicht ausdrücklich bezeichnet und hervorgehoben, aber doch zur Genüge angedeutet wäre? Allgemein verbindet man die Worte Jovem cum quadrigis. Die beiden letzten Worte stehen aber hinter culmine und bieten auch mit diesem Worte verbunden einen durchaus passenden Sinn. Sie besagen, dass der Capitolinische Tempel zwei culmina hatte, auf deren einem, dem vorderen, eine quadriga, jene berühmte thönerne, stand, während das andere eines solchen Viergespanns entbehrte. So konnte der Ausdruck culmen cum quadrigis als zur Bezeichnung des vorderen culmen im Gegensatz gegen das hintere dienend gefasst

werden. Hätte Livius das, was er nach der allgemeinen Annahme gesagt haben soll, dass die Ogulnier eine Jupiterstatue und das Viergespann, auf welchem dieselbe stand, aufgestellt hätten, genügend ausdrücken wollen, so hätte er schreiben müssen: Jovemque cum quadrigis in culmine. Dass er aber den vorderen Giebel eben als culmen cum quadrigis bezeichnete, geschah besonders deshalb weil er andeuten wollte, dass die Statue auf die Quadriga, welche ja bis dahin leer gewesen war, gesetzt worden sei. Da diese Quadriga nun kein neues und noch dazu ein allbekanntes Werk war, so brauchte er den Stoff derselben nicht anzugeben, und da es ferner selbstverständlich war, dass auf ein thönernes Viergespann auch eine thönerne Statue gekommen sei, so hatte er durch Hinweisung auf das Vierspann auch schon eine Andeutung des Materials der Statue gegeben, die ohnedem auch etwas Allbekanntes war [6]).

Es bedarf in Betreff der Stelle des Livius nur noch einiger Worte um die Erwähnung der Jupiterstatue am dritten und letzten Orte zu erklären. Der Historiker beginnt von unten und nennt also zuerst die nach aussen zunächststehenden limina. Dann geht er zu dem über, was innerhalb des Tempels am Boden dasselben aufgestellt war, den mensae mit den vasa. Endlich berücksichtigt er das in der Höhe über dem Giebel neu Aufgestellte.

Danach wird die Becker'sche Ansicht, dass auf dem hinteren oder nördlichen Giebel eine Quadriga mit der Statue des Summanus gestanden habe, aufzugeben sein. Dieselbe muss auch deshalb als durchaus unwahrscheinlich gelten, weil es, um von andern, unten zu erwähnenden Stellen zu schweigen, kaum glaublich ist, dass Livius X, 23 und Plautus im Trinumm. I, 2,

46 fg. oder Vs 83 fg. p. 16 Ritschl. den Summanus dem eigentlichen Jupiter gegenüber schlechthin Jovem genannt haben würden; denn dass diese letztere Stelle ebenfalls auf die von den Ogulniern aufgestellte Jupiterstatue zu beziehen ist, unterliegt jetzt wohl keinem Zweifel mehr [7]).

Wenn nun auf dem hinteren culmen des Capitolinischen Tempels keine Quadriga stand, so könnte doch die Becker-Jahnsche Ansicht in sofern das Wahre treffen als dort eine *Statue* des Summanus vorhanden war. Aber auch diese Annahme hat gewichtige Bedenken gegen sich. Zuvörderst wird Jeder bei dem von Cicero a. a. O. gebrauchten Ausdrucke in fastigio zunächst an den Giebel der Hauptfaçade denken. Dann können freilich die Worte des Livius Jovem in culmine cum quadrigis so gefasst werden, dass auch auf dem culmen sine quadrigis ein Jupiter stand. Allein unter dem würde man zunächst einen Jupiter im gewöhnlichen Sinne des Wortes, nicht einen Jupiter Summanus zu verstehen haben, und wenn auch der Gedanke an den letzteren nicht ausgeschlossen wäre, so würde es doch nach unserem Dafürhalten weit bedenklicher sein, eine Einzelstatue auf dem hinteren Giebel als Gegenstück zu der Quadriga auf dem vorderen vorauszusetzen, als anzunehmen, dass der hintere Giebel eines solchen Statuenschmucks ganz entbehrt habe. Man bedenke dabei auch den Umstand, dass auf dem vorderen Giebel ursprünglich nur eine statuenlose Quadriga befindlich war. Die Hauptsache ist aber, dass jene Worte des Livius durchaus nicht mit Nothwendigkeit die Annahme eines Jovis in culmine sine quadrigis fordern. Warum der Zusatz in quadrigis gemacht ist, haben wir schon oben gesagt. Wir bemerken

ausserdem noch, dass der Jupiter in culmine dem innerhalb des Giebelfeldes und ganz besonders dem in der mittleren Cella des Tempels entgegengesetzt ist, die beide ohne quadrigae waren.

Nun könnte man vermuthen, dass der Summanus, welcher sicherlich eine frei stehende Statue war, zu jenen Statuen gehört habe, die nach Münzen und Reliefs zu beiden Seiten der Quadriga oberhalb des Vordergiebels aufgestellt waren. Diesen Gedanken hatte schon Becker und dann Jahn a. a. O.; beide gaben denselben jedoch gegen die andere Becker'sche Ansicht auf. Wer ihm jetzt noch irgend welche Wahrscheinlichkeit verleihen will, der wird zunächst nachzuweisen haben, zu welchem Gotte Summanus dort in antithetischer oder anderweitiger Entsprechung gepasst habe. Dabei wird er aber auf Schwierigkeiten stossen, die ihn veranlassen dürften, jene Vermuthung ganz aufzugeben.

Beachtet man dagegen den Umstand, dass die Statue, welche von Cicero als die des Summanus bezeichnet wird, in der Epit. Liv. l. XIV Jovis signum heisst, in Verbindung mit dem, dass auch sonst von einem Jupiter Summanus die Rede ist [8]), so wird man sich jetzt wohl dazu entschliessen, den Summanus in fastigio Jovis Optimi Maximi bei Cicero nicht nur für den Jovem in culmine cum quadrigis bei Livius und den, qui in culmine astat summo, nach Plautus, zu halten, wie das auch Becker that, sondern auch anzunehmen, dass diese Statue diejenige war, welche seit 458 a. U. oberhalb der Spitze des vorderen Giebels auf der thönernen Quadriga von Veji stand, wie schon Ryckius wollte, aber freilich keineswegs zur Genüge darthat. Dass Summanus und Jupiter ursprünglich insofern identisch waren, als beide sich auf den Him-

mel bezogen, jener auf den Nachthimmel und die nächtlichen Blitze, dieser auf den Tageshimmel und die Tagesblitze, ist den neueren Mythologen nicht entgangen, vgl. namentlich Hartung Relig. der Römer, II, S. 59 fg., E. Rückert Trojas Ursprung, Blüthe, Untergang und Wiedergeburt in Latium. S. 208 fg., Gerhard Griech. Mythol. §. 939, II, S. 252. Bei Summanus spielt die Quadriga keine geringere Rolle als bei Zeus und Jupiter, vgl. Ryckius p. 59 und namentlich die Opferkuchen in Form eines Rades, welche man dem Gotte darbrachte (Festus p. 348 Summanalia), nebst der richtigen Erklärung auf den Wagen des Donnergottes, die zuerst von Rückert a. a. O. S. 209, dann auch von Preller a. a. O. S. 217 gegeben ist. Ein Symbol dieses Wagens war die thönerne Quadriga von Veji, gewiss keine Andeutung des ersten und ursprünglichsten Triumphators (Müller Etr. II, S. 249). Bezog sie sich wirklich auf Sieg, und zwar auf den höchsten (Preller S. 197 fg.), so rührt das wesentlich von jener ihrer ursprünglichen Beziehung her. Da sie als Donnerwagen sowohl den Summanus als auch den Jupiter anging, so war es für jene Zeit nicht nur nicht befremdend (K. O. Müller Etr. II, S. 249), sondern passend keine Statue auf sie zu stellen. Als die Ogulnier dieses dennoch thaten, mochte die Beziehung auf Jupiter schon in den Vordergrund getreten sein, wie denn ja Summanus im Culte immer mehr zurücktrat. Dass ursprünglich hinsichtlich der Inhaberschaft der Quadriga Summanus dem Jupiter eher vorstand als nachstand, dürfte kaum zweifelhaft sein. Gewiss giebt hier im Besonderen, was Arnobius de civ. dei IV, 23 im Allgemeinen bemerkt: Romani veteres nescio quem Summanum, cui nocturna fulmina tribue-

bant, coluerunt magis quam Jovem, ad quem diurna pertinerent [9]). Nach Cicero ist von der Statue als der des Summanus nicht mehr die Rede.

Schliesslich nur noch die Bemerkung, dass unsere Annahme, nach welcher über der Spitze des hinteren Tempelgiebels kein Bildwerk stand, auch dazu vollkommen passt, dass an der hinteren Seite des Baues auch kein mit Figuren geschmücktes Giebelfeld vorhanden war.

Ueber die Geschichte der Statue auf der Quadriga lässt sich noch Folgendes aus Schriftstellen ermitteln.

Die von den Ogulniern aufgestellte Terracotta wurde zur Zeit des Pyrrhus (476 a. U., 278 p. Chr.) durch den Blitz beschädigt. Betrachtet man die Worte der Epitome des Livius a. a. O.: Cum inter alia prodigia fulmine dejectum esset in Capitolio Jovis signum, caput ejus per aruspices inventum, so sieht es auf den ersten Blick ganz so aus als habe eine gänzliche Vernichtung der Statue stattgefunden. Das Thonbild würde, wenn es von seinem Standpunkt herab auf den Boden geworfen wäre, zerschellt sein; es hätte durch ein ganz neues ersetzt werden müssen. Aber schon der Umstand, dass man nach dem Kopfe suchte, deutet darauf hin, dass man diesen wieder benutzen wollte. Sicherlich war nur der Kopf durch den Blitz abgeschlagen, das Uebrige an der Statue wesentlich unversehrt geblieben. Dazu passen auch die Worte Cicero's: cum Summanus — qui tum erat fictilis a caelo ictus esset u. s. w., auf das Vortrefflichste. Sicherlich handelt es sich in der Epitome nicht sowohl um einen factischen Irrthum, als um eine Verderbniss des Textes. Man beachte nur den Ausdruck in Capitolio, der zu

dem dejectum durchaus nicht passt, da der Ausdruck Capitolium ohne Zweifel nicht im weiteren, sondern im engeren Sinne vom Tempel gemeint ist, und man wird schwerlich Anstoss nehmen, dieses als in Folge einer Dittographie der Endsilbe des vorhergehenden Wortes ne aus ictum hervergegangen zu betrachten [10]. Bei dem Brande unter Sulla ging dann nicht bloss die thönerne Statue ganz zu Grunde, sondern ohne Zweifel auch die noch ältere thönerne Quadriga [11]. Beide wurden durch Nachbildungen ersetzt, von denen man so gut wie sicher annehmen kann, dass sie von vergoldeter Bronze waren [12].

Die Quadriga über der Spitze des Giebelfeldes und die Statue in ihr waren ohne Zweifel so gestellt, dass der vor der Fronte des Tempels Stehende von ihnen die Ansicht en façe hatte. Dieselbe Stellung hatten in symmetrischer Entsprechung allem Anscheine nach die beiden Bigen, von denen je eine oberhalb des Giebelfeldes nach den Enden zu sich befand, links vom Beschauer die des Sol, rechts von jenem die der Luna. Dieser Umstand, welcher rücksichtlich der Quadriga in der Mitte auch ohne Weiteres als das allein Passende vorausgesetzt werden müsste, erhält eine Bestätigung nicht bloss dadurch, dass auf den betreffenden Bildwerken die bezeichneten Gespanne, namentlich die Quadriga mehrfach, in jener Stellung vorkommen, sondern auch dadurch, dass auf denjenigen Bildwerken, welche die Gespanne und Figuren auf ihnen in Profildarstellung zeigen, die Richtung abwechselt.

Dass die auf der Quadriga befindliche Statue den Gott stehend darstellte, wird man schon von vornherein annehmen. Es wird aber auch ausdrücklich bezeugt nicht bloss durch den Ausdruck

astat, dessen sich Plautus a. a. O. bedient[13]), sondern auch durch bildliche Darstellungen, namentlich Münztypen. Von diesen zeigen die Denare des Petillius Capitolinus nach der vergrösserten Abbildung, welche Baron von Koehne in den Berlin. Blättern für Münzkunde V, Taf. LXII, n. 1 mitgetheilt hat, den nebst der Quadriga, auf welcher er steht, und den vier sprengenden Rossen dieser en face dargestellten Gott mit dem Blitz in der Hand des gehobenen rechten Arms und mit ebenfalls gehobenem, wie ausgestreckten linken Arm[14]).

Durch die oben angezogene Stelle des Plautus erfahren wir ausserdem, dass die Statue einen trennbaren Kranz auf dem Haupte hatte, und zwar schon damals als sie noch aus Thon bestand.

Der Kranz war zweifelsohne von dem kostbarsten Material, von Gold, vermuthlich mit Hinzufügung von Edelsteinen. Dass erhellt schon aus der betreffenden Schriftstelle, insofern in derselben vom Stehlen jenes die Rede ist. Auch in technischer Beziehung steht der Annahme durchaus nichts entgegen[15]). Aber es fragt sich, ob der künstliche Schmuck ein Eichenkranz oder ein Lorbeerkranz war. Jenes nahm Ryckius a. a. O. p. 74 an, dem C. A. Böttiger Ideen zur Kunstmythologie II, S. 195 hinsichtlich des Stoffes sich anschloss, indem er übrigens den Eichenkranz auf die sitzende Jupiterstatue in der Cella übertrug. Für den Lorbeerkranz trat in Gegensatz gegen Böttiger ein W. A. Becker de com. Rom. fab. p. 40 fg. Er verkennt nicht, dass die Annahme des Eichenkranzes ausserordentlich viel für sich habe, allein dennoch weist er diesen zurück, und zwar hauptsächlich aus dem Grunde, weil ille qui in culmine astabat cum quadrigis Triumphans erat, atque triumphantium corona

laurus. Dass diese Ansicht uns durchaus irrig erscheint, ist schon oben S. 273 bemerkt. Sie wird auch durch die Darstellung des Jupiter und der Quadriga, wie wir sie jetzt kennen, widerlegt. Wer wird in dem blitzschleudernden Gott auf dem mit sprengenden Rossen bespannten, stürmisch dahineilenden Wagen ein Vorbild des feierlich einherfahrenden Triumphators finden wollen? Wo ist zu lesen oder zu sehen, dass der Triumphator den Blitz mit der Rechten auch nur in Ruhe gehalten hätte? Etwa bei Sueton. im Div. Augustus C. 94, wo es von dem pater Octavius heisst: visus est filium mortali specie ampliorem, cum fulmine et sceptro exuviisque Jovis Optimi Maximi ac radiata corona, super laureatum currum, bis senis equis candore eximio trahentibus? Hier handelt es sich ja offenbar um mehr als einen gewöhnlichen Triumphator. Die oben beschriebene Darstellung auf den Denaren des Petillius Capitolinus erinnert durchaus an Darstellungen des die Giganten bekämpfenden Jupiter, und das passt vollkommen zu der von uns vorausgesetzten ursprünglichen Beziehung der Quadriga, denn die Giganten besiegt Jupiter wesentlich als Blitz- und Donnergott. Dazu kam bei Becker die Meinung, dass die sitzende Statue des Jupiter in der Cella überall keinen Kranz getragen habe, dass also, da der Kranz Jupiters auf Griechischen und Römischen Münzen in der Regel aus Lorbeer bestehe, auch der der Statue auf der Quadriga ein Lorbeerkranz gewesen sei; vgl. de com. Rom. fab. p. 31 fg., p. 36, p. 40. Aber hier ist ein Irrthum auf den anderen gehäuft[16]. Es scheint uns ganz unzweifelhaft, dass sowohl die mit einer Binde versehenen und die ganz schmucklosen als auch die mit Lorbeer bekränzten Köpfe, welche mit

Sicherheit auf den Capitolinischen Jupiter zu beziehen sind[17]), die Sitzstatue in der Cella angehen. Die Eiche ist aber von Haus aus der heilige Baum des Capitolinischen Jupiter. War doch auf dem Römischen Capitol eine alte Eiche das älteste Heiligthum des Jupiter gewesen, zu deren Füssen nach Livius I, 10 noch Romulus seine Spolien niedergelegt haben sollte (Preller Röm. Mythol. S. 96). Dass der Eichenkranz dem Capitolinischen Jupiter heilig war, ist aus Schriftstellen lange bekannt, vgl. Ryckius a. a. O. p. 74, Becker de com. Rom. fab. p. 41. Es ist durchaus wahrscheinlich, dass auch das Sitzbild des Jupiter in der Cella zuerst einen Eichenkranz hatte, der dann mit dem Lorbeerkranz vertauscht wurde, was vermuthlich daher rührte, dass grade dieses Bild als das den Triumph verleihenden Gottes galt auf den die höchste Auszeichnung des Triumphators, der Lorbeerkranz, übertragen wurde. Der Wechsel konnte aber um so eher statthaben, wenn eine andere besonders wichtige und augenfällige Statue des Gottes, die über dem Giebelfeld auf der Quadriga stehende, den ursprünglichen und eigenthümlichen Kranz beibehielt. Dass der Kranz dieser Statue von Anfang an ein Eichenkranz war, hat für uns auch deshalb die grösste Wahrscheinlichkeit, weil die Eiche grade dem Blitz- und Donnergotte eignete (J. Grimm Deutsche Mythologie S. 168) und weil auch Jupiter Victor auf dem Capitol mit einem Eichenkranz geschmückt wurde, vgl. die Inschrift aus Cirta bei L. Renier Inscr. de l'Algér. I, n. 1890, und Preller Röm. Myth. S. 177, Anm. 2,[18]).

Dagegen lässt sich von einer corona radiata weder bei der Statue auf der Quadriga noch selbst bei den Triumphatoren auch nur die geringste sichere Spur nachweisen. Die Annahme

derselben, welche für die Triumphatoren selbst K. O. Müller Etr. I, S. 371, Anm. 59, für die erwähnte Jupiterstatue noch Canina Archit. ant., Sez. III, Monum., t. LIII zuliess, beruht einzig und allein auf der oben mitgetheilten Stelle des Suetonius. Wer diese auch nur mit einiger Aufmerksamkeit ins Auge fasst, wird einsehen, dass es sich in ihr nicht um einen herkömmlichen Schmuck gewöhnlicher Triumphatoren handelt, sondern um einen ausserordentlichen Zierath, welcher den Augustus als Sohn des Apollo Sol kund that. Die Cultusstatue Jupiters in der Cella des Capitols erscheint allerdings auf zwei Thonlampen mit einem Strahlenkranz geschmückt (Antich. d'Ercolano, Lucerne, p. 5 oder Piroli Ant. d'Hercul. T. VI, pl. 1, n. 1, und Rev. archéol. Fr. A. XVI. pl. 355, n. 1). Daraus folgt aber nichts weniger als dass auch das Original zu Rom wirklich jenen Schmuck hatte, vgl. auch L. Stephani Nimbus und Strahlenkranz S. 16 fg.

Anmerkungen.

1) Dass die betreffenden Münzen in Asien geschlagen sind, zu den Kaiserl. Silbermedaillons der Römischen Provinz Asia gehören, steht sicher; aber Genaueres lässt sich über die Prägestätte nicht feststellen. Wenn Lenormant a. a. O. als diese Smyrna vermuthete, où l'on adorait Zeus Acraeus, le même en grec que le Jupiter Capitolinus en latin, so ist die in diesen Worten enthaltene Begründung jener Vermuthung offenbar durchaus nichtig. Dass auf den unter Antoninus Pius und Philippus Senior geschlagenen Bronzemünzen von Antiochien am Mäander im Karien der durch Aufschrift beglaubigte Tempel des Capitolinischen Jupiter (für dessen Vorhandensein schon Ed. Froelich Tentamina IV in re numar. vet., p. 187, eine Stelle des Livius anführte) auch als τετράστυλος erscheint, nach Mionnet Descr. d. méd. III, p. 317, u. 82, p. 319, n. 90, Suppl. VI, p. 454, n. 96, ist immerhin beachtungswerth, giebt aber für die Prägestatte der in Rede stehenden Silbermedaillons keine weitere sichere

Auskunft, zumal da die im Tempel sichtliche Statue des Jupiter dort anders dargestellt ist als hier. — Gelegentlich sei an dieser Stelle in Hinsicht auf die in den Gött. gel. Anz. a. a. O. S. 278 fg. besprochene Verschiedenheit, welche in der Säulenzahl des Capitolinischen Tempels zu Rom auf den Münzen und anderen Bildwerken zu Tage tritt, bemerkt, dass auf Bronzemünzen der Bosporanischen Könige Kotys II. und Eupator I. das Capitol als fünfsäuliger Tempel erscheint, vgl. Koehne Mus. Kotschoubey, pl. 14, 54, pl. 15, 63 und den mir so eben zugegangenen, von W. F. verfassten, auch in wissenschaftlicher Beziehung sehr beachtenswerthen Catal. de méd. du Bosphore Cimmér. formant la collect. de M. J. Lemmé, à Odessa, p. 37, n. 243 u. p. 38, n. 251.

2) Dasselbe gilt auch von dem im Louvre befindlichen Relief bei Clarac Mus. de sculpt. T. II, pl. 151, n. 300, welches allerdings den Capitolinischen Tempel der Kaiserzeit (den es mit sechs Säulen in der Fronte versehen zeigt) betrifft, aber den Giebel überall nicht zur Darstellung bringt.

3) Ueber das letzte ist jüngst in den Gött. gel. Anz. a. a. O. ausführlich gehandelt worden; nebenbei zugleich über den übrigen statuarischen Schmuck oberhalb des Giebelfeldes. Ebenda sind S. 726 Vermuthungen über das Vorhandensein von Quadrigen an derselben Stelle in dem dritten und schon in dem zweiten Bau nach Maassgabe von Münztypen und Schriftstellen des Livius, die weiter unten im Texte mitgetheilt werden, geäussert. Schon Sachse Gesch. der Stadt Rom I, §. 265 meinte, die quadrigae aureae bei Liv. XXIX, 38 hätten als Giebelschmuck gedient, fasste sie aber als Ersatz der Thönernen.

4) Detlefsen (de arte Rom. antiq. P. I, p. 9) hat freilich die Ansicht aufgestellt, dass in der gleich anzuführenden Stelle des Cicero wirklich de simulacro in quadriga illa antiquissima Volcae die Rede sei; dass dem aber keineswegs so ist, wird im Verlaufe unserer Darlegung zur Genüge erhellen.

5) Detlefsen berücksichtigt a. a. O. p. 9. fg. auch noch die von Liv. XXIX, 38 erwähnte, oben in Anm. 3 berücksichtigte quadriga, indem er die Vermuthung äussert: tertiamque auream — a. u. 551 in interioris cellae fastigio collocatam esse aut in alterius illarum locum cessisse. Die erste dieser Vermuthungen wird wohl zur Genüge durch die Stelle des Livius XXXV, 41 widerlegt, wenn

Detlefsen, wie es allem Anschein nach der Fall ist, jener quadriga den Platz grade über der Spitze des Giebelfeldes der aedicula zudachte, welchen man wohl mit Sicherheit der an der letzten Stelle des Livius erwähnten zuschreiben darf. Die andere Vermuthung Detlefsen's hat schon an sich auch nicht die geringste Wahrscheinlichkeit.

6) Rücksichtlich der Wölfin mit den Zwillingen liegt es auf der Hand, dass die Nichtangabe des Materials, Bronze, allein auf der allgemeinen Bekanntschaft mit dem betreffenden Werke beruht.

7) Wie noch Detlefsen a. a. O. p. 7 dazu kommen konnte an das Cultusbild in der Cella zu denken, ist ganz unbegreiflich.

8) In der Inschrift von Barzenò auf dem monte di Brianza, welche in Orelli's Inscr. lat. Vol. I, p. 265, n. 1216 herausgegeben ist. Der Meinung des Herausgebers, dass die betreffenden Worte Jovi Altitonanti et Summano zu lesen seien, können wir uns, wenigstens was das et anbetrifft, trotz Preller's Zustimmung (Röm. Mythol. S. 218, Anm. 1) mit nichten anschliessen.

9) Einen ähnlichen Wechsel in Betreff des Vedius und Jupiter signalisirt Preller a. a. O. S. 237 fg.

10) Mit den Worten des Verfassers der Epitome des Livius ist ausser der angeführten Stelle des Cicero, welcher das caput inventum in Tiberi auch de Divin. II, 19 berührt, auch der Scholiast zu Cic. Catil. III, 8 (in Cic. op. ed. Orelli Vol. V. P. 2, Turic. MDCCCXXXIII, p. 409, Z. 22 fg.) zusammenzuhalten, aber mit Vorsicht, da hier eine Vermengung zweier Ereignisse und Verwechselung zweier verschiedenen Statuen statthat. Das andere Ereigniss fällt in das Consulat des Cotta und Torquatus und betraf eine Jupiterstatue, welche in der Nähe des Capitolinischen Tempels auf einer Säule stand; vgl., ausser Cic. in Catil. a. a. O., denselben de Div. I, 12, II. 20, und W. A. Becker Handb. d. Röm. Alterth. I, S. 494, Anm. 764. — Die von Preller Röm. Myth. S. 217 mit Cic. de Div. I, 10 und Liv. Epit. XIV zusammengebrachte Stelle des Plinius N. XXIX, 4, 14, §. 57 gehört gar nicht hierher.

11) Die auf uns gekommenen Schriftsteller schweigen über Beides gänzlich, während der Untergang des Cultusbildes Jupiters in der Cella bei jener Katastrophe durch Plutarch de Is. et Osir. C. 71 bezeugt wird.

12) Nach den schon von K. O. Müller Etr. II, S. 249 veranschlagten Stellen des Cic. de Div. I, 10 und des Vitruvius III, 3 (2), 5. Dass die von Tacitus Hist. III,

71 erwähnten Adler vetere ligno waren, kann dagegen durchaus kein Bedenken erregen. Vermuthlich waren auch sie vergoldet. — Das metallene Werk wird auch bei den beiden späteren Bränden vernichtet, aber jedesmal so ersetzt worden seien, dass das ursprüngliche Aussehen nicht wesentlich verändert wurde. Indessen scheint nach Servius zu Verg. Aen. VII, 188 zu schliessen, die hohe Bedeutung, welche der urspünglichen thönernen Quadriga beigelegt wurde, auf die späteren Nachbildungen nicht übertragen worden zu sein. — Mit den Tritonen, welche Ch. Lenormant auf einer den Vespasiansbau darstellenden Münze neben der Quadriga erkennen zu können vermeinte (Nouv. Gal. mythol. p. 43), ist es ohne Zweifel nichts. Dagegen ist es sehr wohl möglich, dass wenigstens schon seit dem Sullanischen Bau oberhalb der Spitze des Giebelfeldes unmittelbar vor der Quadriga ein Adler stand, vgl. Gött. gel. Anz. a. a. O. S. 727 fg., in Betreff dessen es freilich sehr dahingestellt werden muss, ob er in engerer Beziehung zu dem Gotte auf der Quadriga stehend gedacht werden sollte, wenn auch der sitzende Jupiter inmitten des Giebelfeldes einen Adler vor sich hatte und dasselbe Attribut aller Wahrscheinlichkeit nach dem Cultusbild des Jupiter innerhalb der Cella nicht fehlte.

13) Ueber ihn hat W. A. Becker de com. Rom. fab. p. 37 besonders gesprochen. Wenn auch zugegeben werden muss, dass er nicht mit Nothwendigkeit für die stehende Stellung der Statue veranschlagt werden muss, so ist diese Deutung doch die zunächst liegende, wie sie denn auch an der letzten Belegstelle bei Becker zweifelsohne dem Thatbestand entspricht.

14) Nach B. von Koehne's Meinung a. a. O. S. 261 ist die Statue »dieselbe wie die auf den ältesten Denaren der Republik und auf einer grossen Anzahl der späteren Denare«. Die besten Abbildungen jener bei Cohen Méd. cons. pl. XLIII und besonders bei Pierre-Phil. Bourlier, Baron d' Ailly, Rech. sur la monn. Rom., Lyon 1864, T. I, pl. 43 fg. Die betreffendsn Münzbilder zeigen abgesehen von der Victoria neben dem Jupiter diesen durchweg mit dem Attribut des Scepters für die Linke, von welchem sich bei den in Rede stehenden Münzdarstellungen des Jupiter auf der Capitolinischen Quadriga keine Spur findet. — Die vier Rosse dieser sind auch die nicht, welche man oberhalb der thensa des Jupiter auf der von Fr. Madden

im Num. Chron., N., S., Vol. I, pl. XI, n. 1 abbildlich mitgetheilten und p. 236 fg. besprochenen Münze des Augustus gewahrt.

15) Wenn Detlefsen a. a. O. p. 7 wegen der Möglichkeit den Kranz abzunehmen voraussetzt, dass dieser zur Zeit des Plautus ein natürlicher gewesen und erst bald nachher aus Gold gemacht worden sei, so erhellt die Nichtberechtigung zu jener Voraussetzung wohl auch aus dem Umstande, dass es sich um das schwer zugängliche Bild oberhalb der Giebelspitze handelt. Dass der künstliche Kranz nicht bloss lose auf den Kopf gelegt, sondern an denselben befestigt war, versteht sich von selbst. Die Befestigung muss aber eine derartige gewesen sein, dass sie verhältnissmässig leicht gelöst werden konnte ohne den Kranz zu verletzen, z. B. Stifte.

16) Wie häufig in der That auf Bildwerken Jupiter mit einem Kranze erscheint, das kann man jetzt am besten aus Overbeck's Griech. Kunstmythologie ersehen.

17) Auf den autonomen Röm. Münzen aus der Kaiserzeit, welche der Duc de Blacas in der Rev. num. Fr. 1862 pl. X, n. 58 herausgegeben hat, finden man die Büste des I. O. M. CAPITOLINVS mit einer Tänia geschmückt. Dem entspricht die tête diademéc des *ΖΕΥΣ ΚΑΠΙΤΩΛΙΟΣ* auf der Bronzemünze *ΑΝΤΙΟΧΕΩΝ* nach Mionnet Descr. T. III, p. 314, n. 61.

Auf dem Medaillon des Commodus in Lenormant's Nouv. Gal. myth. pl. VII, n. 4 = Denkm. d. a. Kunst II, 1, 6e, gewahrt man weder Kranz noch Tänia.

Auch die Abbildung des Kopfs auf dem Denar des Petillius bei Cohen Méd. cons. pl. XXX, Petill. n. 1 zeigt nichts der Art, doch spricht C. im Text von einem Lorbeerkranz. Die Denare der gens Volteja bei Coben pl. XLII, n. 1 u. 6, zeigen dagegen einen Kranz, den C. wiederum als von Lorbeer betrachtet. Die übrigen Jupiterköpfe der Familienmünzen, auch der gens Rubria, geben regelmässig den Lorbeerkranz.

18) Dieser Inschrift erinnerte sich Overbeck nicht, als er das a. a. O. S. 234 fg., namentlich S. 245, Bemerkte schrieb.

Friedrich Wieseler.

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G.-A. Universität zu Göttingen.

5. Juni. № 14. 1872.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 1. Juni.

v. Schklarewsky, Kleinhirn und Bogengänge der Vögel. Anatomisch-physiologische Untersuchungen. Vorläufige Mittheilung. (Vorgelegt von G. Meissner.)
Marmé, vorläufige Mittheilung über die wirksamen Bestandtheile von Taxus baccata.
Klein, über einen Satz aus der Analysis situs.
Bauer, Seebachit, ein neues Mineral. (Vorgelegt vom Secretair).
A. Mayer in Leipzig, zur simultanen Integration linearer partieller Differentialgleichungen. (Vorgelegt von Clebsch).

Ueber die wirksamen Bestandtheile des Eibenbaumes, Taxus baccata L.

Vorläufige Mittheilung

von

Wilh. Marmé.

Die wirksamen Bestandtheile des Eibenbaumes waren bislang durchaus unbekannt. Nachdem im Jahre 1828 Peretti und veranlasst durch Chevallier, Duchesne und Reynal 1855 Gobley die Taxusblätter ohne befriedigendes

Resultat analysirt hatten, unternahm 1856 Lucas eine chemische Untersuchung trockner Blätter und gelangte mittelst des Stass'schen Verfahrens zur Isolirung eines alkaloidartigen Körpers, welchen er Taxin nennt, den er aber aus Mangel an Material keiner genaueren chemischen Untersuchung, geschweige denn einer physiologischen Prüfung unterzogen hat.

Wiederholt seit jener Zeit beobachtete durch den Genuss von Taxusblättern oder deren Infuse herbeigeführte tödtliche Vergiftungen veranlassten mich zu einer erneuten Untersuchung der Blätter sowohl wie der Früchte von Taxus baccata L. Das Ergebniss dieser Untersuchung erlaube ich mir in gedrängter Kürze hier vorzulegen.

Die naheliegende Vermuthung, dass die Eibe ähnlich wie die übrigen toxicologisch wichtigen Coniferen ihre Wirkung einem ätherischen Oele verdanke hat sich nicht bestätigt. Unterwirft man die Fol. Taxi nach der zur Gewinnung ätherischer Oele üblichen Weise der Destillation so erhält man nur Spuren eines ätherischen Oels, dagegen relativ reichliche Mengen Ameisensäure neben etwas Buttersäure.

Destillirt man die alkalisch gemachten wässrigen Auszüge der Taxusblätter, so erhält man ein alkalisch reagirendes, unangenehm riechendes Destillat, das selbst in sehr grossen Dosen bei den verschiedensten Thieren weder nach Einführung in den Magen noch nach Injection in das Gefässsystem irgend eine bemerkenswerthe Störung hervorrief und deshalb auch nicht weiter berücksichtigt wurde.

Behandelt man, wie es Lucas gethan hat, die fein gepulverten Blätter nach der Stass'schen Methode, so erhält man bei Benutzung grösserer Quantitäten nicht einen, sondern Drei verschie-

dene Körper. — Nach dem Verdunsten des zur Extraction benutzten Weingeistes scheidet sich auf der Oberfläche des erkalteten Auszugs ein harzartiger, durch Chlorophyll grüngefärbter Körper von festweicher Consistenz, eigenthümlichem Geruch und scharfem Geschmack ab, der sich leicht von der rückständigen Flüssigkeit abheben lässt.

Ferner erhält man nach dem freiwilligen Verdunsten des zum Ausschütteln des wirksamen Bestandtheils verwendeten Aethers stets zwei verschiedene Körper. 1. Einen in langen Nadeln krystallisirenden Körper, welchen Lucas (offenbar weil er sich zu geringer Quantitäten Rohmaterials — nur 3 Pfund — bediente) gänzlich übersehen hat. Diese Krystalle lösen sich nicht in Wasser, nicht in Säuren, leicht in Alkohol, Aether, Chloroform, Benzin und Petroleumäther. 2. Einen nicht krystallisirenden, in getrocknetem Zustand ein schneeweisses Pulver bildenden Körper, der wie Lucas von seinem Taxin angiebt, bitter schmeckt, sich schwer löst in Wasser, leicht in Aether und Alkohol und in verdünnten Säuren, aus welchen ihn Aetzalkalien in weissen, voluminösen Flocken niederschlagen. Tanninauflösung fällt die schwefelsaure Lösung weiss, Jodtinctur gelbbraun, Platinchlorid zeigt keine Einwirkung. Ausser diesen von Lucas angeführten Eigenschaften bietet dieser Körper folgendes Verhalten dar, wodurch sich seine Alkaloidnatur noch deutlicher kund giebt. Er löst sich ausser in Aether und Alkohol leicht in Benzin und Chloroform, nicht in Petroleumäther. (Dieser Aether ergiebt daher das Mittel beide Körper mit Leichtigkeit von einander zu trennen). Aus saurer, wässriger, nicht zu verdünnter Lösung wird er durch freie und kohlensaure Alkaline gefällt, durch einen

Ueberschuss dieser Reagentien wieder gelöst. Gefällt wird er ferner aus der wässrigen schwefelsauren oder salzsauren Lösung durch Phosphormolybdänsäure in weissen Flocken, in gleicher Weise durch Kaliumquecksilberjodid, Kaliumkadmiumjodid und Kaliumsilbercyanid. Orangeröthlich wird er gefällt durch Kaliumwismuthjodid, gelb durch saures chromsaures Kali, ebenso durch Pikrinsalpetersäure, braun durch Jodjodkaliumlösung. Keine Fällung geben Kaliumplatincyanür, Platinchlorid, Goldchlorid und Quecksilberchlorid. — Auf dem Platinspatel erhitzt schmilzt der Körper schon bei geringer Temperatur und verbrennt schliesslich ohne Rückstand; mit frischgeglühtem Natronkalk erhitzt, entwickelt er reichlich Ammoniak. — Demnach ist man berechtigt diesen Körper, das gereinigte Taxin, für ein nicht krystallisirendes, keine einfachen, festen Salze bildendes, aber eine ganze Reihe Doppelverbindungen eingehendes, stickstoffhaltiges Alkaloid zu halten.

Dies Alkaloid kommt auch in den Früchten vor. Schüttelt man das aus einer grösseren Menge trockener Samen (mindestens 5 Pfund) durch Aether ausgezogene, hell gelbe Oel wiederholt mit angesäuertem Wasser, so erhält man aus diesen sauren Lösungen durch geeignete Verfahren allerdings nur geringe Quantitäten Taxin.

Das zuerst genannte, aus den alkoholischen Auszügen abgetrennte Harz hält hartnäckig eine nicht unbedeutende Menge Taxin zurück. Durch wiederholtes Behandeln mit angesäuertem Wasser gelingt es schliesslich alles Taxin zu entziehen, aber auch das völlig alkaloidfreie Harz wirkt noch auf den thierischen Organissmus ein.

Hinsichtlich der toxischen Wirkung gebührt von den genannten Substanzen dem Taxin die erste Stelle. Sehr kleine Dosen wirken unter für die Taxusvergiftungen characteristischen Erscheinungen auf Hunde, Katzen, Kaninchen, Tauben und Frösche je nach dem benutzten Applicationsort schneller oder langsamer tödtlich ein. Die Wirkungsweise ist aber keineswegs eine narcotische in strengem Sinn des Wortes.

Da dieses Taxin auch in den Samen wenn auch spärlich vorkommt, müssen die letzteren im Widerspruch mit den meisten Pharmacologen gleichfalls für giftig, wenn auch nur für sehr wenig giftig erklärt werden.

Das Harz wirkt irritirend auf den tractus intestinalis ebenso wie der in Nadeln kristallisirende Körper.

In wie weit endlich die Ameisensäure und Buttersäure sich an der toxischen Wirkung des Eibenbaums betheiligen lasse ich vorläufig dahin gestellt sein. Die Wirkungsweise der vorher genannten drei Körper rechtfertigt die Klassificirung des Taxus unter die narcotisch scharfen Gifte, vorausgesetzt, dass man den Begriff der narcotischen Gifte im Sinne von Schroff, dem Nestor der experimentirenden Pharmacologen, gelten lässt.

Die ausführlichere Darlegung der chemischen Untersuchung so wie der physiologischen Wirkung der verschiedenen Körper behalte ich mir für späterhin vor. —

Ueber einen Satz aus der Analysis situs

von

Felix Klein.

In v. Staudt's Geometrie der Lage wird die projectivische Geometrie, wie bekannt, durch blosse Betrachtung des Ineinanderliegens von Ebene, Gerade und Punct aufgebaut. Von Maassbestimmung ist dabei zunächst keine Rede; es wird aber das Parallelenaxiom vorausgesetzt, weil sonst z. B. zwischen einer geraden Punctreihe und einem Ebenenbüschel kein vollständiges Entsprechen statt zu finden brauchte, vielmehr ein ganzer Theil der Ebenen des Büschel's von der geraden Punctreihe möglicherweise nicht getroffen wurde. Nun hat sich aber gezeigt, dass die Ebenen und Geraden der Nicht-Euklidischen Geometrie, in welcher das Parallelenaxiom nicht zu Grunde gelegt ist, trotzdem die projectivischen Beziehungen besitzen. Es folgt dies aus den Arbeiten Beltrami's [1]), der nachweist, dass in einem Raume von constantem Krümmungsmaasse die kürzesten Linien durch lineare Gleichungen dargestellt werden können. Insbesondere habe ich denn gezeigt [2]), dass die Maassbestimmung der Nicht-Euklidischen Geometrie mit der projectivischen zusammenfällt, welche man nach Cayley's Vorgange auf eine Fläche zweiten Grades gründen kann. Es muss also möglich sein, die projectivische Geometrie unabhängig von dem Parallelenaxiom aufzubauen,

1) bes. Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante. Annali di Matematica. Serie II t. II. 1868/69.

2) diese Nachrichten 1871. Math. Annalen t. IV. »Ueber die sogenannte Nicht - Euklidische Geometrie.«

und wenn bei Staudt das letztere vorausgesetzt wird, so kann dasselbe der Sache nach keine wesentliche Rolle spielen, wenn auch möglicherweise die Form, unter welcher Staudt seine Betrachtungen vorträgt, davon abhängen kann. Um sich hierüber Klarheit zu verschaffen, mag man sich die Frage vorlegen, ob man nicht den von Staudt eingeschlagenen Gang Schritt für Schritt verfolgen kann, wenn man sich das Gesetz auferlegt, mit den nöthigen Constructionen aus einem gegebenen begränzten Raume nicht hinauszutreten. Es seien also die Ebenen, Gerade und Puncte nach ihren gegenseitigen Lageverhältnisssen in einem begränzten Raume gegeben, den man der Uebersichtlichkeit wegen als einfach zusammenhängend und überall convex begränzt denken mag; ob ausserhalb des Raumes die Ebenen und Geraden überhaupt existiren, bleibe unbestimmt, um so mehr also, welche Relationen sie zu einander im Unendlichen haben. Wird es dann noch möglich sein, im Anschlusse an den von Staudt eingeschlagenen Gang die projectivische Geometrie als innerhalb des gegebenen Ranmes gültig zu erweisen? Diese Frage habe ich in der genannten Mittheilung »Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie« aufgeworfen und bejaht, allerdings ohne näher auf die Begründung der bejahenden Antwort einzugehen. Von verschiedenen Seiten her sind Zweifel an der Richtigkeit meiner Behauptung geltend gemacht worden. Indem ich desshalb neuerdings die Frage wieder aufnahm und eine ausführlichere Darlegung derselben vorbereitete, bemerkte ich, dass bei der Staudt'schen Betrachtung nicht nur das Parallelenaxiom unwesentlich ist, sondern auch die Forderung, dass man mit den wirklichen Ebenen und Geraden zu thun

habe, dass man vielmehr dieselben Betrachtungen auf jedes System von Flächen und Curven übertragen kann, welches eine ähnliche Anordnung wie das System der Ebenen und Geraden besitzt. Mit anderen Worten, man kann den folgenden Satz [1]) aufstellen, den ich als einen Satz der Analysis situs bezeichne, insofern die geometrischen Dinge, von denen in ihm gehandelt wird, alle bei einer stetigen Verzerrung des Raumes ungeändert bleiben.

»In einem einfach zusammenhängenden Raume sei eine unendliche Schaar einfach zusammenhängender, überall stetig gekrümmter, nur durch die Begränzung des Raumes geendigter Flächen gegeben, welche die folgende Anordnung besitzen:

1) Durch drei beliebig angenommene Puncte des gegebenen Raumes geht eine und nur eine Fläche des Systems;

2) Zwei Flächen des Systems haben, wenn sie sich treffen eine nur aus einem Zuge bestehende und bis an die Begränzung des Raumes hinanreichende Durchschnittscurve gemein;

3) Jede Fläche des Systems, welche zwei Puncte einer solchen Durchschnittscurve enthält, enthält dieselbe ganz«.

»Dann kann man im Anschlusse an Staudt [2]) für dieses Flächen- und Cur-

1) Dem Satze sind einige Beschränkungen hinzugefügt hinsichtlich des Zusammenhangs der vorkommenden Gebilde, die möglicherweise entfernt werden können.

2) Dem Staudt'schen Gange stellen sich einige Bedenken entgegen, welche nur durch bez. Axiome zu beseitigen scheinen, wie sie überhaupt immer nöthig werden, wenn es sich darum handelt, den Raum als eine Zahlenmannigfaltigkeit aufzufassen. Dieselben Bedenken finden

ven-System die Geltung der projectivischen Geometrie erweisen; anders ausgedrückt: dann kann man den Puncten des gegebenen Raumes in der Weise Coordinaten ertheilen, dass die gegebenen Flächen durch lineare Gleichungen dargestellt werden«.

Dass es Flächensysteme der gemeinten Art überhaupt gibt, zeigt das Beispiel der Ebenen. Unbegränzt viele solcher Flächensysteme erzeugt man, indem man sich die Ebenen in einem convex begränzten, einfach zusammenhängenden Raumstücke construirt denkt, und dann das Raumstück einer durch stetige Processe herbeiführbaren Deformation unterwirft. Und die in Rede stehende Behauptung kann geradezu dahin ausgesprochen werden: Jedes den Voraussetzungen des Satzes genügende Flächensystem kann auf diese Weise aus dem Systeme der Ebenen erzeugt werden.

Was diesen Satz sehr merkwürdig macht, ist, dass ein analoger Satz, den man für die Ebene formuliren möchte, nicht existirt. Ist nämlich in einem begränzten Theile der Ebene ein Curvensystem von der Eigenschaft gegeben, dass durch je zwei Puncte eine und nur eine Curve hindurchgeht, so bedarf es noch weiterer Bedingungen, ehe die Curven durch lineare Gleichungen zwischen Punctcoordinaten dargestellt werden können. Diesen negativen Satz mag man, sofern ein Beweis überhaupt nöthig scheint, aus

sich bei dem geometrischen Beweise des im Texte genannten Satzes wieder und mögen durch die entsprechenden Forderungen erledigt werden, die dann weniger Axiome sind als Bedingungen, welche die Flächensysteme characterisiren, auf die der Satz Anwendung finden soll.

einem Theoreme von Beltrami ableiten. Ein Curvensystem der gemeinten Art erhält man nämlich z. B. wenn man auf einer einfach zusammenhängenden begränzten Fläche die geodätischen Curven zieht und dann die Fläche auf einen Theil der Ebene beliebig ausbreitet. Aber Beltrami zeigt [1]), dass nur den Flächen von constantem Krümmungsmaasse die Eigenschaft zukommt, sich so auf die Ebene übertragen zu lassen, dass sich alle geodätischen Curven mit geraden Linien decken.

Man darf es daher auch nicht, wie seither wohl geschehen, als einen Kunstgriff von Staudt's auffassen, wenn er behufs Begründung der projectivischen Geometrie auch der Ebene die stereometrischen Verhältnisse in Betracht zog; sondern es entspricht dieser Ausgangspunct dem Wesen der Sache: es gilt für die geraden Linien der Ebene, falls man im Anschlusse an Staudt die Betrachtung der Maassverhältnisse ausschliesst, nur desshalb die projectivische Geometrie, weil Ebene und Gerade als Glieder eines räumlichen System's aufgefasst werden können. —

War der in Rede stehende Satz dem Bedürfnisse entsprechend, aus dem er entsprungen ist, vorstehend in rein geometrischer Form mitgetheilt, so ist das als zufällig anzusehen; man kann seinen Inhalt rein analytisch formuliren und dann auf Mannigfaltigkeiten von beliebig vielen Dimensionen übertragen. Er gilt, so lange die Zahl der Dimensionen nicht kleiner ist, als drei; für zwei Dimensionen gilt er nicht mehr, für eine Dimension hat er keinen Inhalt. Wesshalb der Satz in dieser Weise an die Zahl

1) In den Annali di Matematica. Serie 1. t. VII. p. 185.

der Dimensionen geknüpft ist, mag man aus den folgenden Betrachtungen ersehen, die man gleichzeitig als einen analytischen Beweis desselben auffassen kann.

Es seien drei Mannigfaltigkeiten bez. von 1, 2, 3 Dimensionen gegeben; dieselben mögen, der Anschaulichkeit wegen, durch die Puncte eines Curvenstückes, bez. eines einfach zusammenhängenden Flächen- oder Raum-Stücks vorgestellt sein, die man sich jetzt also irgendwie durch Coordinatenwerthe bezeichnet zu denken hat. Für die Puncte der Curve existirt, sofern man beliebige Aenderungen der Curve in Betracht zieht, keine andere (geometrische) Beziehung, als dass consecutive Puncte consecutive Puncte bleiben. Bei den Puncten der Fläche giebt es bereits unendlich viele Fortschreitungsrichtungen zu benachbarten und für diese Fortschreitungsrichtungen bestehen dieselben projectivischen Beziehungen wie für die Geraden eines ebenen Strahlenbüschel's. Das heisst, man kann von einem Doppelverhältnisse von vier Fortschreitungsrichtungen etc. reden. Von den Puncten des Raumes aus endlich giebt es zweifach unendlich viele Fortschreitungsrichtungen, für welche denn die nämlichen projectivischen Beziehungen gelten, wie für die Geraden eines Strahlenbündels. Insbesondere also kann man die Fortschreitungsrichtungen in unendlich viele Büschel zusammenfassen und zu drei Elementen eine Büschel's das vierte harmonische vermöge einer Construction, die der gewöhnlichen Vierseitsconstruction nachgebildet ist, auffinden.

Auf der gegebenen Fläche sei jetzt ein Curvensystem C construirt, von der Art, dass durch

je zwei Punkte der Fläche eine und nur eine C geht; andererseits in dem gegebenen Raume ein Flächensystem F, welches die in dem in Rede stehenden Satze vorausgesetzten Eigenschaften besitzt.

Auf der gegebenen Fläche geht durch jeden Punct ein Büschel von Curven C; auf die C eines solchen Büschel's überträgt sich die zwischen den vom Puncte ausgehenden Fortschreitungsrichtungen bestehende projectivische Zuordnung. Man wähle unter den C des Büschel's vier C, die ein bestimmtes Doppelverhältniss mit einander bilden, aus, etwa vier harmonische C, und schneide sie mit einer nicht dem Büschel angehörigen Curve C'. Zieht man durch diese Schnittpuncte und einen beliebig sonst in der Fläche angenommenen Punct nun wieder vier Curven C, so ist gar kein Grund vorhanden, wesshalb dieselben für das zu dem neuen Puncte gehörige Büschel harmonisch gelegene Curven sein sollen.

Ganz anders aber ist es im Raume mit dem Flächensysteme F. Man betrachte zunächst das Flächenbündel, welches durch einen Punct geht. Auf dasselbe überträgt sich in dualistischem Sinne die projectivische Geometrie, welche für die Fortschreitungsrichtungen vom Puncte aus galt, indem jede Fortschreitungsrichtung eine der den Flächen F des Bündels gemeinsame Durchschnittscurve bezeichnet. Man schneide jetzt das Bündel durch eine ihm nicht angehörige Fläche F'. So erhält man in F' ein Curvensystem der oben betrachteten Art, welches ausserdem aber die Eigenschaft besitzt, dass man zu drei Puncten einer Curve vermöge der Vierseits-Construction einen bestimmten vierten sog. harmonischen Punct finden kann. Denn die

entsprechende Construction gilt für das ursprünglich angenommene Bündel F, und die Construction hat die Eigenschaft, sich beim Schnitte zu übertragen. Laut Voraussetzung wird aber die Fläche F′ von jedem anderen Bündel von Flächen F in denselben Curven geschnitten. Da sich auch rückwärts von F′ auf ein schneidendes Bündel die Vierseits-Construction überträgt, so werden also durch F′ vier harmonischen Elementen des ursprünglichen Bündels vier harmonische Elemente jedes anderen Bündel's zugeordnet; mit anderen Worten: durch die F′ sind alle Bündel von F auf einander projectivisch bezogen, was denn unmittelbar zur Folge hat, dass man die F′, d. h. jede beliebige F, durch eine lineare Gleichung darstellen kann.

Universität.

Preisvertheilung.

Gestern, am 4. Juni, fand die Feier der akademischen Preisvertheilung statt. Die Festrede hielt Professor Sauppe, über den Einfluss der Poesie auf das Leben der Völker und die Entwicklung des Menschengeschlechts.

Nur bei der theologischen Fakultät waren dies Jahr Arbeiten eingegangen. Die eine, welche für die wissenschaftliche Aufgabe *über Leben und Lehre des Paulus von Samosata* eingereicht worden war, wurde von der Fakultät des Preises würdig befunden. Als Verfasser ergab sich bei Eröffnung des Zettels

Theodor Nottebohm
stud. theolog. aus Hamburg.

Predigten *(über 2. Cor. 4, 5—7)* waren sechs eingegangen; die Fakultät hatte der des Studiosus theol.

Heinrich Schölkmann
aus Calberlah (Prov. Han.)

den halben königlichen Preis zuerkannt.

Die neuen Preisaufgaben für den 4. Juni 1873 sind:

1. Von der theologischen Fakultät, wissenschaftliche Aufgabe:

Delineetur ordo vitae christianae, qui in potioribus libris asceticis in ecclesia lutherana saeculi XVII. probatis proponitur, et, quid ad lutheranismi indolem cognoscendam valeat, demonstretur.

Als Predigttext giebt sie:

Jacobi 3, 13—18.

2. Die Aufgabe der juristischen Fakultät ist:

Explicentur iuris romani principia de mandato, quod vocant, qualificato.

3. Die der medicinischen ist:

Es ist bis jetzt nicht in befriedigender Weise aufgeklärt, ob der mit der Nahrung eingeführte oder aus Amylum gebildete Zucker als solcher aus dem Darm zur Aufsaugung, ins Blut und im Stoffwechsel zur Verwendung gelangt: es soll durch Versuche an Thieren, unter Berücksichtigung zugleich des Rohr- und Milch-Zu-

ckers, diese Frage von neuem bearbeitet werden, wobei namentlich auch die Einführung von Zucker in den Körper auf andern Wegen als vom Darm aus, sowie die Frage nach den Bedingungen des Uebergangs von Zucker in den Harn in den Kreis der Untersuchung zu ziehen ist.

4. Die philosophische Fakultät stellt zwei Aufgaben,

als ordentliche:

Ars dialectica Platonis qua in re consistat quaeque ejus sit virtus in promovenda rerum cognitione, exemplis, quibus ad eam illustrandam Plato ipse usus est, recensendis et diligenter digerendis ostendi iubemus.

als ausserordentliche:

Plantae quaedam chlorophyllo destitutae eaeque phanerogamae quomodo nutriantur, nondum enucleatum est. Examinentur igitur Monotropa et Neottia et quaeratur, utrum aliquo anni tempore cum radicibus vivis plantae matricis cujusdam cohaereant, an more fungorum saprophytorum ex organis aliarum plantarum delapsis et putrescentibus nutrimentum hauriant.

Von gewissen phanerogamischen Pflanzen, welche kein Chlorophyll enthalten, ist es noch ungewiss, auf welche Weise sie sich ernähren. Es sollen daher Monotropa und Neottia in dieser Beziehung untersucht und namentlich soll erforscht werden, ob sie zu irgend einer Zeit des Jahrs mit den Wurzeln lebender Mutterpflanzen in Verbindung stehen, oder ob sie nach Art der saprophytischen Schwämme ihre

Nahrung aus den abgefallenen faulenden Organen anderer Pflanzen beziehen.

Die Bearbeitungen müssen mit einem Motto versehn und zugleich mit einem versiegelten Zettel, der aussen dies Motto trägt und innen den Namen des Verfassers enthält, bis zum 15. April 1873 den Dekanen der einzelnen Fakultäten übergeben werden. Die Bearbeitung der medicinischen und der ausserordentlichen philosophischen Aufgabe kann auch in deutscher Sprache erfolgen.

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

12. Juni. №. 15. 1872.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Kleinhirn und Bogengänge der Vögel.

Anatomisch-physiologische Untersuchungen.

Vorläufige Mittheilung

von Dr. A. v. Schklarewsky.

Vorgelegt von G. Meissner.

Bei den Vögeln beherbergt das Schläfenbein in derjenigen Partie, in welcher die Bogengänge eingelagert sind, eine in den von den Bogengängen umfassten Raum sich weit hinein erstreckende, von den umgebenden pneumatischen Knochenzellen vollkommen abgeschlossene Höhle, welche mit der hintern Schädelgrube in offener Verbindung steht, resp. einen seitlichen, etwas nach hinten und unten gerichteten Ausläufer derselben bildet. Die Höhle ist meistens von Innen nach Aussen kanalartig gestreckt von der Länge mehrer Millimeter (Gans 8,0 mm. Huhn 5,7 mm. Taube 4,5 mm. Ente 5,5 mm.), in anderen Fällen, z. B. Schwan, hat sie bei bedeutender Grösse die Form eines abgestumpften Kegels mit nach Innen gewendeter Basis. Die Längsaxe der Höhle fällt ziemlich genau zusammen mit der Schneidungs-

linie der Ebenen des horizontalen und des äussern vertikalen Bogenganges, an dessen vorderer oder theilweise unterer Seite dicht anliegend die Höhle hinzieht und mit ihrer äussersten abgerundeten Kuppe meistens so weit wie die äusserste Convexität des letztgenannten Bogenganges an die äussere Platte der Schädelwand heranreicht, und daher in dem Winkel zu finden ist, welchen der äussere vertikale und der horizontale Bogengang nach vorn und oben bei ihrer Kreuzung bilden. Der innere vertikale Bogengang umfasst in einigem Abstande den Eingang der Höhle, welcher meistens kleinere Dimensionen hat, als die zunächst folgenden Querschnitte der Höhle. Nahe unterhalb des Eingangstheils der Höhle liegt das Vestibulum mit den Ampullen. Der Lage nach könnte daher dieser Ausläufer der Schädelhöhle als »Cavitas mesootica« bezeichnet werden. Die Wandung dieser Höhle wird von einer dünnen spröden Lamelle compacter Knochensubstanz gebildet, welche auf der Innenfläche gewöhnlich einige seichte Vertiefungen, analog den Impressiones digitatae, darbietet. An der hintern Wand sieht man Innen gewöhnlich (z. B. Schwan, Storch, Meleagris gallopavo u. A.) eine knöcherne Leiste nach dem Grunde der Höhle zu allmählich verstreichend vorspringen, welche die Höhle der Länge nach in zwei Unterabtheilungen unvollkommen scheidet, und der Eingangsöffnung, in welcher die Leiste am stärksten vorspringt, eine nierenförmige Gestalt verleihet. Bei einigen Vögeln (z. B. Astur palumbarius) zerfällt die Höhle sogar in zwei getrennte Kanäle, während es anderseits auch vorkommt, (z. B. Corvus corone) dass nur eine dieser Unterabtheilungen ausgebildet ist, und die andere nur als Andeutung in Gestalt eines Grübchens an der betreffenden

Stelle der innern Schädeloberfläche vorgefunden wird. Ausser bei den gewöhnlicheren Hausvögeln, Gans, Ente, Huhn, Taube, war ich Dank der Freundlichkeit des Herrn Prof. Claus im Stande noch bei folgenden Vögeln die Anwesenheit des in Rede stehenden Schädelhöhlenanhangs durch Präparation festzustellen: Anas acuta, Anser segetum, Ardea cinerea, Astur palumbarius, Ciconia alba, Corvus corone, Cygnus olor, Falco ossifragus, Grus, Larus, Meleagris gallopavo, Psophia crepitans, Tetrao urogallus. Die einzige bis jetzt von mir angetroffene Ausnahme kommt bei Psittacus vor, bei welchem die Höhle bis auf eine seichte unter dem innern vertikalen Bogengange gelegene Vertiefung der innern Schädeloberfläche reducirt ist. Ein entgegengesetztes Extrem bieten die Verhältnisse beim Schwan dar, wo die mächtig entwickelte Cavitas mesootica den ganzen von den Bogengängen umwölbten Raum ausfüllt und sogar noch bedeutend nach Oben und Aussen daraus hervorragt, welcher Umstand bei diesem Vogel so wie auch bei einigen Verwandten eine ungewöhnliche Stellung des gewissermassen nach hinten gedrängten äussern vertikalen Bogenganges bedingt.

Wenn schon diese Höhle abgesehen von ihrer in manchen Abbildungen des Vogelschädels richtig dargestellten Eingangsöffnung, wie es scheint, bisher kaum beachtet wenigstens nirgends beschrieben wurde, so dürfte dies in vielleicht noch höherm Maasse von ihrem Inhalt gelten, welchen zapfenartige, langgestreckte Ausläufer oder vielmehr unmittelbare Fortsetzungen der bisher sogenannten »seitlichen Anhänge« des Wurms des Kleinhirns bilden. Nach sämmtlichen bekannteren Abbildungen und Beschreibungen des Vogelhirns, so wie nach mir zugänglichen Präpa-

raten zu urtheilen, wurde bisher der die ganze Cavitas mesootica ausfüllende Ausläufer des kleinen Gehirns in der Nähe der gleichsam eingeschnürten Eingangsöffnung dieser Höhle wie an seinem Stiel gewöhnlich abgebrochen, wie denn in der That diese zarte Abtheilung des Gehirns der Vögel nur bei besonders darauf gerichteter sehr sorgfältiger Präparation unter Aufbrechen der Cavitas mesootica von Aussen und Oben her unversehrt im Zusammenhang mit dem Wurm des kleinen Gehirns dargestellt werden kann. Diese Hirnfortsätze sind mit sämmtlichen Hirnhäuten umkleidet, auf denen auffallend starke Blutgefässe ohne Verästelung, venösen Sinus analog, schlingenförmig die Hirnzapfen umgebend hinziehen. Die mikroskopische Untersuchung (Huhn) wies in der Substanz der Hirnzapfen zahlreiche doppeltcontourirte varikös werdende Nervenfasern, grosse Ganglienzellen und Neurogliaelemente nach. Diese Cerebellarfortsätze könnten mit Rücksicht auf ihre constante Einkeilung zwischen das Vestibulum und die Bogengänge als »Processus cerebelli mesootici« bezeichnet werden, während sie morphologisch offenbar die Hemisphären des kleinen Gehirns, erinnernd an die einigermassen ähnlich sich verhaltenden, wohl auch als Flocculi bezeichneten, Hemisphären des Kleinhirns des Kaninchens, darstellen.

Diese bisher sowohl von Seiten der Zootomie als auch von Seiten der Experimentalphysiologie unbeachtet gelassenen in unmittelbarster Nähe der Bogengänge gelegenen Hirnfortsätze kommen begreiflicherweise bei der Ausführung der bekannten Versuche von Flourens, Czermak, Vulpian, Goltz, bei denen es sich um Zerstörung der Bogengänge bei Vögeln handelt, sehr in Betracht. Es ist zu sagen kaum nöthig, dass

die Folgen der Zerstörung der Bogengänge allein und die der Verletzung oder Zerstörung der Processus mesootici des Kleinhirns verschiedene sind, und dass bei Eingriffen, welche beiderlei Organe treffen, sich die beiderlei Erscheinungsgruppen in verschiedener Weise combiniren können. Die Experimentalphysiologie glaubte sich ausgesprochener Massen bisher für völlig gesichert halten zu dürfen vor unbeabsichtigten Verletzungen des Kleinhirns bei jenen Versuchen, während in der That die Verletzung jenes zartwandigen Schädelhöhlenausläufers und seines nervösen und blutreichen Inhaltes bei Versuchen an den Bogengängen wohl nur durch grosse Sorgfalt bei genauer Kenntniss obiger anatomischer Verhältnisse zu vermeiden ist. Meine Versuche wurden an Hühnern, Tauben, Gans und Ente angestellt.

Wenn man zur Vermeidung der Blutung beim Aufschneiden der Weichtheile dieselben vorher mit Ligaturen umsticht, wenn man ferner beim Aufbrechen der Luftzellen die gefässführenden Canäle schont, und für die Eröffnung der Bogengänge diejenigen Stellen derselben aussucht, welche von den die Bogengänge begleitenden grossen Gefässen möglichst entfernt sind, so hat man während der ganzen Zeit das Operationsfeld so vollkommen blutfrei vor den Augen, dass man beim Anbrechen der Bogengänge das klare Labyrinthwasser deutlich ausfliessen sieht. Hat man sich auf diese Weise vor der unabsichtlichen Verletzung der Cavitas mesootica gesichert, und die häutigen Theile der Bogengänge, so weit sie nicht direct schon mit den knöchernen zerstört werden, durch die Einführung dünner Sonden oder Borsten nach beiden Richtungen hin zerstört, so sieht man gleich nach der Operation das Flourens'sche Hauptphänomen, d. h. die pendelartigen Bewe-

gungen des Kopfes eintreten. Den Ausgangspunkt dieser Bewegungen und die Ruhelage des Kopfes bildet aber dabei immer die gewöhnliche Mittelstellung desselben. Manègebewegungen unmittelbar nach der Operation wurden nicht beobachtet, sie stellten sich aber in manchen Fällen später ein, und können daher vielleicht nur als Complication in Folge der in der Wunde Platz greifenden pathologischen Processe betrachtet werden. Ebenso wenig wird in den rein operirten Fällen das Erbrechen beobachtet. Die pendelartigen Bewegungen des Kopfes lassen nach einiger Zeit nach, treten dann nur noch auf Erregung des Thieres ein und hören schliesslich nach einigen Tagen ganz auf. Ueber die Gleichgewichtsstörungen muss ich mich vorläufig mit Reserve aussprechen: einige Zeit nach der Operation, nachdem das Pendeln des Kopfes schon nachgelassen hat, bleiben die Thiere gewöhnlich stundenlang bewegungslos, wie in sich gekehrt, an dem ihnen angewiesenen Orte stehen. Die Aufregungen bringen dann sogleich die pendelnden Kopfbewegungen zum Vorschein, und bei Auftreibung zur Locomotion fällt das Thier auf der Stelle oder nach wenigen unplanmässigen Schritten um, während es in der Ruhe eine vollkommen symmetrische und sichere Haltung des Körpers und des Kopfes zu bewahren versteht. Manche Thiere erholen sich dann in den nächsten Tagen so weit, dass sie von selbst zu trinken, später auch zu fressen, sich zu bewegen, die neu-operirten Genossen zu überfallen anfangen. Manche andere bleiben aber auch nach dem Aufhören der Kopfbewegungen sehr unbeholfen, und was besonders wichtig ist, diese beiden Zustände können im Laufe der Zeit bei einem und demselben Thiere wechseln. Möglich daher, dass auch diese Störungen nur secundären

Einflüssen zuzuschreiben sind. Was aber die unzweifelhafte nächste Folge der Bogengangverletzung, d. h. die pendelnden Kopfbewegungen anbelangt, so sind dieselben wegen ihres rasch vorübergehenden Charakters wohl offenbar nicht als Wirkungen einer Lähmung oder eines Organwegfalls anzusehen, sondern vielmehr als ein Reizungsphänomen, dessen Ursache augenscheinlich durch die betreffenden Bewegungen selbst in hohem Grade verstärkt wird. Es wird richtig angegeben, dass bei der beiderseitigen Zerstörung sämmtlicher Bogengänge die Thiere unter heftigen Kopfbewegungen und Umwälzungen binnen weniger Stunden zu Grunde gehen. Wickelt man aber ein auf diese Weise operirtes Thier gleich nach der Operation ein, und verhindert man dabei durch eine steifere Cravatte das Pendeln des Kopfes, so kann man schon am folgenden Tage das Thier befreien, ohne dass die erwähnten ungestümen Ueberwälzungen eintreten. Im allgemeinen Befinden unterscheidet sich dann ein solches Thier kaum von denjenigen, bei welchen bloss 4 oder bloss 2 Bogengänge operirt wurden. Die Zerstörung der Bogengänge kann also an sich nicht die Ursache des Todes werden, wohl aber die Schäden, welche das operirte Thier bei den durch den ungewöhnlichen Reiz hervorgerufenen gewaltsamen Bewegungen sich selbst verschafft.

Bei der isolirten Verletzung oder theilweisen Abtragung eines Processus mesooticus des Kleinhirns, bei welcher starke Blutung wegen oben genannter anatomischer Verhältnisse bisher unvermeidlich war, tritt sogleich eine dauernde starke Ablenkung des Kopfes und Halses auf die entgegengesetzte Seite ein, wobei aber Nichts von den pendelnden Bewegungen zu beobachten ist.

Durch die symmetrische Verletzung des andern Kleinhirnzapfens gelingt es die Stellung des Kopfes in so fern zu corrigiren, dass das Thier einige Stunden lang denselben in der Mittellage zu tragen vermag. Später stellt sich aber gewöhnlich wiederum eine dauernde Contractur des Halses auf die eine oder auf die andere Seite ein; oder es entwickelt sich eine dauernde und beiderseits gleich starke Contractur der vorderen Halsmuskeln, in Folge deren das Thier mehre Tage lang den Kopf unter dem Rumpfe, den Scheitel nach unten gekehrt, trägt. — Erbrechen und Gleichgewichtsstörungen sind gewöhnliche Folgen dieser Operation. Die Gleichgewichtsstörungen haben aber hier einen ganz andern Charakter, als bei den an den Bogengängen operirten Thieren. Der schwankende, aber in der Regel mit einer hinreichenden Correction ausgeführte Gang eines Berauschten ist nur den Thieren mit verletzten Kleinhirnzapfen eigen. Nach der Operation losgelassen, pflegen sie sogleich davon zu gehen und zu flüchten, was ihnen trotz der vielfachen Schwankungen gewöhnlich auch gut gelingt. Je nach dem Grade der angebrachten Verletzung stellt sich bei ihnen früher oder später ein eigenthümlicher Zustand ein, indem sie bewegungslos und vielfach gekrümmt auf der Seite liegen dabei aber regelmässig athmen, das eingeführte Futter gut verdauen und für die Umgebung ziemlich offene Sinne haben. Von Zeit zu Zeit wird dieser Zustand von heftigen epileptiformen Convulsionen unterbrochen. Erst allmählich richten sie sich dann auf, und gehen dann in ein chronisches Stadium über, in welchem die dauernde Verdrehung des Halses und die Unsicherheit der Locomotion die hervorragendsten Erscheinungen bilden.

Selbstverständlich kann im Laufe der Zeit,

durch das Umsichgreifen der localen pathologischen Processe auch bei der rein ausgeführten Operation das Bild der hier skizzirten Erscheinungen durch das Hinzutreten des ursprünglich ausgeschlossenen Moments in verschiedenem Grade getrübt werden. Das Nähere darüber muss ich der ausführlichern und mit Abbildungen versehenen spätern Mittheilung vorbehalten.

Die vorstehender Mittheilung zum Grunde liegenden Untersuchungen wurden im hiesigen physiologischen Institute ausgeführt.

Göttingen den 1. Juni 1872.

Seebachit, ein neues Mineral.

Von

Dr. M. Bauer.

(Vorgelegt vom Secretair).

In den Basaltsteinbrüchen bei Richmond in der Colonie Victoria (Australien) wurden gelegentlich der Geologischen Landesuntersuchung von Charles Wilkinson in den Hohlräumen des Basalts eine Anzahl von interessanten Mineralien, namentlich Zeolithe gefunden und von George H. F. Ulrich beschrieben[1]). Es zeichnet sich darunter besonders schön krystallisirter Kalkharmotom (Phillipsit) aus neben einem Mineral, das von Ulrich (l. c. pag. 61) als Herschelit beschrieben und (Tafel V. Fig. 18 a und b und 19) abgebildet wurde. Es sind Tafeln von verschiedener Dicke, gebildet aus einem scheinbaren Dihexaeder mit Gradendfläche, häufig noch mit

1) Notes on the physical Geography, geology and Mineralogy of Victoria by Alfred R. C. Selroyn and George H. F. Ulrich. Melbourne 1866.

den Flächen eines scheinbaren Dihexaeders zweiter Stellung, das aber niederer ist, als dasjenige Dihexaeder zweiter Stellung das an dem erster Stellung die Endkanten gerade abstumpfen würde. Einer genaueren krystallographishen Untersuchung widersetzte sich die Beschaffenheit der Flächen. Die Flächen des scheinbaren Dihexaeders erster Stellung sind zwar sehr stark glasglänzend, aber sehr uneben und nach allen Richtungen hin gekrümmt und geknickt; die Flächen des zweiten Dihexaeders und die Basis sind matt, rauh, ebenfalls gekrümmt und ziemlich allmählig ohne Bildung einer scharf bestimmten Kante in einander übergehend. Lassen sich somit die zur Bestimmung der krystallographischen Elemente nöthigen Winkel nicht, oder doch nur sehr annähernd bestimmen, so ergiebt sich doch bei genauerer Untersuchung sofort, dass die Krystalle nicht dem hexagonalen System angehören können, da die glänzenden Flächen des ersten Dihexaeders nach der Höhenlinie nach innen gebrochen sind, so dass längs dieser Linie auf jeder Fläche des Dihexaeders ein einspringender Winkel von sehr nahe 180° entsteht und ebenso an den Seitenkanten des Dihexaeders.

Dass diese Krystalle wirklich nicht hexagonal, sondern rhombisch sind, hat Victor von Lang [1]) auch auf optischem Weg gezeigt und ebendort auch die vollkommen krystallographische Uebereinstimmung der Herschelitkrystalle von Sizilien mit den Krystallen von Richmond nachgewiesen durch annähernde Messung einiger Winkel.

Da die australischen Krystalle durch die Grösse

1) The London, Edinburgh and Dublin philosophical magazine. IV. ser. 28. Bd. 506. 1864.

und Schönheit ihrer Ausbildung, worin sie die sicilianischen weit übertreffen, besonderes Interesse erregten, so wurde eine Analyse auch dieses Vorkommens wünschenswerth, welche Herr Kerl im Laboratorium der hiesigen Universität auszuführen die Güte hatte.

Es wurde dabei folgendermassen verfahren:

0,0585 gr. des bei 100° getrockneten Minerals wurden geglüht. Der Glühverlust betrug 0,013 gr. Er bestand blos aus Wasser, dessen Menge 22,2 % beträgt.

Darauf wurde das fein pulverisirte Mineral durch HCl zersetzt, abgedampft, mit HCl und Wasser behandelt, und die zurückbleibende Kieselsäure abfiltrirt, ausgewaschen und gewogen.

Aus dem Filtrat wurde die Thonerde durch Ammoniak gefüllt und aus dem neuen Filtrat der Kalk als oxalsaurer Kalk, durch Versetzen mit Oxalsäure und Ammoniak im Ueberschuss ausgeschieden.

Das Filtrat von der Kieselbestimmung wurde zur Trockene gebracht, und der Rückstand gelinde geglüht und gewogen. Da die qualitative Analyse blos Spuren von Kali ergeben hatte, so wurde daraus der Natrongehalt ermittelt.

Auf diese Weise erhielt man für das vorliegende Mineral folgende procentische Zusammensetzung:

Kieselsäure	43,7
Thonerde	21,8
Kalk	8,5
Natron	3,5
Kali	Spur
Wasser	22,2
	97,2.

Vergleicht man die Zusammensetzung dieses Minerals mit der des Herschelits von Sicilien, so

ergiebt sich trotz der krystallographischen Uebereinstimmung ein bemerkenswerther Unterschied. Der Herschelit von Aci reale (wo übrigens nach Sartorius von Waltershausen [1]) gar kein Herschelit vorkommt) ist nach Damour [2]) folgendermassen zusammengesetzt:

Kieselsäure	47,43
Thonerde	20,54
Kalk	0,31
Natron	8,84
Kali	4,28
Wasser	17,74
	99,14

Es ist also beim australischen Mineral der Kieselsäuregehalt wesentlich geringer, der Wassergehalt beträchtlich höher, als beim Herschelit von Aci reale; der Thonerdegehalt ist bei beiden Mineralien ziemlich gleich; dagegen findet sich ein sehr wesentlicher Unterschied in dem Gehalt an Kalk und Alkalien. Während der Herschelit nur Spuren von Kalk, dagegen mehr als 13% Alkalien enthält, hat das australische Mineral 8,5% CaO und nur 3,5% Alkalien, und zwar blos Natron, der Herschelit dagegen neben 8,84 Na_2O noch 4,28 K_2O.

Eine einfache Formel lässt sich nach der vorliegenden Analyse nicht aufstellen; am besten stimmt die nachfolgende Formel, welche das Mineral als eine isomorphe Mischung aus einem kalkhaltigen und einem natronhaltigen Silikat auffasst;

$$\left\{\begin{array}{l} 2\,(2\,Na_2O\,.\,2\,AlO_3\,.\,7\,SiO_2 + 12\,H_2O) \\ 5\,(2\,CaO\;.\,2\,AlO_3\,.\,7\,SiO_2 + 12\,H_2O) \end{array}\right\}$$

1) Sartorius von Waltershausen, Vulkanische Gesteine etc.

2) Mittel aus den 2 Analysen Damour's cfr. Des Cloiseaux, Manuél de mineralogie I. 399.

oder:

$$\left\{\begin{matrix} 2\,(Na_4\,Al_2\,Si_7\,O_{22} + 12\,H_2O) \\ 5\,(Ca_2\,Al_2\,Si_7\,O_{22} + 12\,H_2O) \end{matrix}\right\}.$$

während der Herschelit nach Randelsberg[1]) die folgende Formel hat:

$$(Na_1\,Ka)_2\,Al\,Si_4\,O_{,2} + 5\,H_2O.$$

Die Uebereinstimmung zwischen der eben auf gestellten Formel und der Analyse ist eine vollkommen genügende, wie die nachfolgende Vergleichungstabelle zeigt:

	gefunden	berechnet:
Kieselsäure	43,7	43,6
Thonerde	21,8	21,6
Kalk	8,5	8,5
Natron	3,5	3,7
Kali	Spur	0,0
Wasser	22,2	22,6
	99,7	100,0

Dagegen ist die geringe Uebereinstimmung der Formeln des sicilianischen und australischen Minerals wegen der krystallographischen Uebereinstimmung auffallend. Diese geringe Uebereinstimmung darf jedenfalls nicht erklärt werden durch die Annahme, als sei das zur vorliegenden Analyse verwendete Material nicht rein oder zersetzt gewesen. Es wurden nur vollkommen wasserhelle Krystalle verwendet, die auch unter der Loupe keine Spur von Unreinigkeit zeigten.

Weitere Analysen der bei den hier verglichenen Mineralien ergeben vielleicht später die Uebereinstimmung der allgemeinen Formel beider, welche aus den krystallographischen Verhältnissen von Anfang an zu erwarten gewesen wäre. Es stände dann das australische Mineral zum Her-

1) Zeitschr. der deutsch. geol. Ges. 21. 121.

schelit in demselben Verhältniss, in welchem der Mesolith zum Natrolith steht, es wäre eine isomorphe Mischung aus dem kalkfreien natronhaltigen Herschelit und einem bis jetzt noch unbekannten kalkhaltigen und natronfreien Silikat Jedenfalls ist schon jetzt klar, dass das kalkreiche australische Mineral nicht mit dem kalkfreien Herschelit zusammengestellt werden darf, ganz abgesehen von der verschiedenen Formel, die sich aus den jetzt vorliegenden Analysen für beide ergeben.

Ich schlage desshalb für das australische Mineral einen neuen Namen vor und nenne es zu Ehren von Herrn Professor Karl von Seebach „*Seebachit*".

Es giebt aber ausser den oben erwähnten Analysen des Herschelits von Damour noch weitere Analysen von sogenanntem Herschelit, die Herr Prof. Sartorius von Waltershausen[1]) angestellt hat. Er findet für den sog. Herschelit von Aci castello, als Mittel aus zwei Analysen:

Kieselsäure	46,46
Thonerde	19,21
Eisenoxyd	1,14
Kalk	4,75
Magnesia	0,42
Natron	5,27
Kali	2,88
Wasser	17,86
	97,99

Diess ist also ebenfalls kein ächter Herschelit, sondern dieses Mineral steht zwischen Herschelit und Seebachit, von beiden ungefähr gleich weit-entfernt, wenigstens in Bezug auf den Kalk- und Alkaliengehalt.

1) Vulkanische Gesteine etc. und daraus: Dana mineralogy, 438.

Die Göttinger Universitätsmineralien-Sammlung besitzt durch die Güte des Herrn George Ulrich, field geologist in Victoria, eine hübsche Suite von Seebachit, der auch das Material zu vorliegender Arbeit entnommen ist. Anderweitige dringendere Arbeiten hindern mich an der Fortsetzung der Untersuchung des Seebachits, ich behalte mir aber für später noch weitere Mittheilungen darüber vor.

Zur simultanen Integration linearer partieller Differentialgleichungen

von **A. Mayer** in Leipzig.

(Aus einem Schreiben an A. Clebsch.)

Wenn die m linearen partiellen Differentialgleichungen:

$$\frac{df}{dx_i} + \sum_{h=m+1}^{h=n} a_h^i \frac{df}{dx_h} = 0, \; i = 1, 2, \ldots m$$

eine gemeinsame Lösung f besitzen, so ist diese Lösung, einer willkürlichen Constanten gleichgesetzt, zu gleicher Zeit ein Integral der $n - m$ linearen totalen Differentialgleichungen

$$dx_h = \sum_{i=1}^{i=m} a_h^i dx_i, \; h = m + 1, \ldots . n$$

und umgekehrt. Zwischen diesen beiden Systemen von partiellen und von totalen Differentialgleichungen besteht also ein ganz ähnlicher Zusammenhang, wie zwischen einer einzelnen linearen partiellen Differentialgleichung und dem correspondirenden System gewöhnlicher Differen-

tialgleichungen. Diese Bemerkung brachte mich auf den Gedanken, zu untersuchen, ob man nicht die, für die Integration der partiellen Differentialgleichungen 1ter O., für das Pfaff'sche Problem u. s. w. so wichtige Theorie der Jacobi'schen Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen auf die Betrachtung der ihnen entsprechenden Systeme von linearen totalen Differentialgleichungen gründen und von dieser Seite aus, durch Ausdehnung der Methode, die Herr P. du Bois-Reymond zur Integration der durch eine Gleichung integrirbaren totalen Differentialgleichungen gegeben hat, zu einer Reduction der Integrationen gelangen könne, die zur Auffindung einer gemeinsamen Lösung solcher simultaner partieller Differentialgleichungen erforderlich sind. Die weitere Verfolgung dieses Gedankens, bei der mir namentlich auch Ihre Untersuchungen »Ueber die simultane Integration linearer partieller Differentialgleichungen« sehr nützlich waren, führte mich zu dem folgenden Resultat, das ich mir erlaube Ihnen hierdurch mitzutheilen und dessen nähere Begründung, nebst specieller Anwendung auf die partiellen Differentialgleichungen 1ter O. und auf das Pfaff'sche Problem in einer Arbeit enthalten sind, die der Veröffentlichung durch die Mathematischen Annalen entgegensieht:

Es bedeute allgemein a_h^i eine gegebene Function der Variabeln $x_1\ x_2 \ldots x_n$ und $A_i(f)$ die Operation:

$$A_i(f) = \frac{df}{dx_i} + \sum_{h=m+1}^{h=n} a_h^i \frac{df}{dx_h}.$$

Finden dann zwischen den m Ausdrücken

$A_1(f), A_2(f) \ldots A_m(f)$ für jedes beliebige f die Relationen:

$$A_i(A_k(f)) = A_k(A_i(f))$$

identisch statt, so bilden die Gleichungen:

$$1)\ A_1(f) = 0,\ A_2(f) = 0,\ \ldots\ A_m(f) = 0$$

ein Jacobi'sches System von m linearen partiellen Differentialgleichungen, von dem man eine gemeinsame Lösung auf folgendem Wege finden kann:

Man führe an Stelle von $x_1\ x_2 \ldots x_m$ neue m Variable $\alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_m$ ein durch Substitutionen von der Form:

$$2)\ x_i = x_i^0 + (\alpha_1 - \alpha_1^0)\, f_i(\alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_m),$$

in denen $x_1^0\ x_2^0 \ldots x_m^0$ und α_1^0 beliebige Constanten sind, so gewählt, dass keiner der Ausdrücke a_h^i für

$$x_1 = x_1^0,\ x_2 = x_2^0,\ \ldots\ x_m = x_m^0$$

und keine der m Functionen $f_1\ f_2 \ldots f_m$ für $\alpha_1 = \alpha_1^0$ unendlich oder unbestimmt wird. Diese letzteren selbst können ganz willkürlich angenommen werden unter der einzigen Beschränkung, dass die m Gleichungen 2) auflösbar sein müssen nach $\alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_m$.

Drückt man mit Hülfe dieser Substitutionen die Grössen

$$b_\varrho^1 = \sum_{i=1}^{i=m} a_\varrho^i \left\{ f_i + (\alpha_1 - \alpha_1^0) \frac{df_i}{d\alpha_1} \right\}$$

$$b_\varrho^h = (\alpha_1 - \alpha_1^0) \sum_{i=1}^{i=m} a_\varrho^i \frac{df_i}{d\alpha_h},\ h > 1$$

durch $\alpha_1\,\alpha_2\,\ldots\,\alpha_m\,x_{m+1}\,\ldots\,x_n$ aus, und setzt allgemein

$$B_i(f) = \frac{df}{d\alpha_i} + \sum_{\lambda=m+1}^{\lambda=n} b^i_\lambda \frac{df}{dx_\lambda},$$

so verwandelt sich durch Einführung der α das gegebene System 1) in das folgende:

3) $B_1(f) = 0,\ B_2(f) = 0, \ldots B_m(f) = 0.$

Ist nun:

$$F\,(\alpha_1\,\alpha_2\,\ldots\,\alpha_m\,x_{m+1}\,\ldots\,x_n) = \text{Const.}$$

irgend ein Integral der $n-m$ gewöhnlichen Differentialgleichungen zwischen $x_{m+1}\,\ldots\,x_n$ und α_1:

$$4)\qquad \frac{dx_{m+1}}{d\alpha_1} = b^1_{m+1}, \ldots \frac{dx_n}{d\alpha_1} = b^1_n,$$

so ergiebt sich aus demselben zwischen $\alpha_1\,x_{m+1}\,..\,x_n$ und den zusammengehörigen Anfangswerthen $\alpha^0_1\,x^0_{m+1}\,\ldots\,x^0_n$ dieser Variabeln, Werthe, die im Folgenden als Constante, d. h. als unabhängig von $\alpha_2\,\ldots\,\alpha_m$ betrachtet werden, die Gleichung:

$$5)\quad F\,(\alpha_1\,\alpha_2\,\ldots\,\alpha_m\,x_{m+1}\,\ldots\,x_n)$$
$$= F\,(\alpha^0_1\,\alpha_2\,\ldots\,\alpha_m\,\ldots\,x^0_{m+1}\,\ldots\,x^0_n).$$

Man löse diese Gleichung nach irgend einem der darin vorkommenden Anfangswerthe von $x_{m+1}\,\ldots\,x_n$, etwa nach x^0_{m+1} auf und bilde mit der Auflösung:

$$x^0_{m+1} = A_{m+1}(\alpha_1\,\alpha_2\ldots\alpha_m\,x_{m+1}\ldots x_n\,x^0_{m+2}\,..\,x^0_n)$$

die m Gleichungen:

$$6)\quad B_i\,(A_{m+1}) = 0.$$

Sind diese sämmtlich identisch, so ist unmittelbar $f = A_{m+1}$ eine gemeinsame Lösung der Gleichungen 3). Ist dies aber nicht der Fall, so muss sich aus den Gleichungen 6) immer noch ein Theil der übrigen Anfangswerthe bestimmen lassen. Mit jedem der so erhaltenen Ausdrücke

$$x^0_{m+k} = A^1_{m+k}$$

kann man nun ebenso operiren wie vorhin und wird dadurch zu Gleichungen

$$B_i\,(A^1_{m+k}) = 0$$

gelangen, die entweder sämmtlich identisch sind oder ihrerseits wieder einige der noch übrigen Anfangswerthe bestimmen. Indem man in dieser Weise fortfährt, muss man, falls man nicht vorher schon auf eine Lösung des Systems 3) gestossen ist, schliesslich zu Gleichungen gelangen, aus denen sich sämmtliche, in der Gleichung 5) vorkommende Anfangswerthe der Variabeln $x_{m+1} \dots x_n$ bestimmen. Jede der Functionen von $\alpha_1\ \alpha_2 \dots \alpha_m\ x_{m+1} \dots x_n$, die hierdurch einem dieser Anfangswerthe gleich wird, ist eine gemeinsame Lösung der Gleichungen 3). Um aber aus einer Lösung dieses Systems eine Lösung des gegebenen Systems 1) zu erhalten, braucht man in derselben nur für $\alpha_1\ \alpha_2 \dots \alpha_m$ diejenigen Functionen von $x_1\ x_2 \dots x_m$ zu setzen, die sich durch Auflösung der Substitutionen 2) dafür ergeben, sodass also die Auffindung einer Lösung des vorgelegten Jacobi'schen Systems 1) nur die Kenntniss eines beliebigen Integrales der $n - m$ gewöhnlichen Differentialgleichungen 4) voraussetzt. —

Durch diesen Satz wird z. B. die Anzahl der Integrale, derer man zur vollständigen Integration einer gegebenen partiellen Differentialgleichung 1ter O. bedarf, selbst gegen die schöne, von Ihnen klar gelegte Weiler'sche Vereinfachung der Jacobi'schen Methode fast um die Hälfte verringert. Er gewährt überdies den Vortheil, dass man die Ordnung der Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen, von denen successive je ein Integral zu finden ist, von vornherein bestimmt angeben kann und nicht mehr von der Gunst oder Ungunst der Fälle abhängt. —

Verzeichniss der bei der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangenen Druckschriften.

Mai 1872.

Die mit * bezeichneten, in Pest herausgegebenen Werke in Ungarischer Sprache.

Nature 132. 133. 134. 135.
Berichte des naturwiss. medicinischen Vereins in Innsbruck. Jahrg. 2. Hft. 2 u. 3. Innsbruck 1872. 8.
Zeitschrift für die gesammten Naturwissenschaften, von Giebel. Bd. IV. Hft. 7—12. Berlin 1872. 8.
Monatsbericht der königl. preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Februar 1872. Berlin 1872. 8.
Sitzungsberichte der physikalisch-medicinischen Gesellschaft zu Würzburg für das Gesellschaftsjahr 1871. — 8.
Transactions of the Royal Society of Edinburgh. Vol. XXVI. Part II. III. For the session 1870—71. Edinburgh. 4.
Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. Session 1870—71. Ebd. 8.
Publications de l'Institut R. Grand-Ducal de Luxembourg. Section des Sciences naturelles et mathématiques. T. XII. Luxembourg 1872. 8.

(Fortsetzung folgt.)

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

19. Juni. №. 16. 1872.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Ueber eine neue Integrationsmethode partieller Differential-Gleichungen erster Ordnung.

Von Sophus Lie in Christiania.

Mitgetheilt von A. Clebsch [1]).

Es ist mir gelungen eine neue Methode zur Integration partieller Differentialgleichungen erster Ordnung zu finden, die sowohl hinsichtlich

1) Indem ich der Kgl. Gesellschaft die obige Note von Herrn Lie vorlege, erlaube ich mir, mit einigen Worten auf die Beziehung derselben zu der in der vorigen Nummer der Nachrichten enthaltenen Note von Herrn Mayer hinzuweisen. Schon vor einigen Wochen wurde mir von Herrn Lie die schriftliche Mittheilung, dass derselbe auf diese neue und wichtige Modification der Lagrange-Jacobi'schen Methode zur Integration partieller Differentialgleichungen gekommen sei, vermöge deren die Anzahl der dabei zu leistenden Integrationen wesentlich verringert werde. Die Mittheilungen von Herrn Lie (mit denen übrigens gleichzeitig Mittheilungen desselben an die Academie zu Christiania gelangten) liessen mich vermuthen, dass seine Methode, wenn auch durch ihre geometrische Fassung formel ganz verschieden, doch im Wesentlichen mit den Resultaten einer Arbeit von Herrn Mayer übereinstimmen werde, welche dieser der Redac-

der Einfachheit der Principien wie der Zahl der nothwendigen Integrationen bemerkenswerthe Vorzüge vor den bisher bekannten bietet. Die Grundzüge dieser Methode habe ich bereits in zwei der Academie zu Christiania eingereichten Noten [2]) entwickelt; es sei mir gestattet, im Folgenden, unter blosser Andeutung der Principien, anzugeben, was die Methode leistet.

1) Die Lagrange'sche Integration der partiellen Differential-Gleichungen zwischen drei Variabeln beruht darauf, dass man, wenn

$$F\,(z, x, y, p, q) = 0 \qquad \Phi\,(z, x, y, p, q) = 0$$

einfach unendlich viele Integrale gemein haben, dieselben durch Integration eines Ausdruckes

$$A\,dx + B\,dy + C\,dz = 0 \qquad (1)$$

findet, in welchem A, B, C gegebene Functionen

tion den Mathematischen Annalen übergeben hatte. Bei der Wichtigkeit und Tragweite der hier in Rede stehenden Untersuchungen konnte es nur wünschenswerth erscheinen, dass Herr Mayer von seiner Resultaten der Kgl. Gesellschaft eine kurze Mittheilung machte, welche in der letzten Nummer dieser Nachrichten gedruckt ist. Ebenso hat nun Herr Lie in der vorliegenden Note die Principien und Resultate seiner Untersuchungen zusammengestellt, bei deren Redaction er mit der Methode von Herrn Mayer übrigens noch nicht bekannt gewesen ist. Ein Vergleich der beiden Noten wird wenigstens im Allgemeinen die Identität ihrer Resultate erkennen lassen; — ein neuer und merkwürdiger Fall, in welchem zwei Mathematiker nahezu gleichzeitig unabhängig von einander auf ganz verschiedenen Wegen zu derselben wichtigen Entdeckung geführt worden sind. Clebsch.

2) 1) *Kurzes Resumé mehrerer neuer Theorieen* (eingereicht 30. April, vorgelegt 3. Mai).

2) *Neue Integrationsmethode partieller Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen n Variabeln* (vorgelegt 10. Mai).

von x, y, z sind. Nun kann man beweisen, dass die Integration der Gleichung (1) auf die Integration einer einzigen gewöhnlichen Differentialgleichung zwischen zwei Variabeln zurückgeführt werden kann[3]; in Folge dessen kann man die Lagrange'sche Methode in der folgenden fundamentalen Weise auffassen:

Lagrange hat gelehrt, eine partielle Differentialgleichung zwischen drei Variabeln

$$F(z, x, y, p, q) = 0$$

auf eine damit äquivalente Differentialgleichung zwischen zwei Variabeln zurückzuführen, vorausgesetzt, dass zuerst ein particuläres Integral eines simultanen Systems, bestehend aus drei gewöhnlichen Differentialgleichungen, gefunden ist.

Meine Methode beruht nun auf dem folgenden Satze, der den vorangehenden umfasst:

Eine partielle Differentialgleichung zwischen n Variabeln:

$$F\left(z_1\, x_1 \ldots x_{n-1}, \frac{dz}{dx_1}, \ldots \frac{dz}{dx_{n-1}}\right) = 0$$

kann auf eine mit ihr äquivalente partielle Differentialgleichung zwischen $(n-1)$ Variabeln zurückgeführt werden, vorausgesetzt, dass zuerst ein particuläres Integral eines bekannten simultanen System's, bestehend aus $(2n-3)$ gewöhnlichen Differentialgleichungen, gefunden ist.

Indem man diesen Satz mehreremal anwendet, sieht man:

3) Diese wichtige Bemerkung, die sich ohne Weiteres auf n Variable überträgt, findet sich nicht in den Lehrbüchern, die ich im Augenblicke zur Hand habe.

Soll eine partielle Differentialgleichung zwischen n Variabeln integrirt werden, so betrachtet man successiv:

1 System bestehend aus $(2n-3)$ gewöhnlichen Differentialgleichungen,

1 System bestehend aus $(2n-5)$ gewöhnlichen Differentialgleichungen,

. . . .

1 System bestehend aus 3 gewöhnlichen Differentialgleichungen,

1 System bestehend aus 1 gewöhnlichen Differentialgleichung und bestimmt jedesmal ein Integral mit einer arbiträren Constanten. Sind diese Operationen geleistet, so findet man vermöge Differentiation ein vollständiges Integral der vorgelegten Gleichung.

In Verbindung hiermit führe ich an, dass eine neue Integrations-Methode simultaner Systeme sich auf den folgenden Satz begründen lässt:

Besitzen q partielle Differentialgleichungen zwischen n Variabeln ein gemeinsames vollständiges Integral mit $(n-q)$ arbiträren Constanten, so kann man immer eine partielle Differentialgleichung zwischen $(n-q+1)$ Variabeln aufstellen, deren Integration mit derjenigen des System's äquivalent ist.

2) Die Methode, die mich zu diesen Resultaten geführt hat, ist insofern eine geometrische gewesen, als ich Räume mit n Dimensionen betrachtet habe; das Wesentliche bei dieser Denkweise liegt übrigens wohl darin, dass man die Werthsysteme $(z_1 x_1, \ldots x_{n-1})$ und $(z_1 x_1 \ldots x_{n-1}, p_1, \ldots p_{n-1})$ als Individuen, als *Punct* und als

Elementartheil einer Mannigfaltigkeit auffasst. Bei dieser Auffassung definirt eine partielle Differentialgleichung

$$F\,(z_1\,x_1,\ \dots\ x_{n-1},\ p_1,\ \dots\ p_{n-1}) = 0$$

$(n-1)$fach ausgedehnte in dem Raume enthaltene Mannigfaltigkeiten, die sogenannten *Integral-Mannigfaltigkeiten*. Es gelten dann die folgenden Sätze:

a) Berühren zwei oder mehrere Integral-Mannigfaltigkeiten einer Gleichung

$$F\,(z_1\,x_1,\ \dots\ x_{n-1},\ p_1,\dots\ p_{n-1}) = 0$$

einander in einem Puncte, so berühren sie sich in einfach unendlich vielen Puncten, deren Inbegriff eine Characteristik heissen soll. — Dieser Satz liegt implicite in der Cauchy'schen Integrationsmethode, die vermöge der genannten Auffassung evident wird.

b) Sind zwei partielle Differentialgleichungen zwischen n Variabeln gegeben, welche ein gemeinsames vollständiges Integral mit $(n-2)$ arbiträren Constanten besitzen; berühren dann zwei oder mehrere gemeinsame Integralmannigfaltigkeiten einander in einem Puncte, so berühren sie sich in allen Puncten einer Congruenz (d. h. zweifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit), die ich characteristische Congruenz nenne. Jede characteristische Congruenz enthält einfach unendlich viele Characteristiken je einer der gegebenen Gleichungen. Alle characteristischen Congruenzen, die durch einen Punct gehen, erzeugen ein gemeinsames Integral. — Dieser Satz liegt meiner neuen Methode zu Grunde. Auf dem folgenden Satze endlich beruht meine Integrations-Methode für simultane Systeme:

c) Seien q Gleichungen zwischen n Variabeln gegeben, welche ein gemeinsames vollständiges Integral mit $(n-q)$ arbiträren Constanten besitzen; berühren dann zwei oder mehrere gemeinsame Integral-Mannigfaltigkeiten einander in einem Punct, so berühren sie sich in ∞^{n-q} Puncten, deren Inbegriff eine characteristische Mannigfaltigkeit heissen soll; alle solche, die durch einen Punct gehen, erzeugen ein Integral.

Die in dieser Nummer vorgetragene Erweiterung des Begriff's Characteristiken deutete ich in einer der Akademie zu Christiania überreichten (Sept. 1871) noch ungedruckten Note[4]) an, und zwar in Verbindung mit Untersuchungen über die Krümmungstheorie eines Raumes mit n Dimensionen.

4) Die bez. Note findet sich in dem Archive der Academie.

Christiania, 4. Juni 1872.

Berichtigung.

Nachrichten Seite 311 Zeile 3 v. u. zu setzen 99,7 statt 97,2.

Verzeichniss der bei der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangenen Druckschriften.

Mai 1872.

Fortsetzung.

Bulletin de la Société Imp. des Naturalistes de Moscou. Année 1871. Nos. 3 et 4. Moscou 1872. 8.
*Archäologische Mittheilungen. Bd. 8. Hft. 2.
*Jahrbücher der Ung. Akad. d. Wiss. Bd. 13. Hft. 5.
*Ungarisches Wörterbuch von Gr. Czuzor u. J. Fogarasi. Bd. 5 Hft. 3.
*Ungarisches historisches Magazin. Bd. 15.
*Monumenta Hungariae historica.
Abth. I. Urkunden. Bd. 13. 14. 15.
Abth. II. Schriftsteller. Bd. 20. 25.
*Historische Denkmäler der Türkisch-ungarischen Periode. Abth. I. Urkunden. Bd. 6.
*Statistische u. volkswirthschaftliche Mittheilungen. Bd. 7. Hft. 1. 2.
*Forschungen, philologische. 1870. St. 2—6 u. 11.
naturwissenschaftliche. St. 3 - 7.
staatswissenschaftliche. St. 2—4.
mathematische. St. 6. 7.
*Berichterstatter (Nachrichten) von der Ung. Akademie der Wiss. Jahrg. 4. Hft. 13—18. Jahrg. 5. Hft. 1—9.
*Almanach der Ung. Akad. der Wiss. für 1871.

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

10. Juli. | №. 17. | 1872.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften

Sitzung am 6. Juli.

Hübner und Schreiber, über das Atomgewicht der Fumar- und der Maleïnsäure.
Tollens und Caspary, über den Acrylsäure-Aether und die Acrylsäure.
Bauer, über Krystall-Allanit aus Thüringen.

Ueber das Atomgewicht der Fumar- und Maleïnsäure.

Von

H. Hübner und G. Schreiber.

Einen der bemerkenswerthesten Fälle von Isomerie bietet die Fumar- und Maleïnsäure.

Diese beiden einfach zusammengesetzten Säuren könnten die verschiedenen Arten der Aethylendicarboxyle darstellen. Nimmt man zunächst an das Aethylen sei $\begin{array}{c} CH_2 \\ \| \\ CH_2 \end{array}$ so würden diesen Säuren folgende Formeln zukommen:

$$\begin{array}{c} CH.COOH \\ \| \\ CH.COOH \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{c} C(COOH)_2 \\ \| \\ CH_2. \end{array}$$

Dieser einfachen Annahme steht aber der Umstand entgegen, dass sowohl Kekulé wie Limpricht (Z. f. Chem. 1869, 600) und andere Chemiker bei Anlagerung von Wasserstoff an diese sehr verschiedenen Säuren stets nur eine der zu erwartenden wasserstoffreichsten Säuren nämlich die gewöhnliche Bernsteinsäure erhielten und nicht wie man nach den angeführten Formeln meinen sollte aus der einen Säure die Isobernsteinsäure.

Schliesst man ferner den höchst seltenen Fall aus, dass bei niederen Wärmegraden und unter der wenig heftigen Wirkung des sich entwickelnden Wasserstoffs aus Natriumamalgam und Wasser eine Umlagerung der Bestandtheile einer dieser Säuren eingetreten sei, so kann der in den angeführten Formeln ausgedrückte Unterschied nicht die Isomerie bedingen.

Man wird daher zunächst zu folgenden zwei Annahmen genöthigt.

Entweder liegt hier gar keine Isomerie sondern eine Polymerie vor d. h. die beiden Säuren haben nicht das gleiche Atomgewicht. Die eine Säure könnte z. B. folgende Zusammensetzung haben:

$$\begin{array}{l} CH_2 . COOH \\ | \\ C \quad . COOH \\ \| \\ C \quad\ COOH \\ | \\ CH_2 . COOH. \end{array}$$

Um diese Frage zu entscheiden wurde das Atomgewicht von zwei leicht und sicher rein zu erhaltenden Abkömmligen der Fumar- und Maleinsäure nach dem vorzüglichen Verfahren von Hofmann bestimmt.

Das aus Chloroform gut kristallisirende Maleïnsäureanhydrid und der mit wenig Mühe zu

reinigende Fumarsäureäther wurden zu dieser Untersuchung ausgewählt, da die Fumarsäure kein Anhydrid bildet, also keine Umlagerung desselben zu fürchten ist und das Anhydrid sowohl wie der Fumarsäureäther unzersetzt verdampft werden können.

Dass der untersuchte Aether wirklich Fumarsäureäther war ging, neben der Analyse, daraus hervor, dass er mit alkoholischer Kalilauge behandelt unter schwacher Selbsterwärmung in ein Kalisalz überging dessen in Nadeln krystallisirende Säure an dem Umstand, dass sie bei 220° noch nicht schmolz leicht als Fumarsäure erkannt wurde. Das Maleïnsäureanhydrid wurde bei der Dampfdichtebestimmung nicht verändert, da dasselbe aus dem Dampfdichtrohre herausgenommen noch den ursprünglichen Schmelzpunkt zeigte.

Ferner bildeten die beiden Verbindungen normale Dämpfe, da dieselben bei der Abkühlung schnell verdichtet wurden.

Atomgewicht des Fumarsäureäthers (Sdp. 215—216°) [1])

berechnet:	gefunden:
172	170,4; 171,3

Atomgewicht des Maleïnsäureanhydrids (Schmpt. 56—57°)

berechnet:	gefunden:
98	94; 98,26

Diese Dampfdichtebestimmungen zeigen deutlich, dass die Fumar- und Maleïnsäure gleiche Atomgewichte haben.

Nach dieser Untersuchung bleibt als Grund der Isomerie dieser Säuren nur der Umstand

1) Nach Henry (D. chem. G. Berlin 1870, 707) soll der Fumarsäureäther bei 225° sieden, es beruht dieser Unterschied wohl auf Thermometerverschiedenheiten.

übrig, dass die eine derselben eine sogenannte ungesättigte Verbindung sei:

$$\begin{array}{l} -\mathrm{CH.COOH} \\ \vert \\ -\mathrm{CH.COOH} \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{l} \mathrm{CH.COOH} \\ \Vert \\ \mathrm{CH.COOH.} \end{array}$$

Kekulé (Ann. Chem. Pharm. Suppl. 2, 111) hat bereits früher diese Anschauung, welche bekanntlich zuerst von Rochleder (Z. f. Chem. 1864, 257) in die Wissenschaft eingeführt wurde, auf diese Säuren angewendet. In neuerer Zeit hat man aber diese Auffassung fallen lassen, nur für wenige Verbindungen wie CO und NO bleibt sie unentbehrlich, für die übrigen wasserstoffarmen Kohlenstoffverbindungen verwirft man dagegen diesen Begriff vollständig, so geschieht dies z. B. von Kekulé in seiner Abhandlung „über eine Verbindung des Aethylens mit Salpetersäure" (Deut. chem. G. Berlin 1869, 329.) Natürlich schliessen sich dieser sehr verbreiteten Ansicht nicht alle Chemiker an, kürzlich ist besonders Carstanjen (Jour. f. pr. Chem. 4,419 (1871) entschieden für das Vorhandensein von ungesättigten Kohlenwasserstoffen eingetreten.

Das Auftreten von ungesättigten Verbindungen würde die Untersuchung der wasserstoffarmen Verbindungen sehr erschweren, man müsste Erkennungsmittel für die ungesättigten Verbindungen auffinden. Zu darauf hinzielenden Versuchen würden sich die hier besprochenen Säuren besonders eigenen da sie sehr gleichartig gebaut sind. Vielleicht zeigt die eine Säure gegen die andere grössere Neigung Bestandtheile aufzunehmen z. B. schwach saure Gruppen wie CN.

Ehe wir aber eine ungesättigte Verbindung hier als nachgewiesen ansehen, wollen wir das Verhalten der untersuchten Abkömmlinge der Fumar- und Maleïnsäure gegen Wasserstoff noch

einmal prüfen. Bisjetzt haben wir gefunden, dass der Fumarsäureäther mit Natriumamalgam und wässrigem Alkohol behandelt eine Säure liefert die dreimal umkristallisirt bei 185—186° schmilzt, während reine Bernsteinsäure mit demselben Thermometer untersucht bei 182—183° schmilzt. Wir legen vorläufig auf diesen kleinen unverrückbaren Schmelzpunktunterschied kein Gewicht [1]).

Endlich versuchten wir zur Vergleichung mit der Fumar- und Maleïnsäure, eine isomere Aepfelsäure und aus dieser eine vielleicht der Fumar- oder Maleïnsäure gleiche Säure zubilden, indem wir folgenden Versuch ausführten.

Man weiss, dass die Vereinigung von zwei sauren oder basischen Bestandtheile mit einem Kohlenstoffatom durch die gewöhnlichen Vertretungen häufig nicht ausführbar ist, wir suchten daher die Verbindbarkeit der Aldehyde und zwar zunächst der gechlorten Aldehyde in diesem Sinn auszubenten. Aehnlich wie diese sich leicht mit Wasser und Alkohol oder wie neuerdings gezeigt worden ist mit Blausäure verbinden, (Dent. chem. 9. Berlin 1872, C. Bischoff 86; Bischoff und Pinner 113 und 208; Hagemann 151.) so suchten wir die Aldehyde mit Cyangas zu vereinigen.

Zunächst wurde Chloral mit Cyangas gesättigt und diese Mischung in zugeschmolzenen Röhren hoch erhitzt um zum Cyanid $CCl_3.C.OH$.

1) Bei der leichten Umwandlung der Maleïnsäure in die Fumarsäure durch Erwärmung ist es wohl nicht auffällig, das nach Th. Swarts (Z. F. Chem. 1868, 256) sowohl aus Bibrom-, wie aus Isobibrom-Bernsteinsäure stets Fumarsäure erhalten wird bei Behandlung dieser Säure mit Jodkalium (und Kupfer?) unter Erhitzung auf 150° (?).

$(CN.)_2$ und der Säure $CH_3 . C . OH (COOH)_2$ zu gelangen, es trat aber keine Verbindung zwischen Cyan und Chloral ein.

Darauf wurde Chloral mit Cyanmethyl erhitzt man hoffte $CCl_3 . C . OH . CN . CH_3$ zu erhalten aus welcher Verbindung durch Oxydation und Einwirkung von Wasserstoff $CH_3 . C . OH . (COOH)_2$ gebildet werden konnte. Aus dieser Aepfelsäure musste dann eine Fumar- oder Maleïnsäure

$$\begin{matrix} CH_2 \\ \| \\ C(COOH)_2 \end{matrix}$$ entstehen.

Der Versuch führte uns zu einer ganz andren Verbindung deren Zusammensetzung die unbeabsichtigte Mitwirkung von Wasser wahrscheinlich macht.

Es schieden sich sehr schöne in Wasser und Alkohol schwer lösliche, farblose Kristalle aus dem Gemisch von unverändertem Chloral und Cyanmethyl ab, die folgende noch genauer zu ermittelende beachtenswerthe Zusammensetzung zeigten: $C_8 H_{19} Cl_4 N_4 O$

$$\text{etwa:} \quad \begin{matrix} CH_3 & & CH_3 \\ | & & | \\ CH . NH_2 & & CH . NH_2 \\ | & & | \\ CCl_2 & & CCl_2 \\ | & & | \\ CH . NH_2 & & CH . NH_2 \\ | & & | \\ & \underbrace{\qquad\qquad}_{O} & \end{matrix}$$

Bei einer zweiten sehr hohen Erhitzung von Chloral und Cyanmethyl entstand eine andere noch nicht untersuchte in Nadeln kristallirende Verbindung.

Wir behalten uns die gründliche Untersuchung dieser Verhältnisse vor.

Göttingen d. 3. Juli 1872.

Ueber den Acrylsäure-Aether und die Acrylsäure.

Von
W. Caspary und **B. Tollens.**

(Vorgelegt vom Secretair.)

Verschiedenen Chemikern, welche über die Acrylsäure gearbeitet haben, war es nicht gelungen, die Aether derselben darzustellen, denn wenn auch Redtenbachers Versuche einen theilweisen Erfolg hatten, ergaben doch die von Claus[1]) sowie neuerlich von Linnemann[2]) veröffentlichten ein völlig negatives Resultat.

Auf dem Wege, welcher den Einen von uns zur Acrylsäure führte, sind wir jetzt auch zum Acrylsäure-Aether gelangt, nämlich durch Entbromung der Bibrompropionsäure mittelst Zink und Schwefelsäure in alkoholischer Lösung. Nach Beendigung der ziemlich lebhaften Reaction vermischt man mit Wasser und destillirt einen Theil ab, worauf man aus diesem stark alkoholhaltigen Destillat durch systematische Destillation mit Wasser und Vermischen mit Kochsalz den stets zuerst übergehenden Aether gewinnt. Nach wiederholtem Waschen mit Kochsalzlösung und Trocknen mit Kupfervitriol und nachher Chlorcalcium destillirte er bei 100 — 101° und gab 60,42 p. c. C und 8,25 p. c. H statt 60 p. c. C und 8 p. c. H, welche sich für die Formel $C^3H^3O^2 . C^2H^5$ berechnen. Substanz von einer anderen Bereitung, bei 100 — 102° siedend, gab 59,49 p. c. C und 7,94 p. c. H.

Es ist der Acrylsäure-Aether eine farblose, höchst durchdringend, jedoch nicht unangenehm riechende Flüssigkeit welche etwas die Haut ätzt.

1) Ann. Chem. Pharm. 136, 285.
2) Ann. Chem. Pharm. 163, 96.

Er entsteht aus dem Bibrompropionsäure-Aether nach folgender Gleichung:

$C^3H^3Br^2O^2.C^2H^5 + Zn = C^3H^3O^2.C^2H^5 + ZnBr^2$

Wenn man bei der Bereitung nicht sehr sorgfältig wäscht, und nicht mit Chlorcalcium trocknet, zeigt das erhaltene Product einen bei circa 80° liegenden Siedepunkt, der sich allmählich auf 95° erhöht, und bei der Analyse wurden 54,05 und 55,47 p. c. C gefunden, wahrscheinlich war noch Alkohol beigemengt.

Freie Acrylsäure haben wir schon vor längerer Zeit durch Zerlegung von acrylsaurem Bleioxyd mit Schwefelwasserstoff bei 170 — 190° erhalten, sie ist eine höchst eigenthümlich stechend riechende Flüssigkeit, deren Hauptmenge bei 140 — 145° übergeht. Durch theoretische Betrachtungen (Vergleichung der Schmelzpunkte von Zimmtsäure und Hydrozimmtsäure, Crotonsäure und Buttersäure) wurden wir veranlasst, ihr einen relativ hohen Schmelzpunkt beizulegen, und in der That bildeten sich bei — 15° in der Flüssigkeit quadratische Tafeln, welche ungefähr die Hälfte derselben ausmachten. Versuche, die Krystalle von Flüssigkeit zu befreien, sind bis jetzt erfolglos gewesen, sie schmolzen stets sehr leicht wieder, und ebenso die Fraction 100 — 110°, welche einmal völlig erstarrt war.

Eine Umwandlung, wie Linnemann sie an seiner Acrylsäure beobachtete, haben wir nicht bemerkt.

Wir hoffen, in Kürze über den beschriebenen und die übrigen auf analoge Weise darzustellenden Aether der Acrylsäure näher zu berichten und behalten uns die Untersuchung derselben vor.

Allanit vom schwarzen Crux bei Schmiedefeld im Thüringer Wald.

Von

Dr. M. Bauer.

(Vorgelegt vom Secretair.)

Da noch immer gute Allanitkrystalle zu den grossen Seltenheiten gehören, so ist es vielleicht von einigem Interesse, die Beschreibung eines ausgezeichnet ausgebildeten Krystalls zu geben, der durch die Güte von Herrn Professor von Seebach aus seinem Besitz in den der hiesigen mineralogischen Universitätssammlung übergegangen ist, um so mehr, als der vorliegende Krystall von andern bekannten Allaniten etwas verschieden ausgebildet ist.

Schon im Jahre 1848 fand Herr H. Credner in einer Hornblendeführenden Abänderung des Granits von Brotterode im Thüringer Wald kleine Körner und Krystalle eines dem Orthit nahe stehenden Cerhaltigen Minerals und es zeigte sich dann, dass dieses Mineral in den meisten Graniten jener Gegend sparsam vorhanden sei, namentlich aber da, wo sich Hornblende im Granit einstellt, und wo sich ein besonders glimmerreicher Granit in kleinen Nestern aus der Hauptmasse ausscheidet. Diese Orthit ähnlichen Körner fanden sich, gewöhnlich mit kleinen braunen Titanitkrystallen, bei Brotterode, unterhalb Struth, bei Suhl und im Meiersgrund unterhalb Stützerbach [1]).

Die besten Krystalle stammen aber aus der Magneteisensteinlagerstätte an der schwarzen Crux

1) Vergleiche: Neues Jahrbuch für Mineralogie etc. Jahrg. 1848. 199 u. Poggendorff's Annalen. 1850. Bd. 79. 144.

auf dem Eisenberg bei Schmiedefeld, zwei Stunden östlich von Suhl, die nach Credner zu den reichsten Fundstellen des Allanits überhaupt gehört.

Die geognostischen Verhältnisse dieser Magneteisenerzlagerstätte sind nach Credner (a. a. O.) ungefähr die folgenden: Der flache südliche Abhang des Eisenbergs besteht aus, von zahlreichen Porphyrgängen durchsetztem, Granit, von dem sich zwei Varietäten unterscheiden lassen. Am verbreitetsten ist gegen Osten hin ein mittelkörniger Granit, in welchem röthlich-weisser Orthoklas, grünlich-weisser, rasch verwitternder Plagioklas, Quarz und schwarzgrüner Glimmer vorwalten. Die zweite Abänderung, die besonders nach Westen hin entwickelt ist, geht in Gneiss über, ist deutlich flasrig und besteht vorherrschend aus schwarzbraunem Glimmer, weissem Feldspath und wenig Quarz. Als Accessorische Gemengtheile führt die körnige Varietät zuweilen Titanit, der flasrige Granat und Turmalin.

Beide Granitvarietäten umschliessen, wie es scheint stockförmige, Einlagerungen von feinkörnigem Magneteisenstein, welche im Allgemeinen viele Uebereinstimmung, im Einzelnen aber doch auch wieder wesentliche Unterschiede zeigen.

Das allanitführende Magneteisensteinlager an der schwarzen Crux ist es, das uns hier allein interessirt. Es ist auf der Höhe des Eisenbergs durch verschiedene Schächte aufgeschlossen. In der Nähe des Marienschachts ist der Magneteisenstein mit Kalkspath und Flussspath gemengt, zuweilen auch mit schwarzgrünem Granat. Das Gemenge lässt Tendenz zu schiefrigem oder plattenförmigem Gefüge erkennen und dazwischen sind einzelne Bänke von Magneteisenstein reiner ausgeschieden. In geringer Entfernung nördlich

ist der Carolinenschacht, in dem man auf den sogenannten Granateisenstein baut, braunrother Granat, theils dicht, theils körnig, theils krystallisirt ist mit Magneteisenerz, Kalkspath und Flussspath gemengt. Der Granat ist in seiner Hauptmasse zersetzt und hat seine Dichtheit und Härte verloren, wobei sich Braun- und Rotheisenstein bildete. Als seltener Begleiter findet sich hier schaalig blättriger oder krystallisirter Schwerspath. Nordöstlich vom Carolinenschacht ist der Mathildenschacht, der in der oben erwähnten körnigen Varietät des Granits steht. Von demselben führt ein gegen Westen getriebener Querschlag zu einer mächtigen Magneteisensteinmasse. Vor derselben findet sich zuerst derber brauner und schmutzig ölgrüner Granat mit körnigem Kalkspath und Flussspath, zuweilen auch mit Pistazit und Molybdänglanz. Dann folgt ein grobkörniges Granitartiges Gestein, bestehend aus grünlich-weissem bis lauchgrünem Orthoklas, schwarz-grünem Glimmer in zuweilen zollgrossen Krystallen und licht rauh grauem Quarz. Beigemengt ist Magneteisen, der sich durch oktaëdrische Spaltbarkeit auszeichnet, Flussspath, Kalkspath, Amphibol meist in concentrisch strahligen Nestern und Allanit meist in undeutlichen Krystallen und krystallinisch-körnigen Parthien eingewachsen. Molybdänglanz, Axinit und Schwefelkies. Aber nicht allein in dem granitähnlichen Gestein findet sich der Allanit, sondern auch zuweilen mit krystallisirtem Eisenglanz, Kalkspath und Flussspath in der reinen Masse des Magneteisens.

An dem mir vorliegenden Handstück ist der Allanit mit Orthoklas und Quarz auf feinkörnigem Magneteisen aufgewachsen in der Art dass etwa die Hälfte der Krystalloberfläche frei liegt,

während der Krystall an den andern Seiten entweder auf dem Magneteisenstein aufsitzt oder zerbrochen ist. Die Masse des Allanits ist von Orthoklasparthien durchsetzt, so dass also dieser früher gebildet zu sein scheint, als der Allanit. Der Krystall ist in der Richtung der Hauptaxe *c* vollständig erhalten und *cca* 20 mm. lang, in der Richtung der Orthodiagonale auf der einen Seite abgebrochen und 12 mm. breit.

Die Farbe ist schwarz-braun auf dem frischen Bruch, reiner schwarz an der Oberfläche, die Krystallflächen glasglänzend, der Bruch zeigt einen sich dem Fettglanz nähernden Glasglanz.

Durch Säuren wird das Mineral wenig angegriffen, doch wird bei länger fortgesetztem Kochen mit Salzsäure die Oberfläche matt und trübe und nimmt eine in's Rothbraune gehende Färbung an.

Im Kolben erhitzt giebt der Allanit keine Spur von Wasser, selbst beim heftigsten Glühen mit dem Löthrohr und beim Schmelzen nicht.

In der Platinzange schmelzen selbst dicke Stücke nicht schwer unter ruhigem unbedeutendem Blasenwerfen zu einem schwarzen, homogenen, nicht porösen Glas.

Herr Credner fand die Härte etwa gleich der des Orshoklases, 5½ bis 6, und das specifische Gewicht im Mittel aus vier Versuchen gleich 3,790. Die Analyse dieses Allanits gab Herr Credner in Poggendorff's Annalen 78. 151.

Was die krystallographischen Verhältnisse betrifft, so wähle ich mit Kokscharow (Materialien zur Mineralogie Russlands III. 344) und Gerhardt vom Rath (Poggendorff's Annalen. 113. 283 und 138. 492) die Stellung, die schon Marignac für den isomorphen Epidot 'gewählt hat und bei welcher die Fläche *T*, die beim Epidot

dem zweiten Blätterbruch entspricht und nach welcher die Zwillinge gebildet sind, nach welcher auch alle Allanit- und Orthitkrystalle tafelförmig ausgebildet sind, zur Querfläche $a : \infty b : \infty c$ wird.

Zur Bestimmung der einzelnen Flächen wurden die Winkel theils mit dem Anlagegoniometer, theils mit dem Reflexionsgoniometer gemessen und es wurden die folgenden Ausdrücke, die sich auf das Kokscharow'sche Axensystem beziehen, gefunden:

$$
\begin{aligned}
Z &= a : b\ \infty c \\
U &= \tfrac{1}{2} a : b\ \infty c \\
p &= \tfrac{1}{6} a : b : \infty c \\
T &= a : \infty b : \infty c \\
h &= \tfrac{1}{2} a : \infty b : c \\
e &= a : \infty b : c \\
M &= \infty a : \infty b : c \\
r &= a' : \infty b : c \\
w &= \tfrac{1}{2} a : b : c
\end{aligned}
$$

Von diesen Flächen ist p ganz neu, h zwar beim Epidot nicht aber beim Allanit bisher bekannt gewesen. Die andern Flächen haben theils Kokscharow, theils von Rath, früher schon angegeben.

Die Fläche T ist eben und glatt und mit einer feinen senkrechten Streifung bedeckt h und e sind ungestreift und wie T ziemlich stark glänzend, aber nicht glatt, sondern mit unregelmässigen Erhabenheiten bedeckt; M und r sind stark glänzend, glatt und eben; p, u, z, ebenso w matt und uneben.

Am Ausgedehntesten ist T, nach welcher Fläche der Krystall tafelförmig ist, alle andere Flächen sind weniger entwickelt, aber doch ziemlich ausgedehnt, bis auf u, das die Kante p/z nur schmal abstumpft.

In der folgenden Tabelle sind die von mir gefunden Winkel und die aus Kokscharar's Axen:

$a : b : c = 1 : 0{,}64403 : 1{,}14510$

berechneten Winkel zusammengestellt:

	gefunden:	berechnet:
$T:h$	162°	161° 31′
$h:e$	168½°	168° 25′
$e:M$	145°	145° 3′
$M:r$	117°	116° 26′
$r:T'$ 1)	126½°	128° 34′
$T:p$	166° 40′	166° 48′

Für die Flächen z war nur eine ganz annähernde Messung möglich, da sie ganz von Magneteisensteinkörnern bedekt sind, u ist zu einer Messung zu schmal und zu wenig glänzend und es sind also diese zwei Flächen mehr nach der Analogie mit Epidok- und andere Allanitkrystallen bestimmt, welcher Bestimmung der annährend gefundene Werth von $T:z$ nicht widerspricht. Die Hemipyramidenfläche w ist durch ihre Zonen vollständig bestimmt: sie liegt, einerseits in der Diagonalzone von h, welches also die in der Medianebene ac liegende Endkante w/w gerade abstumpft, anderseits in der Zone e/z, woraus der Flächenausdruck

$w = \frac{a}{2} : b : c$ folgt.

Zur Bestimmung der Prismenfläche p musste ein eigenthümliches, indirektes Verfahren eingeschlagen werden, da wegen der Einlagerung im Muttergestein eine direkte Messung nicht möglich war.

Die von den Flächen h, T und p gebildete Ecke ist von lauter ebenen und platten Flächen und ziemlich langen Kanten begrenzt. Der ebene Winkel auf T ist gleich 90°, die ebenen Winkel

1) T' die hintere Fläche T, also: $a' : \infty b\ \infty c$.

auf p und h kann man dadurch bestimmen, dass man aus dünnern Carton Winkel ausschneidet, die möglichst genau gleich den gesuchten sind, was bei der Ebenheit der Flächen und verhältnissmässigen Länge der Kanten nicht schwer ist. Die Grösse dieser Cartonwinkel lässt sich dann leicht ermitteln. Da die Kante T/h bekannt ist, so erhält man aus diesen zwei ebenen Winkeln die Möglichkeit, aus dem Dreikant ($h\,T\,p$) die Kante p/T doppelt zu berechnen, was bei der ungenauen Art der Beobachtung als Controle von doppeltem Werth ist.

Auf die angegebene Weise findet man:

den ebenen Winkel auf $h = 144^0$

den ebenen Winkel auf $p = 125^1/_2{}^0$.

Combinirt mit dem Kantenwinkel auf $h:T = 161^0\,31'$ und dem ebenen Winkel auf $T = 90^0$, giebt der erste jener Werthe:

$$T:p = 167^0\,4'$$

Der zweite giebt:

$$T:p = 166^0\,16',$$

und daraus als Mittel:

$$Tp = 166^0\,40'.$$

Da die zwei Werthe von $T:p$ nicht sehr von einander abweichen, so ist wohl aus ihnen die Bestimmung des Flächenausdrucks von p möglich und man findet:

$$p = \frac{1}{6}\,a:b:\infty c.$$

Berechnet man daraus den Winkel $T:p$, so findet man:

	berechnet:	gefunden:
$T:p$ . . .	$166^0\,48'$	$166^0\,40'$.

Herr Credner hat den von ihm beschriebenen und abgebildeten Krystall dadurch bestimmt, dass er ihn mit einem Epidotkrystall vom Schwarzenstein im Grillerthal in parallele Stellung brachte, so dass die entsprechenden Flächen zu

gleicher Zeit spiegelten. Aus den bekannten Epidotflächen ergeben sich die Flächen des Allanitkrystalls, und zwar

$$M = \infty a : \infty b : c$$
$$r = a' : \infty b : c$$
$$l = \frac{a'}{2} : \infty b : c$$
$$i = 2a' : \infty b : c$$
$$Z = a : b : \infty c$$
$$n = a : b : c$$
$$T = a : \infty b : \infty c.$$

Auch dieser Krystall ist nach *T* tafelartig, aber im Ganzen doch von dem mir vorliegenden durch die bedeutende Entwicklung der hinteren, positiven Hemidomen ziemlich verschieden.

Fasst man Credner's und meine Beobachtungen zusammen, so erhält man für den Allanit von der schwarzen Crux folgendes Flächenverzeichniss:

$$L = a : b : \infty c$$
$$U = \frac{a}{2} : b \infty c$$
$$p = \frac{a}{6} : b : \infty c$$
$$M = a : \infty b : \infty c$$
$$h = \frac{a}{2} : \infty b : c$$
$$e = a : \infty b : c$$
$$T = \infty a : \infty b : c$$
$$l = \frac{a'}{2} : \infty b : c$$
$$r = a' : \infty b : c$$
$$i = 2a' : \infty b : c$$
$$n = a : b : c$$
$$w = \frac{a}{2} : b : c.$$

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

17. Juli. № 18. 1872.

Universität.

Unter dem Decanat des Prof. Waitz 2. Juli 1871 — 1. Juli 1872 fanden in der philosophischen Facultät folgende Veränderungen statt.

Zu ordentlichen Professoren wurden ernannt: der bisher ausserordentliche Prof. Drechsler und der ordentliche Prof. in Erlangen Zöller, jener auch, unter Aufhebung der bisherigen Direction und Berathungscommission, zum Director des landwirthschaftlichen Instituts; zum Honorarprofessor der bisherige Secretär des Commerciums in Hamburg Dr. Ad. Soetbeer.

Die Facultät verlor durch den Tod den ordentlichen Professor und Bibliothecar Schweiger. Es habilitierten sich Dr. A. Stern aus Göttingen für Geschichte, M. H. Bauer aus Weinsberg für Mineralogie und Geologie, A. W. Th. F. J. Reinke aus Ziethen im Fürstenthum Ratzeburg, Assistent am Universitätsherbarium für Botanik.

Verzeichnis der unter dem Decanat des Prof. Waitz in der philosophischen Facultät vollzogenen und beschlossenen Promotionen.

I. Ehrenpromotion.

9. Januar 1872. Johann Heinrich Dietrich Meyer, Rector des Gymnasiums zu Osnabrück, bei Gelegenheit seines 50jährigen Dienstjubiläums.

II. Unter dem Decanat des Hofraths Hoeck beschlossene, jetzt vollzogene Promotionen.

1) 13. Juli 1871. E. M. Th. Stisser aus Heinsen, Gymnasiallehrer in Aurich. Gedruckte Abhandlung: Quid judicandum sit de F. Ritschelii sententia in Aeschyli Septem contra Thebas etc.

2) 13. Juli. R. Klussmann aus Rudolstadt. Dissertation: Emendationum Frontonianarum specimen.

3) 2. August. C. Leisewitz aus Darmstadt, Lehrer an der Polytechnischen Schule daselbst. Diss.: Die Grundsteuer und die Landwirthschaft.

4) 29. August. E. Wroblevsky aus Grodno, Assistent an der chemischen Abtheilung des technologischen Instituts in Petersburg. Diss.: Die Chlorsubstitutionsproducte der isomeren Toluidine und deren Derivate.

5) 31. August. E. A. M. Kossak aus Pr. Friedland, Gymnasial-Lehrer in Berlin. Diss.: Das Additionstheorem der Ultra-elliptischen Funktionen erster Ordnung.

6) 16. October. H. Carmichael aus Brooklyn. Diss.: A microscopical chemical investigation on the Hohenhagen basalt region near Göttingen. Part 1.

7) 16. October. Ad. Pohlmann aus Kierspe. Diss.: Annotationes in Corneli Taciti Agricolam.

8) 3. November. Joh. Aug. Lefarth aus Paderborn. Diss.: Zur Kritik Lamberts von Hersfeld.

9) 15. November. Jos. Dieckmann aus Höxter, Diss.: Ueber die Modificationen, welche die ebene Abbildung einer Fläche dritter Ordnung durch Auftreten von Singularitäten erhält.

10) 15. Januar 1872. Chr. K. Hoffmann aus Heemstede, Prosector an der Universität Leyden. Diss.: Zur Anatomie der Echinen und Spatangen.

11) 23. Juni. Ferd. Vetter aus Schaffhausen. Diss.: Ueber die Germanische Allitterationspoesie.

III. Unter dem Decanat des Prof. Waitz vollzogen:

1) 2. Aug. Fr. C. G. Müller aus Aerzen. Diss.: Ueber die Natur des β — Parabromsulfotoluol und seiner Abkömmlinge sowie die Beziehungen ihrer Salze.

2) 12. Aug. Chr. Gotthold aus Frankfurt. Diss.: De fontibus et auctoritate historiae Sauli.

3) 15. Aug. Rob. Niemann aus Bodenwerder. Diss.: Die Wahl Lothars von Sachsen zum deutschen König.

4) 20. Aug. Demetrius S. Menagius aus Constantinopel. Gedr. Abh.: *Κριτικὴ πραγματεία περὶ τῶν Ἑλληνικῶν τοῦ Ξενοφῶντος.*

5) 23. Aug. Rich. Zöpffel aus Arensburg in Livland, Mitglied des Repetentencollegiums in Göttingen. Gedruckte Schrift: Die Papstwahlen u. s. w.

6) 7. Octb. Max. Meyer aus Bückeburg. Diss.: Die Wahl Alexander III. und Victor IV.

7) 7. Octb. Heinr. Kratz aus Heddesdorf,

Lehrer an der höhern Bürgerschule in Neuwied. Diss.: Spinozas Ansicht über den Zweckbegriff.

8) 10. Octbr. K. H. Sumpf aus Salzdetfurth. Diss.: Ueber eine neue Bomolochiden-Gattung.

9) 14. Novbr. Const. Höhlbaum aus Reval. Diss.: Johann Renners livländische Historien und die jüngere livländische Reimchronik.

10) 20. Novb. Gosw. von der Ropp aus Goldingen. Diss.: Werner von Eppenstein, Erzbischof von Mainz.

11) 13. Decbr. Otto Posse aus Weissensee. Diss.: Die Reinhardsbrunner Geschichtsbücher.

12) 12. Jan. 1872. Max Hub. Ermisch aus Torgau. Diss.: Die Chronik des Regino bis 813.

13) 17. Jan. H. G. Lolling aus Larrelt. Diss.: De Medusa.

14) 18. Jan. Ferd. Lamprecht aus Luckenwalde. Diss.: De rebus Erythraeorum publicis.

15) 27. Jan. C. Gille aus Allendorf, Lehrer an der Handelsschule zu Pesth. Diss.: Ueber die Camphorsäure und ihre Zersetzungen.

16) 27. Jan. Ed. K. Schulz aus Fürstenberg. Diss.: Ueber das Reichsregiment in Deutschland unter König Heinrich IV. (1062—66).

17) 29. Jan. G. H. Dehio aus Reval. Diss.: Hartwig von Stade, Erzbischof von Hamburg-Bremen.

18) 2. Febr. J. P. Jörgensen aus Berlin. Diss.: De canabensibus sive de municipiis et coloniis aetate imperatorum Romanorum ex canabis legionum ortis.

19) 4. März. H. Weyenbergh aus Haarlem. Diss.: Beiträge zur Anatomie und Histologie der hemicephalen Dipteren-Larven; und gedruckte Abhandlungen.

20) 5. März. G. Retschy aus Ilten. Diss.: Ueber crystallisirtes und flüssiges Bromtoluol und ihre Unterscheidung durch die Sulfotoluole.

21) 11. März. P. Beckmann aus Recklinghausen, Oberlehrer an der Realschule in Münster. Diss.: Forschungen über die Quellen zur Geschichte der Jungfrau von Orleans. 1. Theil.

22) 12. März. W. Schum aus Erfurt. Diss.: Die Jahrbücher des Sanct-Albans-Klosters zu Mainz.

23) 13. März. P. Grimm aus Nischny-Nowgorod, Assistent für Zoologie an der Universität Petersburg. Gedruckte Abhandlungen.

24) 20. März. W. Schneider aus Wolfenbüttel. Diss.: Ueber isomere Dinitrophenole.

25) 25. März. A. Baule aus Klein-Escherde. Diss.: Ueber Raumcurven sechster Ordnung.

26) 15. April. Montague R. Leverson aus London, Advocat in New-York. Gedruckte Schriften.

27) 27. April. Joh. H. D. Schäfer aus Bremen. Diss.: Dänische Annalen und Chroniken von der Mitte des 13. bis zum Ende des 15. Jahrhunderts.

28) 27. April. V. Fr. J. Bayer aus Prag. Diss.: Die Historia Friderici III. imperatoris des Enea Silvio dè Piccolomini.

29) 27. April. F. O. A. Eichelkraut aus Teltow. Diss.: Der Troubadour Folquet de Lunel.

30) 16. Mai. F. Baumbach aus Berlin. Diss.: Arnold von Selehofen, Erzbischof von Mainz.

31) 22. Mai. Chr. Fr. E. Rehm aus Nürnberg. Diss.: Die Entwickelungsgeschichte von Peziza ciborioides.

32) 27. Mai. S. M. Schönflies aus Landsberg, Lehrer an der Gewerbeschule in Potsdam.

Diss.: Kinematischgeometrische Untersuchungen über Hebedaumen und Excentriks.

33) 29. Mai. G. J. A. Artopé aus Berlin, Lehrer und provisorischer Director der Gewerbeschule zu Elberfeld. Diss.: Ueber augithaltige Trachyte der Anden.

34) 6. Juni. W. Ad. L. Marshall aus Weimar, erster Assistent am Reichs-Museum zu Leyden. Diss.: Ueber die knöchernen Schädelhöcker der Vögel.

35) 8. Juni. H. Paech aus Berlin. Diss.: Die Pataria in Mailand.

36) 13. Juni. R. G. Sarnow aus Barth, Assistent am chemischen Laboratorium zu Berlin. Diss.: Ueber eine aus Chrotonchloral erhaltene Monochlorcrotonsäure.

37) 15. Juni. J. H. M. Rob. Schmidt aus Greussen, Gymnasiallehrer zu Dramburg. Gedr. Abhandlung: De ellipsi Tacitina; handschriftliche Dissertation: Kritik der Quellen zur Geschichte der Gracchischen Unruhen.

38) 20. Juni. L. E. Bolle aus Rosengarten, Gymnasiallehrer in Detmold. Diss.: De Lygdami carminibus.

39) 22. Juni. Chr. Heinzerling aus Biedenkopf. Diss.: Untersuchungen über zwei Bromsalycilsäuren sowie über einige Salze der Amidobrombenzonsäure.

40) 25. Juni. P. E. Hasse aus Lübeck. Diss.: Die Reimchronik des Eberhard von Gandersheim.

41) 29. Juni. Karl Tietschert aus Stolz. Diss.: Keimungsversuche mit Secale cereale bei verschieden tiefer Unterbringung.

42) 29. Juni. H. Süssenguth aus Lübben. Diss.: Ueber die Säuren der Bromverbindungen des Pseudocumols und Mesitylens.

43) 1. Juli. J. Krebs aus Aue. Diss.: Christian von Anhalt und die kurpfälzische Politik am Beginn des dreissigjährigen Krieges.

44) 1. Juli. Th. L. Eisentraut aus Bleicherode. Diss.: Grammatik zu Guiot de Provins.

45) 1. Juli. G. L. Fr. W. Haarmann aus Holzminden. Diss.: Ueber einige Derivate der Glucoside Coniferin und Salicin.

III. Unter dem Decanat des Prof. Waitz beschlossen, aber noch nicht vollzogen.

1) Ernst Ziegeler aus Meyenburg. Diss.: De Luciani studiis poeticis.

2) L. Theopold aus Bromberg. Diss.: Kritische Untersuchungen über die Quellen zur angelsächsischen Geschichte des 8. Jahrhunderts.

3) J. Girgensohn aus Moscau. Diss.: Kritische Untersuchung über das VII. Buch der Historia Polonica des Dlugosch.

4) H. E. L. Hahne aus Rethmar. Diss.: De fano Apollinis Delphico.

5) Adalb. Bezzenberger aus Cassel. Diss.: Untersuchungen über die gothischen Adverbien und Partikeln.

6) K. Frick aus Schwerin. Diss.: De ephoris Spartanis.

7) Ad. Vollmer aus Hamburg. Diss.: De fontibus belli Punici secundi.

8) G. H. G. Münder aus Osterode. Diss.: Ueber die isomeren Dichlorhydrine und die Oxydation des Allylalkoholbromins zu Bibrom.

9) K. E. G. Robel aus Cottbus. Diss.: Ueber Höfe und Nebensonnen.

10) Joseph Eberz aus Heilberscheidt. Diss.: De Cinesia poeta.

11) G. A. Th. Schmidt aus Petersburg, Assistent am chemischen Laboratorium der Universität daselbst. Diss.: Ueber Monoamidoderivate des Azobenzols und Azoxybenzols.

Bedingt beschlossen:

12) G. Ferd. Fr. Karwehl aus Gifhorn. Diss.: Quaestiones Hesiodeae.

Ausserdem wurde bei 50jähriger Jubelfeier das Diplom erneuert:

Professor Temme in Oldenburg.

20 Gesuche konnten nicht bewilligt werden.

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

24. Juli. №. 19. 1872.

Universität.

Verzeichniss der Vorlesungen auf der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen während des Winterhalbjahrs $18^{72}/_{73}$. Die Vorlesungen beginnen den 15. October und enden den 15. März.

Theologie.

Biblische Theologie des Alten Testaments: Prof. *Bertheau* fünfmal um 11 Uhr.

Einleitung ins Neue Testament: Prof. *Wiesinger* fünfmal um 12 Uhr.

Erklärung des Propheten Jesaia: Prof. *Bertheau* sechsmal um 10 Uhr.

Erklärung der Genesis: Lic. *Wellhausen* fünfstündig um 10 Uhr.

Synoptische Erklärung der drei ersten Evangelien: Prof. *Lünemann* fünfmal um 9 Uhr.

Erklärung des Evangeliums und der Briefe Johannis: Prof. *Wiesinger* fünfmal um 9 Uhr.

Erklärung des Römerbriefes: Prof. *Zahn* fünfmal um 9 Uhr.

Erklärung der beiden Korintherbriefe: Prof. *Lünemann* fünfstündig um 11 Uhr.

Erklärung des Galaterbriefs: Prof. *Zahn* zweistündig um 3 Uhr, öffentlich.

Kirchengeschichte I. Hälfte: Prof. *Duncker* sechsmal um 8 Uhr.

Kirchengeschichte II. Hälfte: Prof. *Wagenmann* fünfmal um 8 Uhr.

Patrologie: *Derselbe* zweistündig öffentlich.
Dogmengeschichte: Prof. *Duncker* fünfmal um 4 Uhr.
Geschichte der protestantischen Theologie: Prof. *Wagenmann* viermal um 4 Uhr.
Comparative Symbolik: Prof. *Schöberlein* viermal um 5 Uhr; Prof. *Ritschl* viermal um 11 Uhr; Prof. *Matthaei* Donnerstag und Freitag um 2 Uhr.

Dogmatik Th. I.: Prof. *Ritschl* fünfmal um 12 Uhr.
Dogmatik II. Hälfte (Ponerologie, Christologie, Soteriologie, Eschatologie): Prof. *Schöberlein* sechsmal um 12 Uhr.

Praktische Theologie Th. I. (Prolegomena, Theorie der Mission und Katechetik): Prof. *Ehrenfeuchter* viermal, Montag Dienstag Donnerstag Freitag um 3 Uhr.
Christliche Pädagogik: Prof. *Schoeberlein* Donnerstag und Freitag um 4 Uhr.
Kirchenrecht und Geschichte der Kirchenverfassung s. unter Rechtswissenschaft S. 355 f.
Die Uebungen des königl. homiletischen Seminars leiten abwechslungsweise Prof. *Ehrenfeuchter* und Prof. *Wiesinger* Sonnabend von 9—12 Uhr öffentlich.
Katechetische Uebungen: Prof. *Ehrenfeuchter* Sonnabend von 3—4 Uhr, Prof. *Wiesinger* Mittwoch von 5—6 Uhr öffentlich.
Die liturgischen Uebungen der Mitglieder des praktisch-theologischen Seminars leitet Prof. *Schöberlein* Mittwochs um 6 und Sonnabends von 9—11 Uhr öffentlich.

Eine dogmatische Societät leitet Prof. *Schöberlein* Dienstags um 6 Uhr, eine historisch-theologische Societät Prof. *Wagenmann*.
Die systematischen, kirchengeschichtlichen und exegetischen Conversatorien im theologischen Stift werden in gewohnter Weise Montag Abends 6 Uhr von den Repetenten geleitet werden.
Repetent *Dorner* wird die Briefe Pauli an die Epheser und Colosser zweimal wöchentlich cursorisch und unentgeltlich erklären; Repetent *Duhm* ebenso das Deuteronomium Dienstags und Donnerstags um 6 Uhr; Hebräische Grammatik liest *Derselbe* zweistündig Dienstags und Donnerstags um 5 Uhr.
Zu einem dogmatischen Examinatorium in drei wöchentlichen Stunden erbietet sich Repetent *Dorner*.

Rechtswissenschaft.

Institutionen des römischen Rechts: Prof. *Ribbentrop* von 12—1 Uhr.

Geschichte des römischen Rechts: Prof. *Ribbentrop* von 10—11 Uhr.

Institutionen und Geschichte des römischen Rechts: Prof. *v. Jhering* fünfmal wöch. von 11—1 Uhr.

Geschichte des römischen Civilprocesses: Prof. *Enneccerus* Dienstags, Mittwochs und Freitags von 4—5 Uhr.

Pandekten: Prof. *Francke* von 9—10 und von 11—12 Uhr; Prof. *Hartmann* sechsmal wöch. von 11—12 und 12—1 Uhr.

Römisches Obligationenrecht: Prof. *Wolff* vier Stunden von 4—5 Uhr.

Erbrecht: Prof. *Ribbentrop* fünfmal wöch. von 5—6 Uhr; Prof. *Enneccerus* fünfmal wöch. von 10—11 Uhr; Examinatorium über Erbrecht: Prof. *Ribbentrop* Freitags von 6—7 Uhr öffentlich; Prof. *Enneccerus* Sonnabends von 10—11 Uhr, öffentlich.

Deutsche Staats- und Rechtsgeschichte: Prof. *Kraut* täglich von 10—11 Uhr.

Geschichte des deutschen Städtewesens: Prof. *Frensdorf* Sonnabends von 12—1 Uhr, öffentlich.

Deutsches Privatrecht einschliesslich des Lehnrechts: Prof. *Dove* viermal von 8—10 Uhr und Mittw. um 9 Uhr.

Landwirthschaftsrecht: Prof. *Ziebarth* dreistündig Mont., Mittw., Freitag um 5 Uhr.

Strafrecht: Prof. *Ziebarth* vierstündig um 11 Uhr; Deutsches Strafrecht auf Grundlage des Reichsstrafgesetzbuches: Dr. *Bierling* viermal wöch. von 10—11 Uhr.

Deutsches Reichs- und Bundesrecht: Prof. *Zachariae* vierstündig um 12 Uhr; deutsches Staatsrecht: Prof. *Frensdorff* fünfmal wöch. von 12—1 Uhr.

Völkerrecht: Prof. *Frensdorff* dreimal wöch. von 3—4 Uhr.

Das evangelische und katholische Kirchenrecht: Prof. *Kraut* fünfmal wöch. von 12—1 Uhr; Kirchenrecht einschliesslich des Eherechts: Prof. *Dove* fünfstündig von 12—1 Uhr.

Geschichte der Kirchenverfassung und des Verhält-

nisses von Staat und Kirche: Prof. *Dove* zweistündig von 3—4 Uhr öffentlich.

Canonistische Uebungen leitet Prof. *Dove* einmal wöch. in passender Stunde.

Theorie des Civilprocesses: Prof. *Briegleb*, achtstündig, von 4—6 Uhr.

Deutscher Strafprocess: Prof. *Zachariae* fünfstündig um 11 Uhr.

Pandektenpracticum: Prof. *Thöl* Mont. und Donnerst. von 4—5 und 5—6 Uhr; Civilpracticum: Prof. *Wolff* drei Stunden von 5—6 Uhr.

Civilprocesspracticum: Prof. *Hartmann* Dienstag und Freitag von 4—6 Uhr.

Gerichtliche Medicin und öffentliche Gesundheitspflege siehe unter Medicin S. 358 f.

Medicin.

Zoologie, vergleichende Anatomie, Botanik, Chemie siehe unter Naturwissenschaften.

Medicinische Propaedeutik trägt Prof. *Krause* Sonnabend von 8—9 Uhr öffentlich vor.

Knochen- und Bänderlehre: Prof. *Henle*, Dienstag, Freitag, Sonnabend von 11—12 Uhr.

Systematische Anatomie I. Theil: Prof. *Henle*, täglich von 12—1 Uhr.

Topographische Anatomie: Prof. *Henle*, Mont. Mittw. und Donnerst. von 2—3 Uhr.

Secirübungen, in Verbindung mit Prosector Dr. *v. Brunn* täglich von 9—4 Uhr.

Allgemeine Histologie in physiologischer und pathologischer Beziehung trägt Prof. *Krause* Sonnabend von 10—11 Uhr öffentlich vor.

Mikroskopische Uebungen leitet Prof. *Krämer* privatissime.

Mikroskopische Curse hält Prof. *Krause* im pathologischen Institute für normale Histologie um 11 Uhr, für pathologische Histologie um 12 oder um 2 Uhr vier Mal wöchentlich.

Allgemeine und besondere Physiologie mit Erläute-

rungen durch Experimente und mikroskopische Demonstrationen: Prof. *Herbst*, in sechs Stunden wöchentlich um 10 Uhr.

Experimentalphysiologie II. Theil (Physiologie des Nervensystems und der Sinnesorgane): Prof. *Meissner* täglich von 10—11 Uhr.

Arbeiten im physiologischen Institute leitet Prof. *Meissner* täglich in passenden Stunden.

Allgemeine Pathologie und Therapie: Prof. *Krämer* Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag von 4—5 Uhr.

Pathologische Anatomie lehrt Prof. *Krause* Dienstag und Freitag um 2 Uhr, Mittwoch und Sonnabend um 12 Uhr.

Physikalische Diagnostik in Verbindung mit praktischen Uebungen an Gesunden und Kranken lehrt Dr. *Wiese* viermal wöchentlich in später näher zu bezeichnenden Stunden.

Pharmakologie oder Lehre von den Wirkungen und der Anwendungsweise der Arzneimittel sowie Anleitung zum Receptschreiben: Prof. *Marx* fünfmal wöchentlich von 4—5 Uhr.

Arzneimittellehre und Receptirkunde verbunden mit pharmakognostischen Demonstrationen und Versuchen an Thieren trägt Prof. *Husemann* fünfmal wöchentlich von 4—5 Uhr oder zu gelegener Zeit vor; Dasselbe gleichfalls in Verbindung mit Demonstrationen der Arzneimittel und ihrer physiologischen und toxischen Wirkung lehrt Prof. *Marmé* fünfmal wöchentlich von 5—6 Uhr.

Pharmakologische und toxikologische Untersuchungen leitet Prof. *Marmé* im physiologischen Institut zu passenden Stunden.

Die in der neuern Zeit in die Praxis eingeführten Medicamente erläutert naturhistorisch und pharmakodynamisch Prof. *Husemann* öffentlich Freitag von 2—3 Uhr.

Pharmacie lehrt Prof. *Wiggers* 6mal wöchentlich von 8—9 Uhr; Dasselbe Dr. *Stromeyer* privatissime.

Toxikologie für Pharmaceuten mit Experimenten lehrt Prof. *Husemann* Mittwoch und Sonnabend von 12—1 Uhr.

Specielle Pathologie und Therapie: Prof. *Hasse* täglich, Sonnabend ausgenommen, von 4—5 Uhr.

Die Krankheiten des Nervensystems und der Bewe-

gungsorgane im Anschluss an Elektrotherapie lehrt vier Mal wöchentlich Prof. *Marmé* von 12—1 Uhr.

Die medicinische Klinik und Poliklinik leitet Prof. *Hasse* täglich von 10½—12 Uhr.

Geschichte der Chirurgie trägt Prof. *Baum* Mittwoch von 5-6 Uhr öffentlich vor.

Allgemeine Chirurgie: Prof. *Lohmeyer* fünfmal wöchentlich von 5—6 Uhr.

Die Lehre von der Entzündung und Eiterung trägt Dr. *Rosenbach* zwei Mal wöchentlich in zu verabredenden Stunden öffentlich vor.

Chirurgie II. Theil: Prof. *Baum* fünfmal wöchentlich von 6—7 Uhr, Sonnabend von 2-3 Uhr.

Ueber Wunden trägt Prof. *Lohmeyer* öffentlich zwei Mal wöchentlich von 3—4 Uhr vor.

Die Lehre von den chirurgischen Operationen: Dr. *Rosenbach* viermal wöchentlich von 5—6 Uhr.

Die chirurgische Klinik im Ernst-August Hospitale leitet Prof. *Baum* täglich von 9—10½ Uhr.

Chirurgische Klinik leitet Prof. *Lohmeyer* um 9 Uhr.

Augenheilkunde: Prof. *Leber* viermal wöchentlich von 3—4 Uhr.

Praktische Uebungen im Gebrauch des Augenspiegels leitet Prof. *Leber* Mittwoch und Sonnabend von 12—1 Uhr und in einer noch zu verabredenden Stunde.

Augenoperationscursus hält Prof. *Leber* zwei Mal wöchentlich in noch zu verabredenden Stunden.

Klinik der Augenkrankheiten hält Prof. *Leber* Montag, Dienstag, Donnerstag, Freitag von 12—1 Uhr.

Geburtskunde trägt Prof. *Schwartz* Montag, Dienstag, Mittwoch, Donnerstag, Freitag um 3 Uhr vor.

Geburtshülfliches Casuisticum mit Phantomübungen hält Prof. *Krämer* in näher zu verabredenden Stunden.

Geburtshülflichen Operationscursus hält Prof. *Schwartz* Mittwoch und Sonnabend um 8 Uhr.

Geburtshülflich-gynaekologische Klinik leitet Prof. *Schwartz* Mont., Dienst., Donnerst. und Freit. um 8 Uhr.

Pathologie und Therapie der Geisteskrankheiten lehrt Prof. *Meyer* Mittwoch und Sonnabend von 3—4 Uhr im Ernst-August Hospitale.

Psychiatrische Klinik hält *Derselbe* Montag und Donnerstag von 4—6 Uhr.

Gerichtliche Medicin trägt Prof. *Krause* für Mediciner und Juristen Sonnabend von 4—6 Uhr vor.

Ueber öffentliche Gesundheitspflege mit besonderer Rücksicht auf Diaetetik (auch für Nicht-Mediciner) trägt Prof. *Meissner* Montag, Mittwoch, Donnerstag von 5—6 Uhr vor.

Anatomie und Physiologie der Hausthiere nebst Pferde- und Rindviehkunde lehrt Dr. *Luelfing* sechs Mal wöchentlich von 8—9 Uhr.

Die Theorie des Hufbeschlags trägt Dr. *Luelfing* öffentlich in zu verabredenden Stunden vor.

Philosophie.

Allgemeine Geschichte der Philosophie: Prof. *Peip*, fünf Stunden, 3 Uhr. — Dr. *Stumpf*, fünf Stunden, 6 Uhr.

Philosophie des Plato und Aristoteles: s. *Griechische und lateinische Sprache* S. 366.

Ausführliche Darstellung und Kritik der Kantischen Philosophie und der nachkantischen Systeme: Prof. *Baumann*, Mont. Dienst. Donnerst. Freit. 5 Uhr.

System der Philosophie: Prof. *Baumann*, Mont. Dienst. Donn. Freit. 9 Uhr.

Logik und Encyclopädie der Philosophie: Prof. *Lotze*, vier Stunden, 10 Uhr.

Psychologie: Prof. *Lotze*, vier Stunden, 4 Uhr.

Religionsphilosophie; Prof. *Bohtz*, Dienst. und Freit., 4 Uhr; Prof. *Peip*, vier Stunden, 5 Uhr.

Philosophische Erklärung von Plato's Phaedo mit Berücksichtigung der späteren Argumente für die Unsterblichkeit: Prof. *Baumann*, Mittw. u. Sonnab. 10 Uhr.

Aesthetik: Prof. *Bohtz*, Mont. Dienst. Donn. Freit. 11 Uhr.

Grundriss der Rhetorik: Prof. *Krüger*, privatissime.

In seiner philosophischen Societät wird Prof. *Baumann* aus Kants Kritik der reinen Vernunft den Abschnitt über die Antinomien der reinen Vernunft behandeln, Dienst. 6—7 Uhr.

In seinen philosophischen Societäten wird Prof. *Peip* Abends 6—7 Uhr am Dienstag die Grundlehren der Logik nach Trendelenburgs »Elementa logices Aristoteleae« entwickeln; am Freitag Platons Philebos erklären.

In der philosophisch-philologischen Societät von Dr. *Peipers* wird Ritters und Prellers historia philosophiae

graecae et romanae gelesen und erklärt Montag und Freitag 6 Uhr.

Dr. *Stumpf* wird in seiner philosophischen Societät Hume's Untersuchung über den menschlichen Verstand erklären, Mittw. 5 Uhr.

Geschichte der Erziehung: Prof. *Krüger*, zwei Stunden, 4 Uhr.

Die Uebungen des K. pädagogischen Seminars leitet Prof. *Sauppe*, Mont. und Dienst. 11 Uhr.

Mathematik und Astronomie.

Algebraische Analysis mit einer Einleitung über die Grundbegriffe der Arithmetik: Prof. *Stern*, fünf Stunden, 11 Uhr.

Analytische Geometrie des Raumes: Dr. *Klein*, Mont., Dienst., Donnerst., Freit. 9 Uhr.

Ueber höhere Theile der ebenen Geometrie: Dr. *Klein*, Dienst. und Freit. 11 Uhr, Mittw. 9 Uhr.

Analytische Geometrie der Flächen und Curven doppelter Krümmung nebst den Flächen zweiter Ordnung: Prof. *Enneper*, Mont. bis Freit., 3 Uhr.

Elemente der Zahlentheorie: Dr. *Minnigerode*, vier Stunden, 4 Uhr.

Differential- und Integralrechnung: Prof. *Ulrich*, fünf Stunden, 10 Uhr; Prof. *Enneper*, Montag bis Sonnabend, 9 Uhr.

Allgemeine Theorie der algebraischen Gleichungen: Prof. *Clebsch*, Mont. u. Donn. 11 Uhr, Mittw. 12 Uhr.

Elemente der Theorie der Abelschen Functionen: Prof. *Clebsch*, Mont. Dienst. Mittw. Donn. 12 Uhr.

Mathematische Theorie der Schwerkraft, der magnetischen, der elektrischen und der elektrodynamischen Kräfte: Prof. *Schering*, 4 Stunden 9 Uhr.

Methode der kleinsten Quadrate und ihre Anwendung auf physikalische Probleme: Prof. *Schering*, öffentlich.

Mathematische Theorie der Elasticität: Dr. *Riecke*, Mittw. u. Sonnab. 10 Uhr.

Mechanik: Prof. *Stern*, vier Stunden, 10 Uhr.

Magnetische Uebungen: Prof. *Schering*, für die Mitglieder des math.-physikalischen Seminars.

Lehren der theoretischen Astronomie (Bahnbestimmungen): Prof. *Klinkerfues*, Montag, Dienstag, Mittwoch und Donnerstag, 12 Uhr.

In dem mathematisch-physikalischen Seminar leitet mathematische Uebungen Prof. *Stern*, Mittwoch 10 Uhr; trägt über Probleme aus der Theorie der algebraischen Formen Prof. *Clebsch* vor; giebt Anleitung zur Anstellung astronomischer Beobachtungen Prof. *Klinkerfues*, in einer passenden Stunde. Vgl. *Naturwissenschaften* S. 362.

Prof. *Clebsch* erbietet sich zum Halten einer mathetischen Societät.

Naturwissenschaften.

Allgemeine Naturgeschichte nebst kritischer Darstellung des Darwinismus: Prof. *Claus*, 3 Stunden, 3 Uhr.

Vergleichende Anatomie der Vertebraten: Prof. *Claus*, 5 Stunden 8 Uhr.

Naturgeschichte der Parasiten der Menschen und der Hausthiere: Dr. *Grenacher*, 2 Stunden.

Entwickelungsgeschichte der wirbellosen Thiere: Dr. *Grenacher*. 2 Stunden.

Die zoologischen und mikroskopischen Uebungen leitet Prof. *Claus* privatissime.

Einleitung in das Studium der Botanik: Prof. *Bartling*. Mont., Dienst., Donnerst., Freit. 12 Uhr.

Anatomie und Physiologie der Pflanzen: Prof. *Grisebach*, Mont., Dienst., Donnerst. Freit., 4 Uhr, und in Verbindung mit mikroskopischen Demonstrationen im physiologischen Institut, Sonnabend um 10 Uhr.

Geographie der Pflanzen: Prof. *Grisebach*, Donnerst. und Freit. 5 Uhr.

Systematische Botanik, in Verbindung mit Demonstrationen: Dr. *Reinke*, Mont. Dienst. Donnerst. Freit. 3 Uhr.

Naturgeschichte der kryptogamischen Gewächse: Prof. *Bartling*. Mont., Dienst., Donn., Freit. 2 Uhr.

Demonstrationen in den Gewächshäusern des botanischen Gartens giebt *Derselbe* Mittw. 11 Uhr, öffentlich.

Mikroskopische Uebungen: Dr. *Reinke*, in näher zu bestimmenden Stunden.

Botanische Excursionen in bisheriger Weise: Prof. *Bartling*.

In seiner Societät wird Dr. *Reinke* ausgewählte Abschnitte der neueren botanischen Literatur behandeln.

Elemente der Mineralogie: Dr. *Bauer*, Mont. Mittw. Freit. 2 Uhr.

Einleitung in die Geologie: Prof. *Sartorius von Waltershausen*, fünf Stunden, 6 Uhr.

Allgemeine Petrographie: Dr. *Bauer*, Dienst. Donn. 2 Uhr.

Krystallographie, einschliesslich der Krystalloptik: Prof. *Listing*, vier Stunden, 4 Uhr.

Palaeontologie: Prof. *v. Seebach*, fünf Stunden, 9 Uhr.

Praktische Uebungen in der Mineralogie und Krystallographie: Prof. *Sartorius von Waltershausen*, Donnerst. Nachmittag und Sonnabend früh.

Petrographische und palaeontologische Uebungen leitet Prof. *von Seebach*, in gewohnter Weise, Mont. und Donnerst. 10—1 Uhr, privatissime, aber unentgeltlich.

Die in der Geologie Fortgeschritteneren ladet Prof. *v. Seebach*, gemeinsam mit Dr. *Bauer*, zu der geologischen Societät ein, Mittw. Abends 6—8 Uhr.

Physik, zweiter Theil: über Electricität, Magnetismus, Wärme und Licht: Prof. *Weber*, Montag, Dienstag, Donnerstag und Freitag 5—6 Uhr.

Ueber das Auge und das Mikroskop: Prof. *Listing*, privatissime in bequemen Stunden.

Die praktischen Uebungen im physikalischen Laboratorium leitet Dr. *Riecke* in Gemeinschaft mit Dr. *Neesen*, wie bisher.

Die Schwerkraft, die magnetischen, elektrischen und elektrodynamischen Kräfte, die Elasticität, Methode der kleinsten Quadrate auf Physik angewendet: vgl. *Mathematik* S. 360.

Physikalisches Colloquium: Prof. *Listing*, Sonnabend 10—12 Uhr.

In dem mathematisch-physikalischen Seminar leitet physikalische Uebungen Prof. *Listing*, Mittwoch um 11 Uhr. Siehe *Mathematik und Astronomie* S. 361.

Chemie: Prof. *Wöhler*, sechs Stunden, um 9 Uhr.

Allgemeine organische Chemie: Prof. *Hübner*, Montag bis Freitag, 12 Uhr.

Organische Chemie, speciell für Mediciner: Prof. *von Uslar*, in später zu bestimmenden Stunden.

Organische Chemie, speciell für Mediciner: Dr. *Tollens*, 2 Stunden, 8 Uhr.

Organische Chemie, für die Studirenden der Landwirthschaft: Prof. *Zöller*, 2 Stunden, 10 Uhr.

Pharmaceutische Chemie: Prof. *von Uslar*, vier Stunden, vier Uhr.

Agriculturchemie (II. Theil: Landwirthschaftliche Technologie): Prof. *Zöller*, Mont. Dienst. Donn. Freit., 10 Uhr.

Chemie des Ackerbodens: Dr. *Wagner*, in zu bestimmenden Stunden.

Die Grundlehren der neueren Chemie: Prof. *Hübner*, Sonnabend, 12 Uhr.

Uebungen in den in der Chemie vorkommenden Rechnungen (Stöchiometrie): Dr. *Tollens*, zwei Stunden, 8 Uhr.

Einzelne Zweige der theoretischen Chemie: Dr. *Stromeyer*, privatissime.

Die Vorlesungen über Pharmacie s. unter *Medicin* S. 357.

Die praktisch-chemischen Uebungen und Untersuchungen im akademischen Laboratorium leitet Prof. *Wöhler* in Gemeinschaft mit den Assistenten Prof. *von Uslar*, Prof. *Hübner*, Dr. *Tollens* und Dr. *Jannasch*.

Prof. *Zöller* leitet die Uebungen im agriculturchemischen Laboratorium täglich (ausser Sonnabend) von 8—12 und 2—4 Uhr.

Ein chemisches Colloquium leitet Prof. *Zöller*, Freit. 6 Uhr.

Prof. *Boedeker* leitet die praktisch-chemischen Uebungen im physiologisch-chemischen Laboratorium, täglich (mit Ausschl. d. Sonnb.) 8—12 und 2—4 Uhr.

Historische Wissenschaften.

Historisch-politische Geographie Europas: Prof. *Pauli*, 4 Stunden, 9 Uhr.

Diplomatik: Dr. *Steindorff*, 3 Stunden.

Einleitung in das Studium der alten Geschichte: Prof. *Wachsmuth*, Montag, Dienstag, Donnerstag und Freitag, 12 Uhr.

Römische Geschichte bis auf Sulla's Tod: Dr. *Hirschfeld*, 4 Stunden, 5 Uhr.

Allgemeine Geschichte im Zeitalter der Reformation und des dreissigjährigen Krieges: Prof. *Droysen*, 4 Stunden, 5 Uhr.

Geschichte des Zeitalters Ludwigs XIV. und Friedrichs des Grossen: Prof. *Pauli*, 5 Stunden, 5 Uhr.

Geschichte der Revolutionsepoche von 1848 bis 1851: Prof. *Droysen*, einmal um 5 Uhr, öffentlich.

Allgemeine Verfassungsgeschichte: Prof. *Waitz*, vier Stunden, 8 Uhr.

Deutsche Geschichte: Prof. *Waitz*, 5 Stunden, 4 Uhr.

Uebersicht über die Geschichte des Kirchenstaates: Dr. *Steindorff*, 1 Stunde, unentgeltlich.

Geschichte der Französischen Revolution: Dr. *Stern*, 4 Stunden, 5 Uhr.

Historische Uebungen leitet Prof. *Waitz*, Freitag, 6 Uhr, öffentlich.

Uebungen in der alten Geschichte leitet Prof. *Wachsmuth*, eine Stunde, öffentlich.

Historische Uebungen leitet Prof. *Pauli*, Mittwoch 6 Uhr, öffentlich.

Historische Uebungen leitet Prof. *Droysen*, 1 Stunde, öffentlich.

Historische Uebungen über Deutsche Geschichtsquellen des sechszehnten Jahrhunderts: Dr. *Stern*, 1 Stunde, unentgeltlich.

Kirchengeschichte: s. unter *Theologie* S. 353.

Staatswissenschaft und Landwirthschaft.

Encyclopädie der Staatswissenschaften: Dr. *Dede*, Dienstag, Donnerstag, Freitag, 12 Uhr.

Volkswirthschaftspolitik (praktische Nationalökonomie): Prof. *Hanssen*, vier Stunden, 3 Uhr.

Finanzwissenschaft: Prof. *Hanssen*, 4 Stunden, 5 Uhr.

Lehre vom Gelde: Prof. *Soetbeer*, 3 Stunden.

Einleitung in die allgemeine Statistik und insbesondere in die Bevölkerungsstatistik: Prof. *Wappäus*, Mittwoch und Sonnabend 11 Uhr.

Geschichte der volkswirthschaftlichen Reformen in Grossbritannien seit Beginn dieses Jahrhunderts: Prof. *Soetbeer*, 1 Stunde, öffentlich.

Geschichte des Handels und der Industrie: Dr. *Dede*, Mittw., 12 Uhr.

Allgemeine Verfassungsgeschichte: s. *Historische Wiss.* S. 364.

Landwirthschaftliche Betriebslehre: Prof. *Griepenkerl*, Mont., Dienst., Donnerst. und Freit., 5 Uhr.

Die Ackerbausysteme: Prof. *Griepenkerl*, in zwei passenden Stunden, öffentlich.

Die allgemeine und specielle landwirthschaftliche Thierproductionslehre: Prof. *Griepenkerl*, Mont., Dienst.,

Donnerst. und Freit., 12 Uhr. — Im Anschluss an diese Vorlesungen werden Demonstrationen auf benachbarten Landgütern und in Fabriken, sowie praktische Uebungen gehalten werden.

Landwirthschaftliche Betriebslehre: Prof. *Drechsler*, vier Stunden, 4 Uhr.

Landwirthschaftliche Fütterungslehre: Prof. *Henneberg*, 4 Stunden, Mittwoch und Sonnabend, 11—1 Uhr.

Ueber landwirthschaftliche Pachtverträge: Prof. *Drechsler*, Mittw. 4 Uhr.

Landwirthschaftliches Praktikum: Uebungen im Anfertigen landwirthschaftlicher Berechnungen (Ertragsanschläge, Buchführung): Prof. *Drechsler*, in zu bestimmenden Stunden.

Agriculturchemie s. unter *Naturwissenschaften* S. 363.

Anatomie und Physiologie der Hausthiere, Pferde- und Rindviehkunde; Hufbeschlag s. *Medicin* S. 359.

Parasiten der Hausthiere: s. *Naturwissensch.* S. 361.

Landwirthschaftsrecht s. *Rechtswissenschaft* S. 355.

Literärgeschichte.

Literaturgeschichte: Prof. *Hoeck*, 5 Stunden, 4 Uhr.

Geschichte der deutschen Nationalliteratur: Prof. *W. Müller*, 5 Stunden, 3 Uhr.

Geschichte der deutschen Dichtung seit Opitz: Assessor *Tittmann*, 5 Stunden, 11 Uhr.

Alterthumskunde.

Das Bühnenwesen und die dramatische Kunst des Aristophanes wird erörtern und dessen Vögel erklären: Prof. *Wieseler*, vier Stunden, 10 Uhr.

Umriss der Griechischen und Römischen Religions- und Kunstsymbolik: Prof. *Wieseler*, Mittw. u. Sonnab. 10 Uhr.

Im k. archäologischen Seminar wird Prof. *Wieseler* öffentlich Pausanias' Denkwürdigkeiten von Elis Mittw. 12 Uhr und ausgewählte Bildwerke erklären lassen, Sonnabend 12 Uhr. Die schriftlichen Arbeiten der Mitglieder wird er privatissime beurtheilen.

Geschichte der griechischen und römischen Kunst: Dr. *Matz*, Mont. Dienst. Donn. Freit., 4 Uhr.

Die deutsche Heldensage: Assessor *Tittmann*, 2 Stunden, 5 Uhr.

Eine archäologische Gesellschaft wird Dr. *Matz* leiten, Mittw. 4 Uhr.

Orientalische Sprachen.

Die Vorlesungen über das A. und N. Testament siehe unter *Theologie* S. 353 f.

Hebräische Grammatik: s. *Theologie* S. 354.

Anfangsgründe der arabischen Sprache: Prof. *Wüstenfeld*, privatissime.

Den Koran erklärt Prof. *de Lagarde*, Mont. u. Donn. 9 Uhr.

Rödigers syrische Chrestomathie lässt Prof. *de Lagarde* erklären, Dienst. u. Freit. 9 Uhr, öffentlich.

Unterricht in der aethiopischen Sprache ertheilt Prof. *Bertheau*, 2 Stunden, 2 Uhr.

Grammatik des Sanskrit: Prof. *Benfey*, Mont. Dienst. Donn. 5 Uhr.

Erklärung von Sanskritgedichten und vedischen Hymnen: Prof. *Benfey*, Mont. Dienst. u. Donnerst. 4 Uhr.

Griechische und lateinische Sprache.

Griechische Syntax: Prof. *Sauppe*, Mont., Dienst., Donn., Freit. 9 Uhr.

Aristophanes Vögel s. *Alterthumskunde* S. 365.

Thukydides, 1. Buch: Prof. *von Leutsch*, 5 Stunden, 3 Uhr.

Darstellung der Philosophie des Platon und Aristoteles und Einleitung in das Studium ihrer Schriften: Dr. *Peipers*, Mont. Dienst. Donn. 5 Uhr.

Platons Phaedon und Philebus s. *Philosophie* S. 359.

Pausanias Elis s. *Alterthumskunde* S. 365.

Plautus Pseudulus: Prof. *Sauppe*, Mont. Dienst. Donn. Freit., 2 Uhr.

Ausgewählte Briefe Cicero's: Dr. *Hirschfeld*, Mittw. und Sonnab. 12 Uhr.

Im k. philologischen Seminar leitet die schriftlichen Arbeiten und Disputationen Prof. *Wachsmuth*, Mittwoch von 11—1 Uhr; lässt griechische Lyriker erklären Prof. *von Leutsch*, Montag und Dienstag 11 Uhr; lässt Ciceros Orator erklären Prof. *Sauppe*, Donnerstag und Freitag, 11 Uhr, alles öffentlich.

Im philologischen Proseminar leiten die schriftlichen Arbeiten und Disputationen die Proff. *v. Leutsch* (Mitt-

woch 9 Uhr), *Sauppe* (Mittwoch 2 Uhr) und *Wachsmuth* (Sonnab. 11 Uhr); lässt Moschus Idyllen Prof. *v. Leutsch*, Mittw. 9 Uhr, Cicero's Brutus Prof. *Sauppe* erklären, Mittw. 2 Uhr, alles öffentlich.

Deutsche Sprache.

Gotische Grammatik und Erklärung Wulfila's: Dr. *Wilken*, Mittw. und Sonnab., 10 Uhr.

Angelsächsisch: Prof. *W. Müller*, Dienst. und Freit. 10 Uhr.

Ausgewählte althochdeutsche und mittelhochdeutsche Dichtungen nach dem kleineren altdeutschen Lesebuche von W. Wackernagel: Prof. *W. Müller*, Mont. Mittw. Donn. 5 Uhr.

Erklärung der Nibelungen: Dr. *Wilken*, drei Stunden, 6 Uhr.

Die Uebungen der deutschen Gesellschaft leitet Prof. *W. Müller*.

Altdeutsche Gesellschaft: Dr. *Wilken*, 1 Stunde, 6 Uhr.

Geschichte der deutschen Literatur: s. *Literärgeschichte*, S. 365. Die deutsche Heldensage: s. *Alterthumskunde* S. 365.

Neuere Sprachen.

Uebungen in der englischen Sprache: Prof. *Th. Müller*, Donn., Freit. und Sonnab., 12 Uhr.

Chaucer's Canterbury Tales wird *Derselbe* erklären: Mont. u. Donn. 9 Uhr.

Uebungen in der französischen Sprache: *Derselbe*, Mont., Dienst., Mittw., 12 Uhr.

In der romanischen Societät wird *Derselbe*, Freit. 9 Uhr, öffentlich die Anfangsgründe der spanischen Sprache lehren.

Schöne Künste. — Fertigkeiten.

Ausgewählte Kunstdenkmäler des Mittelalters erklärt Prof. *Unger* in einer noch zu bestimmenden Stunde.

Unterricht im Zeichnen, wie im Malen, ertheilen Zeichenmeister *Grape* und, mit besonderer Rücksicht auf naturhistorische und anatomische Gegenstände, Zeichenlehrer *Peters*.

Geschichte der neueren Musik: Prof. *Krüger*, zwei Stunden, 4 Uhr.

Harmonie- und Kompositionslehre, verbunden mit praktischen Uebungen, Musikdirector *Hille*, in passenden Stunden.

Lehre und Uebung des Contrapunkts: Prof. *Krüger*, privatissime.

Zur Theilnahme an den Uebungen der Singakademie und des Orchesterspielvereins ladet Musikdirector *Hille* ein.

Reitunterricht ertheilt in der K. Universitäts-Reitbahn der Univ.-Stallmeister *Schweppe*, Mont., Dienst., Donnerst., Freit., Sonnab., Morgens von 8—12 und Nachm. (ausser Sonnab.) von 3—4 Uhr.

Fechtkunst lehrt der Universitätsfechtmeister *Grüneklee*, Tanzkunst der Universitätstanzmeister *Höltzke.*

Oeffentliche Sammlungen.

Die *Universitätsbibliothek* ist geöffnet Montag, Dienstag, Donnerstag und Freitag von 2 bis 3, Mittwoch und Sonnabend von 2 bis 4 Uhr. Zur Ansicht auf der Bibliothek erhält man jedes Werk, das man in gesetzlicher Weise verlangt; über Bücher, die man geliehen zu bekommen wünscht, giebt man einen Schein, der von einem hiesigen Professor als Bürgen unterschrieben ist.

Ueber den Besuch und die Benutzung des *Theatrum anatomicum*, des *physiologischen Instituts*, der *pathologischen Sammlung*, der *Sammlung von Maschinen und Modellen*, des *zoologischen* und *ethnographischen Museums*, des *botanischen Gartens*, der *Sternwarte*, des *physikalischen Cabinets*, der *mineralogischen* und der *geognostisch-paläontologischen Sammlung*, der *chemischen Laboratorien*, des *archäologischen Museums*, der *Gemäldesammlung*, der *Bibliothek des k. philologischen Seminars*, des *diplomatischen Apparats*, bestimmen besondere Reglements das Nähere.

Bei dem Logiscommissär, Pedell *Fischer* (Burgstr. 42), können die, welche Wohnungen suchen, sowohl über die Preise, als andere Umstände Auskunft erhalten, und auch im voraus Bestellungen machen.

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

14. August. №. 20. 1872.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 3. August.

Meissner, Vorlegung eines Aufsatzes von Hartwig: über den Uebergang von Stoffen aus dem mütterlichen Blut in den Fötus.

Waitz, Vorl. eines Aufsatzes von Dr. Goll: über die Carlsruher Sammlung der Briefe Mazarin's.

Clebsch, über ein neues Grundgebilde der analytischen Geometrie der Ebene.

Clebsch u. Klein, über Modelle von Flächen dritter Ordnung.

Klein, zur Interpretation der complexen Elemente in der Geometrie.

Weber, Vorl. eines Aufsatzes von Dr. Riecke: über das von Helmholtz vorgeschlagene Gesetz der electrodynamischen Wechselwirkungen.

Clebsch, Vorl. eines Aufsatzes von A. Mayer: zur Theorie der partiellen Differenzialgleichungen erster Ordnung.

Hübner, Vorl. eines Aufsatzes von G. Spezia: über die Bestimmung des Jods neben dem Chlor durch salpetersaures Thalliumoxydul.

Wöhler, Vorl. zweier Aufsätze von Dr. Tollens: über die Umwandlung des Allylalkoholchlorürs in Dichlorhydrin, und über die Bibrompropiorsäure.

Ueber den Uebergang von Stoffen aus dem mütterlichen Blute in den Fötus.

Von Dr. **Hartwig**.

(Vorläufige Mittheilung.)

Vorgelegt von G. Meissner.

Im III. Bande 2ten Hefte des Archiv für Gynäkologie 1872 veröffentlichte Gusserow in einem Aufsatze »Zur Lehre vom Stoffwechsel des Fötus« eine Reihe von Versuchen, in welchen er theils trächtigen Thieren, theils schwangeren Weibern Jodpräparate (Tinct. jod. Kal. jodat.) beibrachte, um dann später zu untersuchen, ob und wann er beim Foetus Jod nachweisen könne.

Bei den an Thieren angestellten Versuchen erhielt er ein völlig negatives Resultat in allen Fällen. Bei Menschen gelang es ihm unter 14 Fällen nur ein Mal sicher Jod im Urin des Foetus nachzuweisen, und dies erst, nachdem die Mutter 21 Tage lang täglich 0,5 grms. Kal. jod. genommen.

Gusserow glaubt nun als Resultat seiner Versuche den Satz aufstellen zu dürfen, dass der Uebergang auf die Frucht nur ein sehr langsamer sei, oder dass die Stoffe sehr bald wieder vom Foetus auf die Mutter übergingen, und es deshalb nicht gelänge solche Substanzen im Fötus nachzuweisen.

Leider hat Gusserow in dem Aufsatze nicht die Methode, vermittelst welcher er Jod nachzuweisen suchte, angegeben, und da ich glaubte, dass es gewiss nur an dieser liegen müsse, wenn ein so völlig negatives Resultat erlangt würde, so unternahm ich ebenfalls Untersuchungen

zunächst an Thieren, dann aber auch an Menschen in jener Richtung, die ich unter freundlicher Unterstützung des Herrn Professor Marmé im physiologischen Institute zu Göttingen anstellte, und bei denen ich ein Resultat erhielt, welches dem von Gusserow gerade entgegengesetzt ist.

In allen Fällen gelang es mir beim Fötus Jod nachzuweisen, sobald im Urin der Mutter Jod nachweisbar war, d. h. sobald das Jod in das Blut der Mutter gelangte.

Die Methode, welche ich anwandte, war folgende:

Ich injicirte den Thieren, Kaninchen und Katzen, theils in den Magen theils subcutan Kal. jodat oder Natr. jodat. Den Kaninchen wurde dann der Urin in Zwischenräumen von 10 Minuten ausgedrückt, um zu constatiren, wie rasch in demselben Jod nachgewiesen werden konnte; in einigen Fällen war schon nach 20 Minuten, in allen sicher und deutlich nach einer halben Stunde Jod nachweisbar.

Sowie Jod im Urin erschien, wurden die Thiere getödtet, die Embryonen vorsichtig und ohne dass sie mit Theilen des mütterlichen Organismus in Berührung kamen herausgenommen, unter vorher mit Kalilauge alkalisch gemachtem Wasser zerschnitten, und einige Stunden mit demselben stehen gelassen. Es wurde dann die ganze Masse so gut es ging durch ein Tuch gedrückt, und in der Colatur dann Jod nachgewiesen auf Grund seiner electrolytischen Ausscheidung am positiven Pol, zu welchem Verfahren in folgender Weise Prof. Marmé rieth.

In einen kleinen Glascylinder, der auf der einen Seite durch Pergamentpapier wohl verschlossen war, wurde dünner Kleister gethan,

dann das andere Ende durch einen Kork, durch welchen eine Platinplatte gesteckt war, verschlossen, und diese Kammer dann in der zu untersuchenden Flüssigkeit, die vorher schwach mit verdünnter Schwefelsäure angesäuert war, aufgehängt und mit dem Kohlenpole einer aus vier Elementen bestehenden Bunsen'schen Batterie in Verbindung gebracht; am Zinkpol wurde ebenfalls ein Platinblech befestigt und dieses frei in die zu untersuchende Flüssigkeit getaucht.

Gewöhnlich war die Kleisterzelle schon nachdem der Strom etwa 15 Minuten gewirkt hatte sehr schön mit blauen Flocken angefüllt. Einigemale jedoch, wo ich glaubte durch längere Einwirkung des Stromes eine deutlichere Reaction bekommen zu können, verschwand die blaue Färbung des Kleisters wieder vollständig, dabei roch aber das über dem Kleister in der Kammer befindliche Gas stark nach Jod, und auf Zusatz von Natr. hyposulfuros. wurde der Kleister wieder bläulich gefärbt, ein Beweis, dass das Jod unter Einwirkung des electrischen Stromes, resp. durch das durch denselben frei gewordene Ozon zu Jodsäure oxydirt war.

In einem von mir bei einer Kreissenden angestellten Versuche, in welchem ich derselben 2 Stunden vor ihrer Niederkunft 1,0 grms. Natr. jodat. in Lösung gegeben hatte, gelang es mir leicht im Urin des Neugeborenen auf oben beschriebene Weise Jod nachzuweisen, dagegen waren im Fruchtwasser desselben Falles keine Spuren von Jod zu entdecken.

Zur Zeit setze ich die Versuche fort, und werde ich vor allen Dingen prüfen, ob nach längerm Gebrauche, und dann eintretender Pause in der Einverleibung von Jod in den mütterlichen Organismus, noch beim Foetus Jod

nachweisbar sein wird. Ebenso werde ich auch mit anderen Stoffen in dieser Richtung Versuche anstellen.

Zur Interpretation der complexen Elemente in der Geometrie.

Von **Felix Klein.**

Wenn bei der analytischen Behandlung der Geometrie das Studium der algebraischen Gebilde nothwendig zu der Einführung complexer Elemente hinleitet, so hat man lange Zeit darüber gestritten, ob und in wie weit den complexen Elementen eine rein geometrische Bedeutung beizulegen sei. Die mehr oder minder unbestimmten Principien, wie sie von Poncelet, Chasles u. A. mit Bezug auf diese Frage formulirt wurden, konnte eine exacte Auffassung nicht befriedigen; sie erweisen sich nicht nur als unklar sondern in vielen Fällen geradezu als ungenügend. Auch die in neuerer Zeit so vielfach angewandte und gewiss höchst fruchtbare Methode, die complexen Gebilde als nur analytisch definirt anzusehen, von ihnen aber Dinge auszusagen, welche die geometrische Anschauung den reellen Gebilden beilegt, indem man darunter nur die auch für die complexen Elemente bestehenden bez. analytischen Relationen versteht, kann nicht als die abschliessende Behandlung des Gegenstandes erscheinen, obwohl sie in ihrer Richtung Alles leistet. Denn wir wollen auch in der analytischen Geometrie uns nicht begnügen, geometrische Sätze an der Hand übrigens nicht gedeuteter analytischer Operationen

als wahr zu erkennen, sondern wir wollen den geometrischen Inhalt jeder einzelnen Operation verfolgen, so dass das Resultat als ein durch unsere räumliche Anschauung nothwendig bedingtes mit Bewusstsein erkannt wird. In dieser Richtung liegt also bei den complexen Elementen die Frage vor, ob man nicht den Sätzen und Aufgaben, die sich analytisch auf complexe Elemente beziehen, dadurch eine geometrische Bedeutung ertheilen könne, dass man sie auf reale Gebilde überträgt, die zu den complexen in einer wesentlichen, Beziehung stehen. Staudt's Verdienst ist es[1], in seinen Beiträgen zur Geometrie der Lage die Frage in der so präcisirten Form aufgestellt und in einer nun noch näher zu beleuchtenden Art beantwortet zu haben.

Jeder complexe Punct — und es mag hier nur von complexen Puncten gehandelt werden — liegt mit seinem conjuzirten auf einer reellen Geraden und giebt mit ihm zusammen das Paar Grundpuncte für eine reelle auf der Geraden befindliche Involution ab. Diese Involution ist durch die beiden Puncte vollständig bestimmt; es findet auch das Umgekehrte statt; sie kann daher die beiden complexen Puncte geometrisch vertreten, insofern für sie bestimmte Beziehungen gelten müssen, sobald irgendwelche Beziehungen für die complexen Puncte festgesetzt werden. Aber es entsteht die Schwierigkeit, zu sondern, was auf den einen oder den anderen complexen Punct sich bezieht. Um dies zu erreichen — und das ist der Kern seiner

1) Vergl. hierzu die beiden neuen Aufsätze Stolz. Die geometrische Bedeutung der complexen Elemente in der analytischen Geometrie. Math. Ann. t. IV. August. Untersuchungen über das Imaginäre in der Geometrie. (Programm der Friedrichs-Realschule in Berlin 1872.)

Methode — legt v. Staudt der geraden Linie, auf welcher sich die Involution befindet, einen bestimmten Sinn bei, in welchem sie durchlaufen werden soll; die Involution vertritt den einen oder den andern complexen Punct, jenachdem man den einen oder anderen Sinn auswählt.

Diese Einführung und Unterscheidung des Sinnes scheint zunächst sehr willkürlich. Denn derselbe hängt mit der auf der Geraden befindlichen Involution gar nicht zusammen, er giebt nur an, in welcher Reihenfolge wir die überdies durch die Involution paarweise zusammengeordneten Puncte der Geraden unserer Aufmerksamkeit vorführen sollen. Und es ist gar nicht zu sehen, wesshalb die Unterscheidung des Sinnes mit der Trennung der beiden complexen Puncte zusammenhängt.

Dem gegenüber sei es gestattet hier eine andere Interpretation der complexen Elemente vorzutragen, welche eine Einsicht in die aufgeworfenen Fragen gestattet, welche übrigens die Staudt'sche Interpretation umfasst und nur als eine Weiterbildung derselben angesehen werden will.

In ihrer allgemeinsten Form kann die fragliche Interpretation folgendermassen dargelegt werden. Die beiden auf einer Geraden befindlichen complexen Puncte 0, 0′ können als Grundpuncte für eine auf der Geraden zu treffende projectivische Massbestimmung betrachtet werden. Als Entfernung zweier Puncte a, b hat man dann den mit einer beliebig zu wählenden Constanten c multiplicirten Logarithmus eines der beiden Doppelverhältnisse zu betrachten, welches die Puncte a, b mit den Puncten 0, 0′ bilden. Nachdem man über c nach Belieben

verfügt, ist die Massbestimmung bis auf das Vorzeichen festgelegt, in dieser Unbestimmtheit repräsentirt sie die beiden complexen Puncte 0 und 0′. Ein Wechsel des Vorzeichen's kann mit einer Vertauschung der beiden Puncte 0 und 0′ in Zusammenhang gebracht werden. Denn bei einer solchen Vertauschung geht das bez. Doppelverhältniss in seinen reciproken Werth über, der Logarithmus des Doppelverhältnisses ändert sein Zeichen. Indem wir also der Massbestimmung ein bestimmtes Vorzeichen beilegen, sondern wir zwischen den beiden complexen Puncten, insofern Vorzeichenwechsel und Vertauschung der beiden Puncte einander entsprechen.

Wir wollen jetzt von einem beliebigen Puncte a anfangend auf den gegebenen Geraden eine Scala mit Bezug auf die festgelegte Massbestimmung äquidistanter Puncte construiren, welche in positivem Sinne fortschreitet, in dem wir von a aus eine positive Strecke α wiederholt antragen. Die so entstehende und in bestimmtem Sinne durchlaufene Punctreihe vertritt die Massbestimmung vollständig, auch wenn sie sich nach n-maliger Wiederholung schliesst, vorausgesetzt nur, dass $n > 2$. Sinkt n auf 2 herab, so hat die Reihe als solche keinen eigenthümlichen Sinn mehr; sie hat auch zu wenig Constante, um die beiden complexen Puncte zu definiren. — Ist aber $n > 2$, so können wir die Punctreihe, die dann eine sogenannt cyclisch projectivische Reihe von n Puncten ist[1]), mit ihrem Sinne an

1) Eine solche wird auf einer beliebigen Geraden von den n Strahlen ausgeschnitten, die den Winkelraum um einen Punct herum in n gleiche Theile theilen; man er-

Stelle der Massbestimmung setzen, als Bild des einzelnen complexen Punctes dient dann also die in bestimmtem Sinne durchlaufene cyclisch projectivische Reihe.

Statt der einen solchen Reihe mögen wir unendlich viele construiren, indem wir den Anfangspunct *a* sich beliebig ändern lassen; wir mögen die unendlich vielen Reihen in der Weise auf einander folgen lassen, wie es ihre Anfangspuncte entsprechend einer positiven Zunahme der Entfernung von *a* thun. Ist *n*, wie wir voraussetzten, > 2, so können alle diese Punctreihen in bestimmter Aufeinanderfolge aus einer einzigen derselben durch Construction abgeleitet werden[1]); die Einführung der unendlich vielen Reihen hat nur den Zweck, dass sie den Werth beurtheilen lässt, den die einzelne Reihe zur Darstellung der complexen Grundpuncte besitzt; sie ist eben eine unter unendlich vielen.

Ist aber $n = 2$, haben wir also mit Punctepaaren zu thun, die dann eine Involution bilden, so wird das gleichzeitige Betrachten von mindestens zwei Paaren nothwendig, denen dann noch der Sinn, in welchem die Gerade durchlaufen werden soll, besonders hinzugefügt werden muss. Dann hat man eben die Staudt'sche Interpretation.

Nehmen wir aber, was am einfachsten scheint, $n = 3$. Man hat dann 3 Puncte auf der Geraden und zwar drei beliebige Puncte, da jedes System

hält dabei die allgemeinste cyclisch projectivische Reihe, jede einmal.

1) Man erreicht dies am einfachsten, wenn man die erste Reihe durch *n* Strahlen eines Büschel's bestimmt, die unter einander gleiche Winkel bilden; dreht man den Büschel um einen Mittelpunct, so schneiden die Strahlen alle weiteren Punctreihen aus.

von 3 Puncten cyclisch projectivisch ist. Die Grundpuncte desselben werden durch die quadratische Covariante Δ der durch die drei Puncte repräsentirten cubischen Form f vorgestellt. Drei Puncte sind auch gerade nothwendig und hinreichend, um einen bestimmten Sinn auf den Geraden fest zulegen. W i r r e p r ä s e n t i r e n a l s o s c h l i e s s l i c h d e n c o m p l e x e n P u n c t d u r c h d r e i b e l i e b i g e i n b e s t i m m t e m S i n n e z u n e h m e n d e P u n c t e e i n e r G e r a d e n. — Der complexe Punct ist dann einer der beiden Puncte, die durch $\Delta = 0$ vorgestellt werden. Dass sich die Unterscheidung des Sinnes auf den Geraden mit der Unterscheidung der Factoren von Δ deckt, kommt darauf hinaus, dass die Festsetzung des Sinnes der Adjunction des Differenzenproductes der drei Wurzeln von $f = 0$ äquivalent ist, letzteres aber zugleich Differenzenproduct der Wurzeln von $\Delta = 0$ ist.

Es mag hier nicht näher ausgeführt werden, wie sich die constructiven Aufgaben, welche man für complexe Puncte stellen kann, unter Zugrundelegung dieser einfachsten Darstellung gestalten; dagegen mag noch kurz der Darstellung durch cyclisch projectivische Reihen von 4 Puncten a, b, c, d gedacht werden. Dieselbe fällt nämlich ihrem Wesen nach mit v. Staudt's harmonischer Darstellung der zur Definition der complexen Puncte dienenden Involution zusammen, und nur die Auffassung ist hier etwas anders. Bei v. Staudt hat man in den vier Puncten a, b, c, d zwei Paare der bez. Involution vor sich, nämlich ac und bd, und man schreibt die Puncte nur in der Reihenfolge a, b, c, d, um zugleich den Sinn auf der Geraden zu fixiren. Hier dagegen gehen die Puncte a, b, c, d in ihrer Reihenfolge durch dieselbe Operation aus einander

hervor, und der Sinn findet sich von selbst mitbestimmt.

Ueber die Carlsruher Sammlung der Briefe Mazarin's.

(Zur Kritik von Siri's Mercurio.)

Von Dr. Jar. Goll.

Unter den verschiedenen handschriftlichen Sammlungen von Mazarin's italienischer Correspondenz räumt Ranke die erste Stelle ein der in der grossherzoglichen Hofbibliothek aufbewahrten »Lettere del em^{mo} e rev^{mo} Cardinale Mazzarinni«, die ich durch Vermittelung der K. Universitätsbibliothek hier benutzen honnte.

Es sind dies Abschriften des italienischen Copialbuches Mazarin's, in das wohl auch eine poscritta di pugno propcio in una lettera francese, nicht aber der Brief selbst, eingetragen wurde. Schreiben an den König von Polen, an den Kurfürsten von Baiern, in denen sich der Cardinal seiner Muttersprache bediente, kamen auf diese Weise in die Sammlung; sie sind aber weder an Zahl noch an Inhalt beträchlich. Dagegen für die italienische Politik Frankreichs von 1648 — 1650 — die Lücke v. Aug. bis Ende 1647 abgerechnet — liegt hier zwar nicht das vollständige, aber doch das wichtigste Material vor [1]).

1) Das Nähere vgl. Ranke, Analecten: Ueber die Correspondenz des Cardinal Mazarin (Werke XII, S. 193 ff). — Die in Miscellanea di storia italiana IV. Turin 1863 nach den Originalen abgedruckten Briefe an Giannetino Giustiniani werden durch die C. S. ergänzt. —

Um jene Lücke auszufüllen, wird man am ersten nach Siri's Mercurio greifen. Aber wohl nicht ohne Ueberraschung findet man, dass ihm die gesammte italienische Correspondenz zu Gebote stand, und eine nähere Untersuchung zeigt, das die C. S. wenige wichtigere Schriftstücke enthält, die er nicht benutzt hat. Sein Werk hat vor ähnlichen Sammlungen den Vorzug, dass es zum grossen Theil nach handschriftlichen Quellen verfasst und zusammengestellt worden ist. Kaum jemals sind die Papiere eines allmächtigen Ministers so bald nach seinem Tode und in solchen Umfange der Geschichtschreibung übergeben worden [1]). Neue Quellenpublikationen machen Siri's Merkurio zum Theil entbehrlich, aber je weiter dieselben fortschreiten in dem Masse lernt man auch den Werth des Werkes schätzen. Wenn es doch von der Geschichtschreibung nicht selten übersehen worden, so kann die Art und Weise, wie Siri sein Material wiedergiebt, das nur zum Theil erklären.

Zwar macht er selbst darauf aufmerksam, dass er Vieles und Wichtiges bieten kann, deutet auch wol an, woher es stammt, aber eine nähere Kritik ist doch nur durch die Vergleichung der vollständigen Briefe möglich. Dazu mögen einige Bemerkungen dienen.

Die in Turin erhaltenen Briefe Mazarin's benutzt G. Claretta in seiner Storia della regenza di Cristina di Francia. 2. Th. 1868. 1869.

1) Man vgl. z. B. von älteren Publikationen die Nég. secrètes des westfälischen Friedens, von neueren die Archives de la maison d'Orange-Nassau. — Für die italienischen Angelegenheiten hatte Siri auch die Papiere des Abbé S. Nicolas (herausg. in J. 1748 unter dem Titel Négociations à la cour de Rome de M. Herni Arnauld, Abbé de S. Nicolas. 5 Bde.) und den Briefwechsel mit den Gesandten in Rom.

Sehr oft wird im Texte selbst das Erzählte als Inhalt einer Depesche angekündigt. Marginalnoten, die auch dazu dienen, beschränken sich zuweilen auf das blosse Datum und können irreführen, da man das Datum des Berichtes für das Datum der Begebenheit halten kann[1]). Mit einfacher Wiedergabe seines Materials begnügt sich übrigens Siri selten; auch wo die italienische Sprache desselben es möglich gemacht hätte, nimmt er wenigstens stylistische Aenderungen vor, die nicht immer geschmackvoll ausfallen. Die grosse Länge namentlich vieler Briefe Mazarin's wird durch Auslassungen oder auszugsweise Mittheilung gekürzt, wodurch aber Wiederholungen doch nicht vermieden werden, die, neben der beliebten oratio indirecta, das Werk oft ermüdend und wenig geniesbar machen. — Nicht immer ganz leicht ist es den Umfang des mitgetheilten Actenstücks richtig zu erkennen. Da die Marginalnote nicht jedesmal mit dem Anfange desselben correspondiert, noch das Ende mit der nächst folgenden Bemerkung, sei es im Texte oder am Rande [2]). Aber auch Partien des Buches, wo diese fehlen und wo man am ersten selbständige Arbeit des Verfassers vermuthen möchte, stellen sich bei näherer Betrachtung als Bruchstücke, als Aus-

1) Siri selbst warnt davor X, 1746. — Auch ohne Noth wird diese Art von Datirung angewendet. Vgl. über die Audienz des Abbé S. Nicolas IX 533 mit Nég. VI.

2) So geht der Brief an Grimaldi v. 19. Juni 1647 (IX, 616) bis S. 619, wo auch der Absatz »Sospetti presi . . .« aus demselben stammt. XI, 597 gehört der Absatz. »Il Cardinale giustifica« .. weder zur vorhergehenden, noch zur nachfolgenden Depesche, sondern er ist aus einer dritten v. 15. Mai entnommen, die nicht angezeigt wird.

züge, als ganze Depeschen heraus; und sogar von einzelnen eingestreuten Reflexionen über die erzählten Begebenheiten muss dies gesagt werden[1].

Wenn in dieser Beziehung einige Nachweisungen über das Verhältniss des Mercurio zu den italienischen Briefen folgen, so geschieht es ohne Ansprache auf Vollständigkeit; die begonnene Ausgabe der Correspondenz Mazarins wird das Original selbst bringen.

M. IX, 577 (Considerazioni und Vendito delle galere) und was weiter 579 — 586 folgt, ist aus Briefen an Grimaldi und einer Memoria für Caleagnini entnommen. —

X, 620 ff. stammt aus einem Briefe an den Herzog von Modena v. 1. Juli 1647. und zwar bis S. 625, wo sich ein Brief an den Cardinal d' Este v. 3. Juli anschliesst.

XI, 458. (Stupore del Cardinale) geht zurück auf ein Schreiben an Grimaldi v. 6. März 1688 was von »Al pari d'ogni altro ..« an folgt bis S. 464 auf ein späteres v. 20. M. Was S. 509 von »I soccorsi per Santo al regno di Napoli cadessero ...« angefangen im Anschluss an eine Depesche an Grimaldi v. 5. Apr. 1648 erzählt wird, ist nicht aus dieser geschöpft, sondern stammt aus einer Memoria per le cose di Napoli. Ueber die neapolitanischen Soldaten in Flandern (S. 510.) hat wieder Mazarin an Grimaldi (24. Apr.) geschrieben. — S. 715 Che

1) Vgl. im X. Bande über den Tod des Prinzen Fridrich Heinrich von Oranien. Die Quelle dieser »mehr politischen als christlichen« Erwägung ist ein Schreiben Brasset's (Archives IV. 181.) Auch Mazarin in einem Briefe an Tomaso von Savoien eignet sich dieselbe an (che la vita, e la morte di questo prencipe siano state egualmente avan Laggiose à i nostri stati ...) Vgl. auch Brienne an S. Nicolas. (Nég. IV, 504.)

di vero molto al vivo .. wurde von Mazarin nicht mehr an Grimaldi, wohl aber am selben Tage an Tomaso mitgetheilt.

XII, 858 — 860, XIII, 854 geht auf Briefe an den Herzog von Modena zurück.

Was XIII, 856 ff. Siri den Cardinal im Conseil vortragen lässt, ist entnommen einem Discorso se si deve continuar la guerra. In der C. S. sind neben Briefen auch etliche Schriftstücke anderer Art enthalten.

Im IV. Bande 1655 des Merkurio giebt Siri einen Rückblick über die frühere Laufbahn Mazarins und über die ersten Jahre seines Ministeramts (S. 337—423). Wie verändert ist die Schilderung des Cardinals in dem nächsten Bande, der erst im Jahre 1667 erschien!

Während die neuere Forschung, die sich nicht auf die Memoiren beschränkte, der ersten Auffassung sich zu nähern scheint, tritt uns in der späteren Darstellung Siri's, der doch auch die Briefe kennt, das Bild der meisten Memoiren entgegen. Mit dem weiteren Fortschritt des Werkes vermehren sich auch die ungünstigen Farben, so dass man sich wundern kann, dass der Verfasser auch Colbert, dessen Verhältniss zu Mazarin bekannt ist, einen Band (IX) widmen durfte.

Nicht das wird man auffallend finden, dass er den Cardinal als feinen Diplomaten schildert, der grundsätzlich seine wahren Absichten und Beweggründe sogar den besten Freunden und Anhängern verbarg; auch kann man es zugeben, dass die Briefe allein nicht genügen, um sich ein vollständiges Bild von dem Manne zu machen: überraschend ist nur das Licht mit dem er die Worte und Thaten Mazarin's beleuchtet, die ohne dasselbe nach seiner Versicherung dunkel und

undurchdringlich bleiben müssten. Siri sagt es geradezu, dass es nur »eine künstliche Färbung« war [1]), wenn Mazarin vom Dienste der Krone sprach, da er doch überall persönliche Zwecke, selbst bis zur Schädigung des Staatsinteresses verfolgte.

Ueberhaupt liebt es der Verfasser des Mercurio in den persönlichen Verhältnissen die eigentlichen Kräfte des geschichtlichen Lebens zu finden. So soll der Wunsch Mazarin's dem Bruder, der Erzbischof von Aix war, den Purpur zu verschaffen, die ganze Politik Frankreichs in Italien bestimmt haben [2]).

Es gilt hier nicht das Bild selbst zu berichtigen, es frägt sich nur, in wiefern die Auffassung auf die Wiedergabe der Quellen Einfluss üben mochte.

Die Antwort fällt im Ganzen zu Gunsten Siri's aus, da er gewöhnlich seine Ansicht nur in einzelnen Ausdrücken, die er im Texte hinzufügt, in Randnoten oder in ganzen Abschnitten zu erkennen gibt, das betreffende Schriftstück aber unversehrt, nur gleichsam mit einem Warnungszeichen versehen, dem Leser mittheilt. Unbedingt darf man sich jedoch auf die Darstellung des Mercurio nicht verlassen. So in der erwähnten Promotionsangelegenheit. Ungeduldig und misstrauisch gegen die Vertreter der französischen Politik in Rom, beschloss Mazarin's Bruder sich selbst dahin zu begeben, um auf den Papst einzuwirken. In der C. S. finden sich

1) So heisst es auch IX, 501 über die Sendung Fontenay's nach Rom: Il servigio della corona christianissima era la sola superficie di questa ambasceria, ma la promotione (des Bruders) n'era il corpo.

2) Ueber die Promotion des Erzbischof's S. neben Siri auch die Nég. des Abbé S. Nicolas.

Briefe des Cardinals, die offen gegen diese Absicht sprechen [1]); erst in einem Schreiben v. 27. April 1647 gibt er nach. Siri sagt nichts von früheren Briefen und fügt dem erwähnten Datum die Bemerkung hinzu: L'esorta il Cardinale al viaggio di Roma.

Einen grossen Raum nimmt im Mercurio die Schilderung des Aufstandes von Neapel ein. Siri beginnt (X, 5) mit der Bemerkung, der Volksaufstand habe Neapel der spanischen Krone gerettet, weil sonst der Adel einen fremden Fürsten proklamirt hätte; er weiss auch, dass bei den geheimen Unterhandlungen mit den Unzufriedenen Thomas von Savoien eine Rolle spielte [2]). Ueber die psychologischen Gründe der Politik, welche Mazarin nach Ausbruch des Aufstandes befolgte, sind wir schon durch den in der C. S. enthaltenen Theil der italienischen Correspondenz vollkommen aufgeklärt [3]). Auch

1) Jo conosco di non ingannarmi, quando vedo impossibile. Jan. 1647 — Nell' avanzamento di V. S. Illma io non considero solo la sodisfazione di Lei, ma anco l'interesse della corona. Questo sia detto per sempre, e non vi siano altre repliche in questo negozio. Nach Mazarin's Wunsch sollte der Erzbischof den Purpur nicht der persönlichen Gnade des Papstes, sondern der Intervention Frankreichs oder Polens verdanken. — Vgl. auch Mém. de Guise p. 11: .. et que pour le voiage de son frère il n'était nullement d'avis. Ich benütze die 2. Ausgabe (1668).

2) Chéruel in seinen Mém. sur Fouquet theilt zuerst einen in Paris (1646) entworfenen Vertrag mit, wornach der Prinz Neapel, Frankreich Gaëta und eventuell Savoien erhalten sollte.

3) Ranke Analecten. — Vgl. auch die umfangreiche und wichtige Depesche an den Gesandten in Rom und die folgenden Briefe v. Nov. 1647 M. X, 543 ff. — Ausdrücklich hebt Siri hervor (XI, 585), man habe ihm von französischer Seite alles Material ohne Rückhalt zur Verfügung gestellt.

Siri hebt das Misstrauen des Cardinals gegen die Bewegung hervor, so lange Adel und Volk im Zwiespalt bleiben; auch verschweigt er nicht dessen Abneigung gegen die republikanische Form und vor Allem das Verhältniss zu Guise; aber dies Alles reicht nicht hin. Mazarin's Politik stellt sich ihm als ein Räthsel dar, da es doch nach seiner Ansicht, die gleichzeitige und spätere Schriftsteller theilen, nur von ihm abhieng, Neapel den Spaniern zu entreissen; die Lösung könne man auch hier nur in geheimen Beweggründen finden (Diligenza dell'autore per penetrare l'arcano del ministro. XI, 585 ff.). Hypothesen, die andere in dieser Beziehung bereits aufgestellt[1]), genügen ihm nicht; er vermehrt sie durch die Annahme, Mazarin habe Condé die Krone bestimmt, um ihn auf diese Weise zugleich von Frankreich zu entfernen, und dabei habe ihm Guise im Wege gestanden.

Auch in der Correspondenz wird davon gesprochen, Condé in Neapel zu verwenden. Aber dass er der eigentliche Candidat Mazarin's gewesen, geht aus derselben nicht hervor, und wenn Siri in der Aufzählung der möglichen Candidaten (XI, 404) Condé hinzufügt, so stimmt das nicht mit den Wortlaut des C. S. und muss als absichtlich bezeichnet werden. Dass Guise von Mazarin zu seiner abenteuerlichen Reise nach Neapel weder aufgefordert, noch ermuthigt wurde, geht schon aus der C. S. hervor. Aber Vor-

1) Siri scheint fast auf den Gedanken einzugehen, Mazarin habe selbst nach dem Throne von Neapel gestrebt. Hat man ihm doch in J. 1648 die Krone von Sicilien angeboten! Vgl. S. 587. Pratica per far rè di Sicilia il Cardinale. — Ma se questo pensierone, e desiderio del Regno di Napoli sollecitò la sua mente, il che cosi leggier non mi persuado, non lo dimonstrano i passi da esso avanzati oppositamente.

würfe konnte der Herzog gegen den Cardinal doch erheben; offen und direkt hat er ihm seine Missbilligung auch nicht ausgesprochen. Den eigentlichen Sachverhalt kann man am besten aus Siri entnehmen.

Nachdem Guise mit den Neapolitanern bereits Unterhandlungen angeknüpft, schickte er nach seiner eigenen Erzählung (Mém. S. 28.) einen Courier nach Frankreich mit Briefen, darunter auch an Mazarin [1]). Die Antwort habe günstig gelautet, und die gewünschte Erlaubniss, sein Leben im Dienste Frankreichs zu wagen, enthalten [2]). Wenn Siri auch diese Erlaubniss erwähnt (X, 467 Consentita à Guisa d'andare à Neapoli), so folgt er eben nur den Mémoiren, denn gleich darauf werden Briefe an Fontenay erwähnt, die anders lauten [3]). Als Mazarin später (30. Apr. 1648) an Giustiniani schrieb: . . . che il viaggio del duca non è stato ni per ordine del rè, ni per mio consiglio anzi io scrissi di

1) Der Brief, über dessen Inhalt Guise weiter nichts mittheilt, findet sich im M. X, 465 (Rom 17. Sept. 1647). Guise ersucht um die Erlaubniss, »sein Leben im Dienste Frankreichs wagen zu dürfen« und bittet um Unterstützung.

2) Il (Mazarin) me mandait, que voyant tant de péril ... il n' oserait pas me le conseiller, mais que si je voulais le hazarder, le roi m'en donnait la permission ...

3) Nach Empfang von Guise's Brief schrieb Mazarin an den Gesandten (8. Okt. 1647), man müsse die weitere Entwickelung der Dinge abwarten; das Unternehmen sei zu gefährlich, und der Tadel würde auf die Regierung zurückfallen. Diese Depesche, offenbar zur Mittheilung an den Herzog bestimmt, wurde durch ein Privatschreiben an Fontenay begleitet, worin es heisst, der Herzog sei blind, und die Einmischung der Franzosen könne vielmehr die Versöhnung der Neapolitaner mit Spanien herbeiführen. — Schon im Juni 1647 hatte Mazarin an Grimaldi geschrieben, eine Erhebung in Neapel könnte für den Erfolg der französischen Pläne ebenso schädlich, wie günstig ausfallen. C. S.

Fontanablò per impedirlo — (so lautet die Stelle in den Misc. und in der C. S. Am 8. Okt. war Mazarin in Fontainebleau), so mochte er eben diese Briefe meinen. Dass die Antwort an Guise selbst ähnlich gelautet, erfahren wir aus einem Brief Mazarin's an seinen Bruder (17. Okt. 1647), den Siri selbst (X, 470) erwähnt.

Ohne ausdrückliche Erlaubniss, aber vom Gesandten im Namen des Königs »der Republik« empfohlen [1]), schifft sich Guise (13. Nov.) ein. De Tilly, von ihm nach Frankreich geschickt, erreicht den Hof nach seiner Ankunft in Neapel (Mém. 110.), das Unternehmen selbst wird aber von Mazarin — wie Guise erzählt — vollkommen gebilligt. Siri, der auch an dieser Stelle die Memoiren wörtlich ausschreibt (vgl. Mém. 111 und Merc. X, 529) theilt die von de Tilly überbrachten Briefe mit (X, 528) aber in einem unrichtigen Zusammenhang und im Widerspruche nicht nur mit Guise's, sondern auch mit seiner eigenen Erzählung [2]); sie sind nicht vor Guise's Reise übergeben worden, noch weniger konnte der Herzog die Antwort bereits in Rom erhalten haben. Diese selbst, die Siri später am richtigen Orte (X, 584) einfügt, sagt ausdrücklich, der Herzog habe den Beschluss »da se« gefasst und ohne Zaudern ausgeführt. Uebrigens wird ihm für die Zukunft Unterstützung zugesagt [3]). Ohne darauf zu achten, in welches Nest von Widersprüchen er hineingerathen, hebt Siri die

1) Das Schreiben s. Merc. X, 590.

2) Von einer Depesche Mazarin's an Fontenay v. 12. Nov. 1647 sagt Siri ausdrücklich, sie sei avanti l'arrivo de Tilly geschrieben. Vgl. auch Mém. 127.

3) Ueber dieses Schreiben Mazarin's v. 29. Nov. 1649 s. auch Ag. Nicolai Historia dell' ultime rivoluzioni di Napoli. Amst. 1660 S. 325 ff.

Erzählung von Guise's Reise mit den Worten an: Hor lieto il Duca di Guisa dell'agradi mento della corte accingevasi al viaggio . . . und überbietet in dieser Beziehung die Memoiren selbst. Man kann es daher nicht als zufällig betrachten, wenn er in dem Briefe an Giustiniani (XI, 590) die bei Ranke citirte Stelle unterdrückt und aus einem Schreiben an Grimaldi (XI, 599) Mazarin's Worte auslässt: der Gesandte wisse, ob er lüge; e la regina, e tutto il consiglio hanno sentite, ed approvate le ragioni . . .

Siri erzählt, er habe einst den Auftrag Mazarin's, eine Abhandlung zur Entschuldigung seiner Politik zu verfassen, abgelehnt (XI, 4). Jetzt, nach dem Tode des Cardinals und des Herzogs, »seines Wohlthäters und seines Freundes« könne er unparteiisch schreiben. Auch er mag zwar nicht Guise in allen Stücken entschuldigen, aber zeigen will er, dass seine Fehler weniger, als die Missgriffe Anderer verschuldet; der Tadel treffe mit vollem Gewichte die französische Regierung. So gestaltet sich auch seine Darstellung, wie die Memoiren zu einer Vertheidigung Guise's gegen Mazarin [1]), und man wird sich nicht wundern, dass diese fast ganz in den Mercurio aufgenommen wurden, obgleich auch da Siri seine Vorlage ähnlich wie die von ihm benuzten diplomatischen Papiere behandelt und sich nicht von denselben ganz abhängig zeigt. Ihm wie Mazarin steht es von Anfang an fest, der Herzog habe nach der Krone von Neapel getrachtet, wodurch auf dessen eigene Erzählung, auch wenn sie wörtlich wiederholt wird, das Licht nicht selten von einer anderen Seite fällt. Mazarin

1) Ausdrücklich wehrt Guise in den Memoiren dieselben Vorwürfe ab, die in der italienischen Correspondenz gegen ihn erhoben werden.

gegenüber hebt er aber hervor, Frankreichs Interesse habe es gefordert, dem Herzog die Krone zu verschaffen.

Auch manches wichtige Schriftstück wird hinzugefügt, nicht selten mit ausgesprochener Absicht die Memoiren zu berichtigen (vgl. X, 483), nur dass eben da, wo Siri andere Quellen beibringt, sein Verfahren meist unkritisch wird [1]). Die scheinbare Ausgleichung widersprechender Berichte geschieht dann gewöhnlich auf Unkosten Mazarin's. Wo die Person des Cardinals aus dem Spiel bleibt, wird auch seine Haltung kritischer, so namentlich Modène gegenüber, für den er sich mitunter selbst gegen Guise entscheidet.

Siri sagt (X, 1746), in Frankreich habe die lobenswerthe Gewohnheit Eingang gefunden mit historischen Darstellungen zugleich die benutzten Quellen als Beleg zu publicieren. Er selbst habe einen andern Weg gewählt, der es aber doch möglich macht, die Redlichkeit und Treue seiner Erzählung zu prüfen. Wir mögen es bedauern, müssen aber darin mit ihm übereinstimmen, das auch in der gewählten Form die von ihm mitgetheilten Quellen zur geschichtlichen Forschung zu verwerthen sind.

1) Ein Beispiel wurde angeführt. Vgl. auch über die Anwesenheit Baschi's in Neapel (Ende 1647), wo dieselben Vorgänge zweimal nach entgegengesetzten Berichten erzählt werden.

Bestimmung des Jod's neben den Chlor durch salpetersaures Thalliumoxydul.

Von G. Spezia.

(Vorgelegt von H. Hübner.)

Da man kein besonders einfaches Verfahren hat, um Jod und Chlor von einander zu trennen, so wird die hier angebene Gewichtsanalyse häufig Anwendung finden können.

Die Trennung des Jods vom Chlor durch Thalliumlösung gründet sich darauf, dass das Thalliumjodür in kaltem Wasser fast ganz unlöslich das Thalliumchlorür aber in viel Wasser löslich ist.

Die Ausführung der Bestimmung ist folgende:

Jod und Chlor sind zunächst an Alkalimetall zu binden. Man stellt dann eine neutrale, verdünnte, kalte Lösung her und versetzt diese mit einer gesättigten neutralen salpetersauren Thalliumoxydullösung NO_3Tl unter starkem Umrühren bis eben der nur vorübergehend auftretende Niederschlag bei wiederholter Prüfung nicht wie der erste, bleibende gelb, sondern weis erscheint. Diese Erscheinung ist sehr leicht zu beobachten.

Es ist anzurathen die Thalliumlösung aus einer Burette ausfliessen zu lassen, um sie tropfenweise zugiessen zu können. Sollte der weisse Chlorthaliumniederschlag nicht beim Berühren sogleich verschwinden, so ist er durch einen kleinen Wasserzusatz leicht zu beseitigen. Eine sehr grosse Menge Wasser darf man nicht zugeben, da sonst etwas Jodthallium gelösst wird; doch kann man sich innerhalb ziemlich weiter Grenzen bewegen.

Man lässt dann die Flüssigkeit mit dem Niederschlag 8—12 Stunden an einem kalten Ort stehen, giesst sie klar durch ein gewogenes

Filter ab, wäscht dasselbe aus um nicht zu viel Wasser durch den Niederschlag gehen zu lassen, und spritzt darauf den gelblichen Niederschlag mit Wasser auf das Filter, worauf man ihn mit wenig kaltem Wasser 3—4mal auswäscht und dann bei 100° trocknet.

Das Jod wird aus der gefundenen Menge von Thalliumjodür berechnet.

Im Filtrat wird das Chlor mit Silberlösung als Chlorsilber bestimmt.

Ich habe dies Verfahren durch die folgenden Analyse verschiedener Mischungen von Jodkalium und Chlorkalium geprüft. Bei den ersten beiden Bestimmungen ist ganz reines Jodkalium und Chlorkalium verwendet worden. Bei den spätren Analysen s. g. reines häufliches Jodkalium welches nicht ganz rein war. Ich führe diese weniger genauen Zahlen auch an um zu zeigen, dass kein Zufall die Uebereinstimmung der gefundenen und berechneten Zahlen in den ersten Analysen herbeigeführt hat.

		berechnet	gefunden	Unterschied
1.	Cl K = 0,8197	Cl = 45,86	45,70	— 0,16
	J K = 0,0309	J = 2,77	2,77	— 0,00
	0,8506gr	K = 51,37		
		100,00		
	(Tl J = 0,0615; Ag Cl = 1,572)			
2.	Cl K = 0,0782	Cl = 4,05	4,23	+ 0,18
	J K = 0,8398	J = 69,95	69,71	— 0,24
	0,9180	K = 26,00		
		100,00		
	(Tl J = 1,668; Ag Cl = 0,157)			
I.	K Cl = 0,35	Cl = 15,53	15,93	+ 0,40
	K J = 0,7215	J = 51,51	51,31	— 1,20
		K = 32,96	(in der Wärme gefällt)	
		100,00		

			berechnet	gefunden	Untersch.
II.	KCl = 0,683 gr	Cl	26,22	25,99	— 0,23
	KJ = 0.556	J	34,34	33,90	— 0,44
	1,239	K	39,44		
			100,00		
III.	KCl = 0,6185 gr	Cl	43.70	43,08	— 0,62
	KJ = 0.055	J	6,25	5,69	— 0,56
	0,6735	K	50,05		
			100,00		
IV.	KCl = 0,6745 gr	Cl	45,53	45,44	— 0,09
	KJ = 0,0305	J	3,31	2,99	— 0,32
	0,7050	K	51,16		
			100,00		
V.	KCl = 0,972 gr	Cl	45,82	45,67	— 0,15
	KJ = 0,0375	J	2,84	2,52	— 0,32
	1,0095	K	51,34		
			100,00		
VI.	KCl = 0,123 gr	Cl	3,48	3,60	+ 0,12
	KJ = 1,5565	J	70,86	70,77	— 0,09
	1,6795	K	25,66		
			100,00		
VII.	KCl = 0,049 gr	Cl	1,99	2,41	+ 0,42
	KJ = 1,110	J	73,25	72,83	— 0,42
	1,159	K	44,76		
			100,00		
VIII.	KCl = 0,768 gr	Cl	46,60	46,62	+ 0,02
	KJ = 0,0162	J	1,58	1,18	— 0,40
		K	51,82		
			100,00		

Da das Thallium jetzt ziemlich leicht und reichlich zu haben ist so glaube ich, dass die Anwendung dieses einfachen Verfahrens nicht an Thalliummangel scheitern wird. Das Thallium kann natürlich zum grössten Theil aus dem Tl J und Tl Cl sehr leicht wiedergewonnen werden [1]).

Ueber das von Helmholtz vorgeschlagene Gesetz der electrodynamischen Wechselwirkungen

von **Eduard Riecke**

(vorgelegt von Wilhelm Weber).

Ausgehend von dem von Ampère aufgestellten Gesetz der Wechselwirkung zweier konstanter Stromelemente hat Weber ein allgemeines Grundgesetz der Wechselwirkung elektrischer Massen gegeben, welches die Erscheinungen der Elektrostatik und der Elektrodynamik gleichmässig umfasst; er hat ferner gezeigt, dass dieses Grundgesetz auch hinführt zu Elementargesetzen für die Erscheinungen der Induktion, und dass diese Elementargesetze auf geschlossene Ströme angewandt zu Resultaten führen, welche mit den experimentellen Thatsachen vollständig im Einklange stehen.

Wenn man dagegen als die einzige experimentell sicher festgelegte Grundlage der For-

1) Aus dem Chlorür lässt sich das Thallium leicht durch Zusammenschmelzen mit Soda und Kohle reducirt erhalten. W.

schung die für die Wechselwirkung geschlossener Ströme geltenden Gesetze betrachtet, so sieht man sich, was die Ermittelung der Elementargesetze betrifft, auf einen Weg gedrängt, welcher von dem von Weber eingeschlagenen vollständig verschieden ist. Es handelt sich dann um die Lösung der Aufgabe aus den bekannten Gesetzen der Wechselwirkung geschlossener Ströme einen Schluss rückwärts zu machen auf die Gesetze der Elementarwirkungen. Das von Weber gegebene System von Elementarwirkungen in Verbindung mit dem Ampère'schen Gesetz würde eine Lösung dieser Aufgabe repräsentiren; es ist aber bekannt, dass diese Lösung nicht die einzige ist, sondern dass die Aufgabe noch auf unendlich viele andere Arten gelöst werden kann.

Ein durch seine Einfachheit sich auszeichnender Weg ist es, den Helmholtz (Borchardts Journal Band 72) zur Lösung der Aufgabe eingeschlagen hat. Er macht die Hypothese, dass der formale Zusammenhang, welcher durch die Neumann'schen Gesetze zwischen den Theorieen der Elektrodynamik und der Induktion hergestellt ist, sich unmittelbar übertrage auf die einzelnen Stromelemente, auch wenn diese nicht einem geschlossenen Stromkreise angehören. Indem er gleichzeitig für das Potential zweier geschlossener Ströme auf einander einen gewissen Ausdruck von allgemeiner Form aufstellt, gelangt er für die Wechselwirkung zweier Stromelemente zu folgendem Gesetz:

Zwei Stromelemente ids und $i_1 ds_1$ üben auf einander eine Wirkung aus, welche bestimmt ist durch das Potential:

$$\Pi = -A^2 i ds i_1 ds_1 \left\{ \frac{1+k}{2} \frac{\cos\varepsilon}{r} + \frac{1-k}{2} \frac{\cos\vartheta \cos\vartheta_1}{r} \right\}$$

wo ε den Winkel, welchen die beiden Stromelemente mit einander einschliessen, ϑ und ϑ_1 die Winkel derselben mit der Entfernung r bezeichnen, und wo k eine Constante von unbekanntem Werthe bezeichnet.

Sind also x, y, z die Coordinaten des beweglichen Elementes ds_1, so sind die Componenten der auf dasselbe ausgeübten translatorischen Kraft

$$X = -\frac{d\Pi}{dx},\ Y = -\frac{d\Pi}{dy},\ Z = -\frac{d\Pi}{dz}.$$

Denken wir uns ferner das bewegliche Element drehbar um eine feste Axe, und bezeichnen wir durch φ den Drehungswinkel, so wird das feste Element auf das bewegliche ein Drehungsmoment ausüben, welches gegeben ist durch

$$\Delta = -\frac{d\Pi}{d\varphi}.$$

Bezeichnen wir die Coordinaten der Anfangspunkte der Elemente ds und ds_1 durch x, y, z und x_1, y_1 z_1 ihre Richtungscosinusse durch u, v, w und u_1, v_1, w_1, so können wir das Potential auf die Form bringen

$$\Pi = -A^2 i\, ds\, i_1\, ds_1$$

$$\cdot \left\{ \begin{array}{l} \frac{1+k}{2} \cdot \frac{u u_1 + v v_1 + w w_1}{r} \\ + \frac{1-k}{2} \cdot \frac{((x-x_1) u_1 + \ldots)((x-x_1) u \ldots)}{r^3} \end{array} \right\}$$

Es ergeben sich dann für die Componenten der translatorischen Kraft, welche von dem Element $i_1\,ds_1$ auf das Element $i\,ds$ ausgeübt wird, die Werthe:

$$X = -A^2 i i_1\, ds\, ds_1 \left\{ \frac{1+k}{2} \frac{\cos\varepsilon}{r^2} + 3 \frac{1-k}{2} \frac{\cos\vartheta \cos\vartheta_1}{r^2} \right\} \alpha$$

$$+ A^2 i i_1\, ds\, ds_1 \frac{1-k}{2} \frac{\cos\vartheta}{r^2} u_1 + A^2 i i_1\, ds\, ds_1 \frac{1-k}{2} \frac{\cos\vartheta_1}{r^2} u$$

$$Y = -A^2 i i_1\, ds\, ds_1 \left\{ \frac{1+k}{2} \frac{\cos\varepsilon}{r^2} + 3 \frac{1-k}{2} \frac{\cos\vartheta \cos\vartheta_1}{r^2} \right\} \beta$$

$$+ A^2 i i_1\, ds\, ds_1 \frac{1-k}{2} \frac{\cos\vartheta}{r^2} v_1 + A^2 i i_1\, ds\, ds_1 \frac{1-k}{2} \frac{\cos\vartheta_1}{r^2} . v$$

$$Z = -A^2 i i_1\, ds\, ds_1 \left\{ \frac{1+k}{2} . \frac{\cos\varepsilon}{r^2} + 3 \frac{1-k}{2} \frac{\cos\vartheta \cos\vartheta_1}{r^2} \right\} \gamma$$

$$+ A^2 i i_1\, ds\, ds_1 \frac{1-k}{2} \frac{\cos\vartheta}{r^2} w_1 + A^2 i i_1\, ds\, ds_1 \frac{1-k}{2} \frac{\cos\vartheta_1}{r^2} w$$

wo unter α, β, γ die Richtungscosinusse der Entfernung r zu verstehen sind.

Aus der Form dieser Ausdrücke ergiebt sich sofort, dass die Gesammtwirkung, welche das Element ds_1 auf das Element ds ausübt, von der Richtung der Verbindungslinie abweicht, also keine anziehende oder abstossende ist, wie nach der Ampèreschen Hypothese.

Ein zweiter wesentlicher Unterschied in der Wechselwirkung zweier Stromelemente nach Ampère oder nach Helmholtz würde ferner dadurch begründet sein, dass nach Helmholtz die Wirkung zweier Stromelemente aufeinander

nicht blos eine translatorische, sondern auch eine rotatorische sein müsste.

Die Entscheidung der zwischen dem von Helmholtz proponirten Gesetz und dem Ampèreschen bestehenden Alternative gewinnt eine erhöhte Bedeutung durch folgenden Umstand. Helmholtz hat gezeigt, dass das von ihm aufgestellte Potentialgesetz das allgemeinste ist, welches man aufstellen kann, wenn man die Anforderung stellt, dass die Wirkung ungeschlossener Ströme in die Ferne keiner anderen Funktion der Entfernung proportional sei, als die aller anderen elektrischen Wirkungen. Sollte sich also zeigen, dass die Resultate der experimentellen Forschung mit dem Helmholtzschen Gesetze nicht in Uebereinstimmung stehen, so würde dadurch bewiesen sein, dass die Wirkung zweier Stromelemente überhaupt kein Potential besitzt. Allerdings würde daraus noch nicht folgen, dass das Ampèresche Gesetz das den Erscheinungen einzig entsprechende ist, es wären vielmehr immer noch unendlich viele solche Gesetze denkbar, welchen aber allen der Umstand gemeinsam wäre, dass nach denselben zwei Stromelemente auf einander kein Potential besitzen würden.

An eine Entscheidung zwischen den beiden Gesetzen kann natürlich nur gedacht werden, wenn wir die Wechselwirkungen ungeschlossener Ströme, oder die Wechselwirkungen von beweglichen Theilen geschlossener Ströme betrachten, wie diess in den von Ampère beschriebenen Experimenten der Fall ist. Sollte auf diesem Wege eine Entscheidung der Alternative versucht werden, so wird man zunächst auf Grund der beiden einander gegenüberstehenden Gesetze die Verhältnisse für die experimentelle

Forschung so zu wählen haben, dass der Erfolg derselben ein möglichst entscheidender wird.

Eine wesentliche Verschiedenheit in den aus beiden Gesetzen fliessenden Consequenzen tritt nun hervor in der Wirkung eines geschlossenen Stromes auf ein Stromelement.

Das Potential zweier Stromelemente auf einander lässt sich mit Hülfe der bekannten Formeln

$$\frac{\delta r}{\delta s} = \cos \vartheta \text{ und } \frac{\delta r}{\delta s_1} = -\cos \vartheta_1$$

$$\frac{\delta r}{\delta s} \cdot \frac{\delta r}{\delta s_1} + r \frac{\delta^2 r}{\delta s \, \delta s_1} = -\cos \varepsilon$$

auf die Form bringen:

$$\Pi = A^2 i i_1 \, ds \, ds_1 \left\{ \frac{1}{r} \cdot \frac{\delta r}{\delta s} \cdot \frac{\delta r}{\delta s_1} + \frac{1+k}{2} \frac{\delta^2 r}{\delta s \, \delta s_1} \right\}.$$

Gehört das Element ds_1 einem geschlossenen Strome an, so wird das Potential dieses geschlossenen Stromes auf das Stromelement $i\,ds$ repräsentirt sein durch das über alle Elemente ds_1 hinerstreckte Integral

$$A^2 i \, ds \, i_1 \int ds_1 \left\{ \frac{1}{r} \cdot \frac{\delta r}{\delta s} \cdot \frac{\delta r}{\delta s_1} + \frac{1+k}{2} \cdot \frac{\delta^2 r}{\delta s \, \delta s_1} \right\}$$

Der von dem zweiten Terme des in der Klammer stehenden Ausdruckes herrührende Theil des Intregals verschwindet und wir erhalten für dasselbe den Werth

$$A^2 i \, ds \, i_1 \int ds_1 \frac{1}{r} \cdot \frac{\delta r}{\delta s} \cdot \frac{\delta r}{\delta s_1}$$

oder

$$-A^2 i\,ds\,i_1 \int \frac{\cos\vartheta \cos\vartheta_1}{r} ds_1$$

wofür wir auch setzen können:

$$-A^2 i\,ds\,i_1 \int \frac{\cos\varepsilon}{r} ds.$$

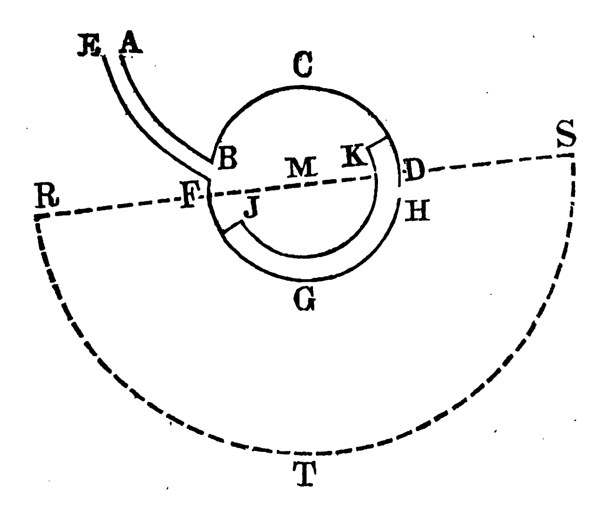
Wir sehen, was sich von vornherein erwarten liess, dass das Potential eines geschlossenen Stromes auf ein Stromelement unabhängig ist von der Constanten k. Ausserdem ergeben sich aber aus der Form dieses Potentiales zwei wichtige Folgerungen.

1. Bei Zugrundlegung des Helmholtzschen Gesetzes kann die Wirkung eines geschlossenen Stromes auf ein Stromelement nicht ersetzt werden durch die Wirkung einer magnetischen Doppelfläche.

2. Zufolge dem Helmholtzschen Gesetze steht die Wirkung eines geschlossenen Stromes auf ein Stromelement nicht senkrecht auf der Richtung des letzteren.

Das Helmholtzsche Gesetz ist somit nicht verträglich mit dem bekannten Ampèreschen Experimente, und es würde die Alternative dadurch zu Ungunsten des Helmholtzschen Gesetzes entschieden sein, wenn nicht gegen die Ausführung dieses Experimentes gegründete Bedenken vorliegen würden. Jedenfalls aber würde durch eine Wiederholung des Ampèreschen Experimentes eine Entscheidung der Alternative herbeigeführt werden können, wenn diese unter

Verhältnissen ausgeführt würde, welche eine genaue Vorausbestimmung der zu erwartenden Wirkungen gestatten. Es scheint sich zu diesem Zwecke eine Anordnung zu empfehlen, deren Grundlinien im folgenden angedeutet werden mögen.



ABCD und *EFGH* bezeichnen zwei von den Polen einer galvanischen Säule kommende Dräthe, deren Endstücke *BCD* und *FGH* halbkreisförmig gebogen sind, so dass die Leitung zwischen *D* und *H* unterbrochen ist. Die Leitung wird geschlossen durch einen Halbkreis *KJ*, welcher um den Mittelpunkt *M* frei drehbar ist und mit den Leiterstücken *BCD* und *FGH* durch Gleitstellen bei *K* uud *J* in Verbindung steht. Gegenstand der Beobachtung wird dann die

Wirkung sein, welche von einem geschlossenen Stromkreis auf den drehbaren Bogen *KJ* ausgeübt wird. Diesem geschlossenen Strome wird man zweckmässig die Form eines geschlossenen Halbkreises *RST* geben, dessen Mittelpunkt mit *M* zusammenfällt.

Nach dem Helmholtzschen Gesetze würde dann der bewegliche Halbkreis *JK* im Gleichgewicht sein, sobald der Durchmesser *RS* zusammenfällt mit dem Durchmesser *JK*. Nach dem Ampèreschen Gesetze dagegen müsste Gleichgewicht stattfinden bei jeder beliebigen Stellung des Bogens *JK* gegen den geschlossenen Strom *RST*.

Hr. Clebsch legte zwei Modelle vor, welche Hr. stud. Weiler hierselbst dargestellt hatte, und welche sich auf eine besondere Classe von Flächen dritter Ordnung beziehen. In No. 12 der Nachrichten von 1871 wurde als Diagonalfläche diejenige Fläche dritter Ordnung bezeichnet, welche durch die Diagonalen aller Vierseite geht, die auf den Ebenen eines Pentaeders jedesmal von den vier andern ausgeschnitten werden. Das eine der beiden Modelle stellte die 27 Geraden dieser Fläche dar, das andere die Fläche selbst, ein Gypsmodell, auf welchen die 27 Geraden gezeichnet waren. Die Geraden der Fläche theilen sich in 15 und 12, von denen erstere die oben angegebenen Diagonalen sind, während die 12 andern eine durch sie bebestimmte Doppelsechs bilden. Das Pentaeder war so gewählt, dass zunächst ein steiles Tetraeder mit horizontaler Basis gebildet war, welches durch eine Drehung von 120° um eine

Verticalaxe in sich selbst überging; die fünfte Ebene war die Basis parallel gelegt, und gleichweit von der Spitze wie von der Basis entfernt. Bei dieser Einrichtung, welche im projectivischen Sinne keine Besonderheiten enthält, war es leicht, eine Uebersicht der Gestalt der Fläche und ihrer Geraden zu gewinnen: die bemerkenswerthen Theile derselben liegen in einem nicht zu grossen Raume, und waren so weit fortgesetzt, dass die sattelförmigen Theile, mit welchen die Fläche sich ins Unendliche erstreckt, der Vorstellung keine weitern Schwierigkeiten boten.

Für die gestaltliche Auffassung der Flächen dritter Ordnung im Allgemeinen bietet diese Fläche insofern eine nicht zu unterschätzende Anleitung, als die Besonderheiten derselben gestaltlich schwach ausgeprägt erscheinen, und man durch eine fast unmerkliche Verzerrung der Fläche dieselbe in eine allgemeine Fläche dritter Ordnung überführt. Es mag insbesondere noch bemerkt sein, dass, wie bei dem schönen Wiener'schen Modelle der allgemeinen Fläche dritter Ordnung zwei, so hier drei Durchgänge erschienen, welche vermöge der Anordnung des Ganzen symmetrisch vertheilt sind.

Im Anschlusse hieran legte Herr Klein ein Modell einer Fläche dritter Ordnung mit 4 reellen Knotenpuncten vor, das Herr Dr. Neesen ausgeführt hatte. Dem von den Knotenpuncten gebildeten Tetraeder ist eine symmetrische Gestalt gegeben, die gleichseitige Grundfläche ist horizontal gestellt. Unterhalb der letzteren, etwa in dem Abstande der Höhe des Tetraeders, befindet sich ebenfalls horizontal die Ebene der 3 auf der Fläche ausser den Tetraederkanten verlaufenden Geraden. Die Fläche besteht aus einem überall elliptisch gekrümmten, endlichen

Theile, der das von den 4 Knoten begränzte Tetraeder ausfüllt, und aus einem, sich in's Unendliche erstreckenden, hyperbolisch gekrümmten Theile. Letzterer wird durch's Unendliche in zwei Partieen zerlegt; in einen Kegel, der sich oberhalb des höchstgelegenen Knotenpunctes erhebt, und in ein sich wesentlich horizontal ausbreitendes Flächenstück, das sich an die drei in der Grundfläche des Tetraeder's gelegenen Knoten hinanhebt, von ihnen ab sich in der Mitte in's Unendliche trichterartig hinabsenkt, und dadurch die Vereinigung mit dem nach oben gehenden Kegel herstellt.

Da eine Fläche mit 4 Knoten keine absolute Invariante hat, so lassen sich aus der vorliegenden alle anderen mit 4 reellen Knoten durch reelle Collineation ableiten. Hinsichtlich des Verhaltens im Unendlichen muss man dabei fünf Haupttypen unterscheiden. Deformirt man eine solche Fläche im Endlichen durch stetige Processe, wobei die in einem Knotenpuncte an einander stossenden Theile sich entweder vereinigen oder sich vollends trennen können, so erhält man schematisch die Gestalten anderer Flächen dritten Grades. Man beweist, dass man alle Flächen dritten Grades auf diese Weise erzeugen kann, so dass man auf diesem Wege eine vollständige Uebersicht der bei Flächen dritten Grades überhaupt möglichen Gestalten erhält.

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

21. August. №. 21. 1872.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Zur Theorie der vollständigen Lösungen und der Transformation der partiellen Differentialgleichungen 1. O.

von A. Mayer in Leipzig.

Aus einem Schreiben an A. Clebsch.

Mit der Transformation der canonischen Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen hängt eng zusammen die Transformation der partiellen Differentialgleichungen 1. O., sowie die Aufgabe, aus einer vollständigen Lösung einer solchen Gleichung beliebige andere vollständige Lösungen derselben abzuleiten. Jacobi, dem man die Kenntniss dieses Zusammenhanges wie überhaupt der betreffenden Probleme selbst verdankt, entnimmt sogar in seiner grossen Abhandlung „Nova methodus etc.“ (Crelle J. 60) an verschiedenen Stellen (Vgl. bes. p. 125 u. p. 129) Sätzen über die Transformation der partiellen Differentialgleichungen und über die Bildung neuer vollständiger Lösungen direkt die Lösung des Problemes, eine canonische Form in eine andere zu transformi-

ren, und ähnliche Schlüsse finden sich mehrfach auch in den „Vorlesungen über Dynamik" (z. B. p. 286 u. p. 446). Fasst man aber diese einander correspondirenden Sätze über partielle und über gewöhnliche Differentialgleichungen näher ins Auge, so zeigt sich die merkwürdige Erscheinung, dass die einen von einer ganz anderen Tragweite sind als die anderen. Während nämlich die abgeleiteten, auf gewöhnliche Differentialgleichungen sich beziehenden Sätze (die allerdings auch noch auf anderm Wege bewiesen werden) eine vollkommen allgemeine Gültigkeit besitzen, ist dies für die ursprünglichen Sätze über partielle Differentialgleichungen ganz und gar nicht der Fall.

In der That erkennt man leicht, dass weder die Regeln, die in den „Vorlesungen" p. 491 zur Ableitung neuer vollständiger Lösungen gegeben werden, immer zum Ziele führen, noch auch durch das Theorema VIII in §. 57 der Nova methodus eine allgemeine Lösung der Aufgabe geliefert wird, aus der vollständigen Lösung einer der beiden dort betrachteten partiellen Differentialgleichungen eine vollständige Lösung der andern zu finden. Es können vielmehr, hier wie dort, vielfache und, was das Misslichste ist, nicht im Voraus angebbare Ausnahmefälle eintreten, in denen die genannten Regeln dadurch illusorisch werden, dass die Bestimmung der Unbekannten aus den betreffenden Gleichungen unmöglich wird.

Bei einer früheren Arbeit [1]) nun hatte ich mehrere Sätze über die Bestimmung der Lösung einer partiellen Differentialgleichung 1. O. durch Grenzbedingungen gefunden, die mir da-

1) Mathem. Annalen III p. 435.

mals nur als direkte Verbindungsglieder zwischen der modificirten Jacobi-Hamilton'schen und der Cauchy'schen Integrationsmethode der partiellen Differentialgleichungen 1. O. interessant waren. Durch näheres Studium der Jacobi'schen Abhandlung „Ueber die vollständigen Lösungen einer partiellen Differentialgleichung 1. O." vor Kurzem wieder darauf zurückgeführt, bemerkte ich, dass diese Sätze noch in anderer Hinsicht von Wichtigkeit sind, indem sie nämlich nicht nur die Aufgabe, aus einer gegebenen vollständigen Lösung jede andere abzuleiten, vollständig lösen, sondern auch bei weiterer Verfolgung zu einer allgemeinen Lösung der in dem oben genannten Theorem VIII enthaltenen Transformationsaufgabe, sowie zu Ausdehnungen derselben führen. Ich erlaube mir, Ihnen in den folgenden Sätzen die hauptsächlichsten Resultate dieser Untersuchung vorzulegen und bemerke vorher nur noch, dass auch Jacobi selbst jene Transformation verallgemeinert hat in §. 61 der Nova methodus und hiermit übereinstimmend in p. 469 der „Vorlesungen". Es ist mir aber bis jetzt nicht gelungen, auch bei diesen allgemeineren Umformungen die fundamentale Aufgabe befriedigend zu lösen, wie aus der vollständigen Lösung der transformirten Gleichung eine vollständige Lösung der ursprünglichen Gleichung erhalten werden kann, ja es scheint mir sogar höchst wahrscheinlich, dass ohne gewisse Beschränkungen hier die gegebene und die transformirte Gleichung überhaupt in gar keinem legitimen Zusammenhange mehr stehen. —

1. Satz. „Es sei:

$$V = f(t q_1 \ldots q_m c_1 \ldots c_m)\,^{*)}$$

die vollständige Lösung einer gegebenen partiellen Differentialgleichung 1. O. zwischen der unbekannten Function V und den unabhängigen Variabeln $t q_1 \ldots q_m$, die V selbst nicht enthält, und a irgend ein solcher Werth von t, für den die partiellen Differentialquotienten von f nach $q_1 \ldots q_m$ noch unabhängige Functionen der willkürlichen Constanten $c_1 \ldots c_m$ bleiben. Wählt man dann willkürlich eine Function

$$\varphi_a = \varphi(a a_1 \ldots a_m b_1 \ldots b_m),$$

deren partielle Differentialquotienten nach $a_1 \ldots a_m$ unabhängige Functionen von $b_1 \ldots b_m$ sind, und setzt

$$f_a = f(a a_1 \ldots a_m c_1 \ldots c_m),$$

so bestimmen die $2m$ Gleichungen

$$\frac{df}{dc_k} = \frac{df_a}{dc_k}, \quad \frac{d\varphi_a}{da_k} = \frac{df_a}{da_k}$$

stets die $2m$ Grössen $a_1 \ldots a_m c_1 \ldots c_m$ als Functionen von $t q_1 \ldots q_m b_1 \ldots b_m$, und man erhält durch Substitution ihrer Werthe in

*) Ich habe die additive willkürliche Constante, die man, sobald die partielle Differentialgleichung die gesuchte Function selbst nicht enthält, der Lösung eigentlich noch hinzufügen muss, der Kürze wegen im Folgenden überall weggelassen.

$$V = f - f_a + \varphi_a$$

eine neue vollständige Lösung der gegebenen partiellen Differentialgleichung. Diese Lösung, deren willkürliche Constanten $b_1 \ldots b_m$ sind, reducirt sich für $t = a$ auf:

$$V = \varphi(a q_1 \ldots q_m b_1 \ldots b_m)." —$$

Dieser Satz gewährt das Mittel, aus irgend einer bekannten vollständigen Lösung der gegebenen Gleichung jede andere vollständige Lösung derselben abzuleiten. Um von der vollständigen Lösung $V = f$ zu einer zweiten gegebenen vollständigen Lösung $v = \psi(t q_1 \ldots q_m b_1 \ldots b_m')$ zu gelangen, braucht man in demselben nur

$$\varphi_a = \psi(a a_1 \ldots a_m b_1 \ldots b_m)$$

zu nehmen.

Es ergiebt sich aus ihm zugleich noch eine neue Art, um eine canonische Form in eine andere zu transformiren, welche das Theorema IXa §. 58 der Nova methodus als speciellen Fall enthält.

Der Satz 1. selbst ist wieder nur ein specieller Fall des folgenden:

2. Satz. „Wenn

$$V = f(t q_1 \ldots q_m c c_1 \ldots c_m)$$

die vollständige Lösung einer gegebenen partiellen Differentialgleichung 1. O. zwischen V

und den unabhängigen Variabeln $t\, q_1 \ldots q_m$ ist, wenn ferner a irgend einen solchen constanten Werth von t bedeutet, für den die Ausdrücke

$$f,\ \frac{df}{dq_1}, \ldots \frac{df}{dq_m}$$

noch unabhängige Functionen der Integrationsconstanten $c\, c_1 \ldots c_m$ bleiben, und endlich

$$\varphi_a = \varphi\,(a\, a_1 \ldots a_m\, b\, b_1 \ldots b_m)$$

eine willkürlich gewählte Function ist, für welche

$$\varphi_a, \frac{d\varphi_a}{da_1}, \ldots \frac{d\varphi_a}{da_m}$$

unabhängige Functionen von $b\, b_1 \ldots b_m$ sind, so bestimmen die $2m+1$ Gleichungen:

$$\frac{\frac{df}{dc_k}}{\frac{df}{dc}} = \frac{\frac{df_a}{dc_k}}{\frac{df_a}{dc}},\ \frac{df_a}{da_k} = \frac{d\varphi_a}{d\ddot{a}_k},\ f_a = \varphi_a,$$

in denen

$$f_a = f\,(a\, a_1 \ldots a_{m\,c1}\, c \ldots c_m)$$

ist, stets die $2m+1$ Grössen $a_1 \ldots a_m\, c\, c_1 \ldots c_m$

als Functionen von $t\, q_1 \ldots q_m\, b\, b_1 \ldots b_m$, und durch Substitution dieser Werthe wird

$$V = f(t\, q_1 \ldots q_m\, c\, c_1 \ldots c_m)$$

eine neue vollständige Lösung der gegebenen partiellen Differentialgleichung. Diese Lösung, in der $b\, b_1 \ldots b_m$ die willkürlichen Constanten sind, erhält für $t = a$ den gegebenen Werth

$$V = \varphi\,(a\, q_1 \ldots q_m\, b\, b_1 \ldots q_m).\text{“} —$$

Um mittelst dieses Satzes von der gegebenen vollständigen Lösung $V = f$ zu einer zweiten gegebenen vollständigen Lösung

$$V = \psi\,(t\, q_1 \ldots q_m\, b\, b_1 \ldots q_m)$$

überzugehen, hat man nur nöthig in demselben

$$\varphi_a = \psi\,(a\, a_1 \ldots a_m\, b\, b_1 \ldots b_m)$$

zu nehmen.

Ist die vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung nicht explicite, sondern implicite durch eine Gleichung zwischen $V\, t\, q_1 \ldots q_m$ und willkürlichen Constanten gegeben, so hat man den Satz 2. zu ersetzen durch den

Satz 3. „Es werde durch die Gleichung

$$\psi\,(t\, q_1 \ldots q_m\, V\, c_1\, c_2 \ldots c_m) = \text{Const.}$$

die vollständige Lösung einer gegebenen par-

tiellen Differentialgleichung 1. O. zwischen V und den unabhängigen Variabeln $t\, q_1 \ldots q_m$ definirt, und es sei a irgend ein solcher constanter Werth von t, für welchen die Ausdrücke

$$\psi, \frac{d\psi}{dc_1}, \ldots \frac{d\psi}{dc_m}$$

noch unabhängig von einander in Bezug auf $q_1 \ldots q_m$ und V bleiben. Wählt man dann eine Function

$$\varphi_a = \varphi(a\, a_1 \ldots a_m\, A\, b_1 \ldots b_m)$$

willkürlich, jedoch so, dass

$$\varphi_a, \frac{d\varphi_a}{db_1}, \ldots \frac{d\varphi_a}{db_m}$$

unabhängige Functionen von $A\, a_1 \ldots a_m$ sind, so bilden die $2m+1$ Gleichungen

$$\frac{\frac{d\psi_a}{da_k}}{\frac{d\psi_a}{dA}} = \frac{\frac{d\varphi_a}{da_k}}{\frac{d\varphi_a}{dA}}, \quad \frac{d\psi_a}{dc_k} = \frac{d\psi}{dc_k}, \quad \psi_a = \psi$$

ein System, welches die $2m+1$ Unbekannten $A\, a_1 \ldots a_m\, c_1 \ldots c_m$ vollständig bestimmt durch

$t q_1 \dots q_m V b_1 \dots b_m$. Hat man diese Bestimmung ausgeführt und durch Substitution der erhaltenen Werthe die Gleichung

$$\varphi_a = \text{const.}$$

ausgedrückt in $t q_1 \dots q_m V$ und den willkürlichen Constanten $b_1 \dots b_m$, so definirt diese Gleichung, die sich für $t = a$ auf

$$\varphi(a q_1 \dots q_m V b_1 \dots b_m) = \text{const.}$$

reducirt, eine neue vollständige Lösung der gegebenen partiellen Differentialgleichung.“ —

Wenn man in den obigen Sätzen den constanten Werth a von t unbestimmt lässt, so enthalten die durch diese Sätze gelieferten, neuen vollständigen Lösungen sämmtlich eine überflüssige willkürliche Constante. Nach einem bekannten Satze Jacobi's muss daher jede derselben ausser der gegebenen noch einer zweiten partiellen Differentialgleichung genügen, die frei ist von den unabhängigen Variabeln der gegebenen Gleichung und in der als unabhängige Variable die willkürlichen Constanten der betreffenden Lösung auftreten. Indem man diese zweiten partiellen Differentialgleichungen aufsucht, gelangt man bei veränderter Bezeichnung zu den folgenden beiden Sätzen über Transformation der partiellen Differentialgleichungen, von denen der erste den wahren Zusammenhang zwischen den beiden partiellen Differentialgleichungen angiebt, die Jacobi im Theorem VIII betrachtet, und der zweite dieselbe Transformation ausdehnt auf den Fall, wo

die gegebene partielle Differentialgleichung die unbekannte Function selbst enthält.

Satz 4. „Es sei:

$$\varphi = \varphi(t\, q_1 \ldots q_m\, x_1 \ldots x_m)$$

eine willkürlich gewählte Function, deren partielle Differentialquotienten nach $x_1 \ldots x_m$ unabhängige Functionen von $q_1 \ldots q_m$ sind, sodass die m Substitutionen

$$\frac{d\varphi}{d x_k} = \frac{dW}{dx_k}$$

die m Unbekannten $q_1 \ldots q_m$ als Functionen von

$$t\, x_1 \ldots x_m\, \frac{dW}{dx_1} \ldots \frac{dW}{d x_m}$$

vollständig definiren. Wenn dann durch diese Substitutionen:

$$\frac{d\varphi}{dt} + H\left(t\, q_1 \ldots q_m\, \frac{d\varphi}{dq_1} \ldots \frac{d\varphi}{d q_m}\right)$$

$$= - F\left(t\, x_1 \ldots x_m\, \frac{dW}{dx_1} \ldots \frac{dW}{d x_m}\right)$$

wird, so lassen sich die beiden partiellen Differentialgleichungen:

$$1)\quad \frac{dV}{dt} + H\left(t\, q_1 \ldots q_m\, \frac{dV}{dq_1} \ldots \frac{dV}{d q_m}\right) = o,$$

$$2)\quad \frac{dW}{dt} + F\left(t\, x_1 \ldots x_m \frac{dW}{dx_1} \ldots \frac{dW}{dx_m}\right) = o$$

gegenseitig in folgender Art auf einander zurückführen:

Aus einer vollständigen Lösung

$$V = f(t\, q_1 \ldots q_m\, c_1 \ldots c_m)$$

der Gleichung 1) erhält man eine vollständige Lösung W der Gleichung 2) durch die Formel:

$$W = f_a - f + \varphi,$$

wenn man in dieser $q_1 \ldots q_m\, c_1 \ldots c_m$ mittelst der $2m$ Gleichungen:

$$\frac{df}{dq_k} = \frac{d\varphi}{dq_k},\ \frac{df}{dc_k} = \frac{df_a}{dc_k}$$

durch $t\, x_1 \ldots x_m$ und die willkürlichen Constanten $a_1 \ldots a_m$ ausdrückt.

Umgekehrt geht aus einer beliebigen vollständigen Lösung

$$W = \psi\,(t\, x_1 \ldots x_m\, \gamma_1 \ldots \gamma_m)$$

der Gleichung 2) eine vollständige Lösung V der Gleichung 1) dadurch hervor, dass man den Ausdruck

$$V = \psi_a - \psi + \varphi$$

mit Hülfe der $2m$ Gleichungen

$$\frac{d\psi}{dx_k} = \frac{d\varphi}{dx_k}, \quad \frac{d\psi}{d\gamma_k} = \frac{d\psi_a}{d\gamma_k}$$

als Function von $t q_1 \ldots q_m$ und von den willkürlichen Constanten $a_1 \ldots a_m$ berechnet. Hierbei haben f_a und ψ_a resp. die Bedeutung

$$f_a = f(a\, a_1 \ldots a_m\, c_1 \ldots c_m),$$

$$\varphi_a = \psi(a\, a_1 \ldots a_m\, \gamma_1 \ldots \gamma_m)$$

und für a ist irgend ein solcher constanter Werth von t zu nehmen, für welchen die Ausdrücke

$$\frac{df}{dq_1}, \ldots \frac{df}{dq_m},$$

$$\frac{d\psi}{dx_1}, \ldots \frac{d\psi}{dx_m},$$

und

$$\frac{d\varphi}{dq_1}, \ldots \frac{d\varphi}{dq_m}$$

noch respective unabhängige Functionen von

$$c_1 \ldots c_m$$

$$\gamma_1 \ldots \gamma_m$$

und $$x_1 \ldots . x_m$$

bleiben. Die auf die angegebene Weise erhaltenen Lösungen W und V haben die Eigenschaft, für $t = a$ sich respective auf

$$W = \varphi(a\, a_1 \ldots a_m x_1 \ldots x_m)$$

und $$V = \varphi(a\, q_1 \ldots q_m\, a_1 \ldots a_m)$$

zu reduciren." —

Satz 5. „Wenn durch die m Substitutionen

$$\frac{\frac{d\varphi}{dx_k}}{\frac{d\varphi}{dW}} = -\frac{dx_k}{dW},$$

in denen

$$\varphi = \varphi(t\, q_1 \ldots q_m\, W x_1 \ldots x_m)$$

eine beliebig gewählte Function ist, für welche nur die Ausdrücke

$$\varphi, \frac{d\varphi}{dq_1}, \ldots \frac{d\varphi}{dq_m}$$

unabhängige Functionen von $W x_1 \ldots x_m$ sein müssen:

$$\frac{1}{\frac{d\varphi}{dW}}\left\{\frac{d\varphi}{dt} + H\left(t\, q_1 \ldots q_m\, \varphi\, \frac{d\varphi}{dq_1} \ldots \frac{d\varphi}{dq_m}\right)\right\}$$

$$=F(t\,x_1 \ldots x_m\, W \frac{dW}{dx_1} \ldots \frac{dW}{dx_m})$$

wird, so kann man die beiden partiellen Differentialgleichungen:

$$1) \quad \frac{dV}{dt} + H(t\,q_1 \ldots q_m\, V \frac{dV}{dq_1} \ldots \frac{dV}{dq_m}) = 0$$

$$2) \quad \frac{dW}{dt} + F(t\,x_1 \ldots x_m\, W \frac{dW}{dx_1} \ldots \frac{dW}{dx_m}) = 0$$

gegenseitig in folgender Art auf einander zurückführen:

Aus einer vollständigen Lösung

$$V = f(t\,q_1 \ldots q_m\, c\, c_1 \ldots c_m)$$

der Gleichung 1) erhält man eine vollständige Lösung W der Gleichung 2), indem man aus den $2m+2$ Gleichungen:

$$\frac{\frac{df}{dc_k}}{\frac{df}{dc}} = \frac{\frac{df_a}{dc_k}}{\frac{df_a}{dc}}, \quad \frac{df}{d\gamma_k} = \frac{d\varphi}{d_{\gamma k}},$$

$$f = \varphi, \; f_a = \gamma$$

die $2m+1$ Grössen $q_1 \ldots q_m\, c_1\, c \ldots c_m$ eliminirt und die hierdurch zwischen $W t\, x_1 \ldots x_m$ und

den willkürlichen Constanten $a_1 \ldots a_m$ und γ entstehende Gleichung nach W auflöst.

Umgekehrt, wenn die Gleichung

$$\psi(t x_1 \ldots x_m W \gamma_1 \ldots \gamma_m) = \text{Const.}$$

eine vollständige Lösung W der Gleichung 2) definirt, so geht aus der Function ψ eine vollständige Lösung V der Gleichung 1) dadurch hervor, dass man

$$V = \varphi$$

setzt und mittelst der $2m+1$ Gleichungen

$$\frac{\frac{d\psi}{dx_k}}{\frac{d\psi}{dW}} = \frac{\frac{d\varphi}{dx_k}}{\frac{d\varphi}{dW}}, \quad \frac{d\psi}{d\gamma_k} = \frac{d\psi_a}{d\gamma_k}, \quad \psi = \psi_a$$

die Function φ ausdrückt durch $t q_1 \ldots q_m$ und die willkürlichen Constanten $A a_1 \ldots a_m$. Hierbei haben f_a und ψ_a respective die Bedeutung

$$f_a = f(a a_1 \ldots a_m c c_1 \ldots c_m)$$

$$\psi_a = \psi(a a_1 \ldots a_m A \gamma_1 \ldots \gamma_m)$$

und a bedeutet irgend einen solchen constanten Werth von t, für welchen die Ausdrücke

$$f, \frac{df}{dq_1}, \ldots \frac{df}{dq_m}$$

noch unabhängige Functionen von $c c_1 \dots c_m$, und die Ausdrücke

$$\varphi, \frac{d\varphi}{dq_1}, \dots \frac{d\varphi}{dq_m}$$

sowie $$\psi, \frac{d\psi}{d\gamma_1}, \dots \frac{d\psi}{d\gamma_m}$$

unabhängige Functionen von $W x_1 \dots x_m$ bleiben. Die auf diese Weise erhaltenen vollständigen Lösungen der Gleichungen 2) und 1) besitzen überdies die Eigenschaft, dass, für $t = a$, die erstere der Gleichung

$$\varphi(a a_1 \dots a_m W x_1 \dots x_m) = \gamma$$

genügt und die letztere sich auf

$$V = \varphi(a q_1 \dots q_m A a_1 \dots a_m)$$

reducirt.“ —

Indem ich mir die nähere Begründung dieser Sätze für eine ausführlichere Veröffentlichung vorbehalte, bemerke ich mir, dass der Schwerpunkt der Beweise darin liegt, zu zeigen, dass die Gleichungen, mittelst deren in den obigen Sätzen eine gleiche Anzahl von Grössen aus einem gegebenen Ausdrucke zu eliminiren sind, stets für diese Grössen endliche und bestimmte Werthe ergeben müssen. Dies folgt aber unmittelbar daraus, dass, wie man leicht einsieht, diese Gleichungen die genannte Eigenschaft für den besonderen Werth a von t besitzen. —

Ueber die Umwandlung des Allylalkoholchlorürs in Dichlorhydrin.

Von G. Münder und B. Tollens.

Bekanntlich erhält man nach dem Berthelotschen Verfahren der Behandlung von Glycerin mit Eisessig und Salzsäure ein Dichlorhydrin, welches nicht constant siedet, sondern sich, wie der Eine von uns [1]), sowie Müller und Hübner [2]) zeigten, in zwei isomere Verbindungen zerlegen lässt, deren eine bei 174° siedet, während die andere bei 182° übergeht und für identisch mit dem Allylalkoholchlorid angesehen wird.

Andererseits ist bekannt, dass man durch Behandeln des rohen Dichlorhydrin mit Kali ein constant siedendes Epichlorhydrin und aus diesem mit Salzsäure ein einheitliches bei 174° siedendes Dichlorhydrin darstellt. Entweder verschwindet also bei dieser Umwandlung das bei 182° siedende Product, oder es wird in sein tiefer siedendes Isomeres verwandelt.

Ist die bei 182° siedende Fraction des Dichlorhydrin identisch mit dem bei 182° siedenden Allylalkoholchlorür, so muss auch dies letztere sich in sein niedriger siedendes Isomeres umwandeln lassen; und dies gelingt in der That mit Leichtigkeit. Reines Allylalkoholchlorür gab mit Kali bei 118—119° siedendes reines Epichlorhydrin, welches nach Siedepunkt und Analyse identisch mit dem gewöhnlichen war, und wie das letztere beim Zusammenbringen mit concentrirter Salzsäure eine bei 173—175° siedende Flüssigkeit gab, welche die Eigenschaften und die Zusammensetzung des gewöhnlichen

1) Zeitschr. f. Chemie 1869, 174.
2) Ann. Chem. Pharm. 159, 168.

Dichlorhydrin aus Glycerin zeigte. Es ist also aus dem bei 182° siedenden Product das bei 174° siedende entstanden.

Am besten wird dies durch folgende Gleichungen versinnlicht.

$$\left\{\begin{array}{l} CH^2\,Cl \\ CH\;\;Cl \\ CH^2\,OH \end{array}\right. \div H\,Cl = \left\{\begin{array}{l} CH^2\,Cl \\ \left.\begin{array}{l} CH \\ CH^2 \end{array}\right\} O \end{array}\right.$$

Allylalkoholchlorür (182^2) Epichlorhydrin

$$\left\{\begin{array}{l} CH^2\,Cl \\ \left.\begin{array}{l} CH \\ CH^2 \end{array}\right\} O \end{array}\right. + H\,Cl = \left\{\begin{array}{l} CH^2\,Cl \\ CH\,OH \\ CH^3\,Cl \end{array}\right.$$

Epichlorhydrin Dichlorhydrin (174°)

Die angewandten Formeln erklären vollkommen, dass das neu entstehende Product andere Eigenschaften besitzt, als das ursprünglich angewandte, denn die Siedepuncte werden durch die Stellung der Atomgruppen (Cl und OH) in der Weise beeinflusst, dass das eigentliche Dichlorhydrin niedriger sieden muss als das Allylalkoholchlorür [3]).

Es sind vor kurzem von Patzschke und von Watts Zweifel geäussert worden an der Beobachtung, dass das rohe Dichlorhydrin aus zwei Verbindungen besteht, indem sie nur das bei 174° siedende erhalten zu haben glauben. Obige Arbeit ist zwar keine positive Bestätigung der Existenz beider Isomeren, doch zeigt sie, dass das zweite höher siedende bei der gewöhnlichen Reinigung verschwinden und sein Isomeres liefern muss.

Vor kurzem hat Herr Joaquim dos Santos

3) Anm. Ein aus der Stellung im Innern der Kohlenstoffreihe nach Aussen tretendes Chloratom erhöht den Siedepunkt weniger als ein umgekehrt wanderndes Hydroxyl ihn erniedrigt, wie man z. B. an den Siedepunkten von Propyl- und Isopropylverbindungen sieht.

e Silva die Darstellung und Fractionirung des Berthelotschen Dichlorhydrin von neuem ausgeführt, und ist zum selben Resultat gelangt wie früher der eine von uns, nach 8 maligem Fractioniren betrug die Fraction 175—176° 1/2, 180—184° 1/3, während die Zwischenfractionen zusammen 1/6 ausmachten. Bei längerem Fractioniren verminderte sich die Fraction 180—184° allerdings, aber ohne dass sich 173—176° erheblich vermehrte, und wie uns schien war dies die Folge von Zersetzung der höher siedenden Fraction unter Bildung von Salzsäure und Condensationsproducten.

Ueber das Allylalkoholbromür und die Bibrompropionsäure.

Von Denselben.

Bisher war es nicht gelungen, aus Allylalkohol Acrylsäure zu erhalten, indem beim Behandeln des Allylalkohols mit oxydirenden Mitteln die letzteren ein Zerfallen des ganzen Molecüls veranlassen. Es war zu vermuthen, dass das Zerfallen in einfachere Gruppen durch den geringen Gehalt an Wasserstoff im Allylalkohol verursacht wird, indem an die im wasserstoffreicheren Propylalkohol besetzten Stellen der Sauerstoff zu leicht eintreten kann. Wie der Eine von uns gezeigt hat[1]), kann man diesen Uebelstand vermeiden, wenn man obige Stellen mit Brom besetzt, und dann die Oxydation ausführt, so gelangt man zu einer mit 2 Atomen Brom verbundenen Acrylsäure oder einer Bi-

1) Zeitschrift f. Chemie 1871 S. 250.

brompropionsäure. Durch Destillation im Wasserdampf, nachher für sich, völlig gereinigtes Allylalkoholbromür von 210 — 214° Siedepunkt haben wir mit 2 Theilen Salpetersäure von 1.47 spec. Gew. oxydirt wie von dem Einen von uns angegeben. Ein Versuch mit Chromsäure ergab ein ungünstiges Resultat. So erhielten wir circa die Hälfte des Bromürs an reiner Bibrompropionsäure. Sie schmilzt bei 64 — 65° und siedet unter Zersetzung bei 220 — 240°.

Von dieser Säure haben wir eine Reihe Salze und Aether dargestellt. Letztere wurden einfach mittels des betr. Alkohols und Salzsäure hergestellt. Die Salze dagegen mussten mit grösster Vorsicht bereitet werden, da äusserst leicht Brom in Form von Brommetall aus der Säure austritt.

Methyläther $C^3H^3Br^2O^2.CH^3$. Bei 203° siedendes öliges Liquidum von angenehmem Geruch.

Aethyläther $C^3H^3Br^2O^2.C^2H^5$. Dem vorigen ähnlich, bei 211 — 214° siedend von 1.796 spec. Gew. bei 0°.

Allyläther $C^3H^3Br^2O^2.C^3H^5$. Oeliges etwas stechend riechendes Liquidum, bei 215 — 220° unter geringer Zersetzung siedend von 1.843 spec. Gew. bei 0°.

Kaliumsalz. Aus alkoholischen Lösungen von Säure und Aetzkali erhalten bildet es Blättchen, jedoch mit Bromkalium verunreinigt. Etwas besser gelang es mit wässerigen Lösungen.

Ammoniumsalz $C^3H^3Br^2O^4.NH^2$ wird aus weingeistiger Säurelösung mit Ammoniak erhalten und durch Aether in Blättchen gefällt.

Calciumsalz $(C^3H^3Br^2O^2)^2Ca + 2H^2O$. Aus alkoholischer Säurelösung durch Sättigen mit

Doppelspath bei 40 — 50° erhalten. Seidenglänzende Nadeln.

Strontiumsalz $(C^3H^3Br^2O^2)^2Sr + 6H^2O$. Aehnlich zu erhalten, kristallisirt schwierig in Nadeln.

Silbersalz $C^3H^3Br^2O^2Ag$. Mikroscopische Blättchen, durch Fällen mit Silbernitrat zu erhalten.

Blei- und Barynmsalz sind nicht rein erhalten worden.

Aus diesen Eigenschaften der Säure und ihrer Salze ergiebt sich, dass sie völlige Analogie mit der Chloressigsäure und anderen Säuren zeigt und wie jene die Carboxylgruppe enthalten muss. Da sie noch die beiden Bromatome des Allylalkoholbromür besitzt, müssen diese beiden Atome in jenem nicht an dem die Carboxylgruppe liefernden Kohlenstoffatome sich befinden und folglich können ebenfalls im Allylalkohol selbst die beiden Plätze, welche durch Brom eingenommen werden nicht diesem Carboxyl liefernden C Atom angehören. Es bleibt sonach nichts übrig, als im Allylalkohol die Gruppe CH^2OH der normalen Alkohole mit C^2H^3 verbunden, anzunehmen, und mit Berücksichtigung der für letzeren Complex wahrscheinlichsten Structur scheint die Constitution $CH^2 = CH - CH^2OH$ für den Allylalkohol möglichst sichergestellt.

Eine andere sich an unsere Säure richtende Frage haben wir leider nicht völlig zu lösen vermocht, nämlich diejenige ob sie identisch mit der von Friedel und Machuca aus Propionsäure erhaltenen Bibrompropionsäure ist. Durch Bromiren der Propionsäure erhielten wir Kristalle, welehe bei 61° schmolzen, die Zusam-

mensetzung der Bibrompropionsäure zeigten und ähnlich wie unsere Säure krystallisirten, dabei jedoch sehr hygroscopisch waren was unsere Säure kaum ist, so dass wir uns ein bestimmtes Urtheil über die Identität der Friedel'schen mit der unsrigen noch vorbehalten.

Als Nebenproducte bei der Oxydation des Allylalkoholbromürs bilden sich Oxalsäure und Allyltribromür, welches letztere in bei 16° schmelzenden und bei 215—220° siedenden Krystallen erhalten wurde.

Ueber die Anordnung der Herzganglien bei Vögeln und Säugethieren.

Von Dr. Schklarewski.

Vorgelegt von G. Meissner.

Die grösseren Herzganglien der Säugethiere und Vögel (Kaninchen, Hund, Maulwurf, Fledermaus, Ratte, Sperling, Taube, Huhn, Corvus cornix, Falco buteo, Muscicapa) bilden durch Nervenfaserstränge zu Ketten verbunden zunächst zwei geschlossene Ringe, deren einer nahe rechtwinklig zur Herzbasis streichend dem äussersten Umfange der Vorhofscheidewand entspricht, während der andere, nahe rechtwinklig zu jenem, in der Atrioventriculargränze verläuft und dabei vorn und hinten in der Ebene der Scheidewand zwischen rechtem und linken Herzen den erstern Ring unter Anastomosirung durchkreuzt.

Von diesen gangliösen Ringen gehen in die Muskulatur der Vorhöfe und Ventrikel beiderseits geflechtartig sich verbindende dünnere Zweige ab, welche kleinere Ganglien und ein-

zeln eingelagerte Ganglienzellen enthalten. Die ansehnlichsten derartigen Zweige steigen an der Wand der Ventrikel herab, und kann man namentlich bei Vögeln hinten sehr deutlich drei solche absteigende Zweige unterscheiden, zwei dem rechten und einen dem linken Ventrikel angehörig. Vorn findet sich nur ein solcher Zweig auf der Grenze der beiden Ventrikel herabsteigend. Ob diese vorn und hinten herabsteigenden Zweige sich an der Spitze der Ventrikel etwa wiederum zu einem Ringe verbinden, blieb unentschieden.

Die Mitte der Vorhofscheidewand ist bei den genannten Thieren ganz frei von Nervenstämmen und Ganglien.

Bei Vögeln liegt das grösste Herzganglion hinten am Conflux der beiden Ganglienringe und ist daselbst auch bei den kleinsten Vogelarten mit blossem Auge zu erkennen. Ein Analogon zu diesem mehre Tausende von Ganglienzellen umfassenden Haufen konnte ich an der betreffenden Stelle des Säugethierherzens nicht auffinden, wo eine solche Concentration von Ganglienzellen nicht vorzukommen scheint. Die ansehnlichsten Ganglien des Säugethierherzens liegen weiter oben nahe der Einmündung der V. cava superior.

Die Ganglien liegen gewöhnlich ziemlich oberflächlich unter dem visceralen Blatt des Pericardium. Die Untersuchung wird durch die sie umhüllenden Schichten fettreichen Bindegewebes ziemlich erschwert; ich benutzte deshalb besonders hungernde Thiere.

Die grösseren Ganglien der Vögel sind durch Septa von Nervenfasern und Bindegewebe in einzelne Abtheilungen, Nester, getrennt, was bei Säugethieren, ähnlicher dem Verhalten beim

Frosch, mehr zurücktritt. Ueberall scheinen die einzelnen Zellen eine besondere bindegewebige Hülle zu besitzen. Die Grösse der einzelnen Ganglienzellen variirt zwischen 0,013 und 0,024 mm.; die Grösse der bläschenartigen Kerne variirt weniger, beträgt in den grösseren Zellen gegen 0,010 mm. Was die Form der Ganglienzellen, bezüglich ihrer Ausläufer betrifft, so erscheinen die meisten retorten- oder kolbenförmig, häufig mit sehr deutlichem Faserursprung, manche auch spindelförmig. Die meisten Nervenfasern der Ganglienstränge gehören zur Kategorie der blassen Fasern und sind namentlich bei Säugern von der bindegewebigen Umgebung nicht leicht zu unterscheiden. Dagegen gehören die Ganglienzellen des Herzens der Vögel und Säugethiere zu den prägnantesten Objecten dieser Art, die sich zur Entscheidung mancher feinerer histologischer Fragen über derartige Gebilde gut eignen dürften.

Als günstige Vorbereitung zur Untersuchung erwies sich eine 12—36 Stunden dauernde Maceration der wo möglich den lebenden Thieren entnommenen Herzen in verdünntem (etwa 20%) Holzessig.

Vorstehende Untersuchungen wurden im physiologischen Institut zu Göttingen angestellt.

Nachrichten
von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

18. September. №. 22. 1872.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Ueber ein neues Grundgebilde der analytischen Geometrie der Ebene[1]).

Von A. Clebsch.

In einem Aufsatze, welcher im 17. Bande der Abhandlungen der K. Ges. gedruckt ist[2]), habe ich es versucht, die Grundgebilde zu kennzeichnen, welche für die Invariantentheorie zu studiren sind. Für die analytische Geometrie der Ebene (Algebra der ternären Formen) ergab sich hierbei der Nothwendigkeit, ein Gebilde zu untersuchen, welches die algebraische Curve als sehr besondern Fall einschliesst und welches zugleich das umfassendste ist, dessen Studium durch die Invariantentheorie bei ternären Formen gefordert werden kann. Dieses Gebilde, dessen Untersuchungen so zu sagen die ganze analytische Geometrie der Ebene in sich schliesst, in einigen seiner wesentlichen Beziehungen darzulegen, ist der Zweck der gegenwärtigen Mittheilung, während ich eine eingehendere Ausführung einer weitern Publication vorbehalte.

1) Vgl. den Sitzungsbericht in Nro. 20.
2) Ueber eine Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie.

1. *Definition des Connexes.*

Das Gebilde, um welches es sich hier handelt, wird gegeben durch eine Gleichung, welche die Coordinaten eines beweglichen Punctes (x) und einer beweglichen Geraden (u) jede in homogener Weise enthält,

$$f(x, u) = 0.$$

Es sind also Formen von der Art derjenigen, die in den neuern Algebra als Zwischenformen bezeichnet werden, welche als selbstständige Grundformen betrachtet durch ihr Verschwinden zu den hier zu untersuchenden Gebilden Veranlassung geben. In der Form f mögen die x zur Ordnung m, die u zur Ordnung n vorkommen. Ich bezeichne dann das durch die Gleichung 1. dargestellte Gebilde als Connex $m$ter Ordnung und $n$ter Classe, oder kürzer als Connex (m, n).

Man kann ein solches Gebilde mit Hülfe eines Mechanismus in ähnlicher Weise construiren, wie Grassmann dies für algebraische Gebilde überhaupt und für algebraische Curven insbesondere gelehrt hat. Dabei entsprechen jeder Geraden u im Allgemeinen unendlich viele Puncte x, welche eine Curve C_m der $m$ten Ordnung bilden; jedem Puncte x unendlich viele Gerade u welche eine Curve K_n der $n$ten Classe umhüllen.

Um diese Verhältnisse einfach aufzufassen, ist es zweckmässig, weder den Punct noch die Gerade an und für sich als Grundelement der Ebene zu betrachten; vielmehr bezeichne ich als Element die Combination eines Punctes mit einer Geraden. Die gesammten Elemente (xu) der Ebene bilden dann nach der gewöhnlichen Bezeichnung ein vierfach unendli-

ches System[1]). Aus diesem hebt die Gleichung eines Connexes die dreifach unendliche Schaar der Elemente heraus, welche derselben genügen. Das Obige kann man dann auch so aussprechen: Die Puncte, welche mit einer gegebenen Geraden Elemente des Connexes (m, n) sind, bilden eine Curve C_m $m$ter Ordnung; die Geraden, welche mit einem gegebenen Puncte Elemente eines solchen Connexes sind, umhüllen eine Curve K_n $n$ter Classe.

Nur in besondern Fällen tritt es ein, dass jeder Punkt der Ebene mit einer bestimmten Geraden, oder jede Gerade der Ebene mit einem bestimmten Puncte Elemente des Connexes bildet. Solcher ausgezeichneter Puncte und Geraden, kann es bei besondern Connexen beliebig viel geben; ja ihre Zahl kann unendlich gross werden. Dies letztere tritt bei irreducibeln Connexen ein, wenn die Gleichung $f = 0$ die x oder die u gar nicht enthält. Enthält sie die u nicht, so hat man die Gleichung einer Curve in Punctcoordinaten vor sich; sie ist als Connex so aufzufassen, dass jeder Punct der Curve mit jeder beliebigen Geraden ein Element des Connexes bilden kann, dass aber andre Puncte sich mit Geraden zu Elementen überhaupt nicht vereinigen können. Das Entsprechende tritt ein, wenn $f = 0$ die x nicht enthält, und also die Gleichung einer Curve in Liniencoordinaten darstellt.

Die Connexe (1, 1) führen auf die Collineation, aber in solcher Weise, dass auch diejenigen Ausar-

1) Diese Bezeichnung ist zunächst der Vorstellung reeller Veränderlicher entnommen, dann aber so übertragen, dass man unter einer einfachen Unendlichkeit die Gesammtheit der Werthe einer unbeschränkt veränderlichen Grösse versteht, wiewohl die Anzahl der complexen Werthe, welche eine solche annehmen kann, eigentlich doppelt unendlich ist.

tungen hier noch einen Sinn behalten, welche als Collineationen bedeutungslos werden. Die Behandlung der Collineation durch Untersuchung eines Ausdrucks, welcher die x und die u linear enthält, haben Hr. Gordan und ich im 1sten Bande der math. Annalen (p. 359 folgd.) bereits gegeben. Geht man vom Begriff des Connexes aus, so gehört zu jedem Puncte der Ebene ein Punct y, welcher der Träger eines Strahlbüschels (Curve 1. Classe) ist; alle Geraden durch y bilden mit x Elemente des Connexes, und zugleich ist y der in der Collineation dem Puncte x entsprechende Punct. Ebenso gehört zu jeder Geraden u eine andere, v (Curve 1. Ordnung), deren Puncte mit u Elemente bilden, und zugleich ist u die Gerade, welche der Geraden v in der Collineation entspricht. Man wird bei dieser Auffassung auch bezüglich der Collineation auf interessante Sätze und Aufgaben geführt. Ich erwähne nur die Construction collinearer Figuren, wenn nicht 4 Paare entsprechender Puncte gegeben sind, sondern 8 Puncte und 8 Gerade, auf denen die entsprechenden liegen sollen; sowie den Satz:

Bei allen Collineationen, bei welchen die zu gegebenen fünf Puncten gehörigen Puncte auf fünf gegebenen Geraden liegen, existirt immer noch ein sechster Punct, dessen entsprechende Puncte sämmtlich auf einer Geraden liegen, und zwar wird der sechste Punct und diese Gerade linear construirt.

2. *Coincidenzen und Curvenpaare.*

Wie aus den algebraischen Flächen algebraische Raumcurven abgeleitet werden, so ergeben sich hier aus dem Connex neue Gebilde, welche das mehreren Connexen Gemeinsame umfassen.

Die Gesammtheit der Elemente, welche zwei

Connexen gemeinsam sind, — oder wenn diese Gesammtheit in rational trennbare Theile zerfällt, jeden solchen Theil — bezeichne ich als Coincidenz.

Innerhalb einer Coincidenz gehört zu jeder Geraden im Allgemeinen nur eine endliche Anzahl (μ) von Puncten, welche mit ihr ein Element bilden können; ebenso gehört zu jedem Puncte eine endliche Anzahl (ν) von Geraden. Man kann dann μ die Ordnung, ν die Classe der Coincidenz nennen, diese selbst aber als eine Coincidenz (μ, ν) bezeichnen.

Die Coincidenz deckt sich mit dem allgemeinsten Begriffe der reciproken Verwandtschaft, d. h. einer solchen, bei welcher bei zwei auf einanderliegenden ebenen Systemen A, B jedem Puncte von A eine Anzahl von Geraden in B, jeder Geraden in B eine Anzahl von Puncten in A entspricht. Das umgekehrte ist dabei im Allgemeinen keineswegs der Fall; den Puncten einer Geraden in A entsprechen im Allgemeinen in B die Tangenten einer Curve, und umgekehrt entsprechen einem Puncte in B, d. h. den Geraden des durch ihn gehenden Strahlbüschels, Puncte von A, welche eine Curve beschreiben. So sind besondere Bedingungen zu erfüllen, damit aus der zwei Connexen (1, 1) gemeinsamen Coincidenz die lineare reciproke Verwandtschaft im gewöhnlichen Sinne hervorgehe; welche dann freilich bei geeigneter Wahl der Connexe in allgemeinster Weise hiedurch erzeugt wird.

Die Gesammtheit aller Elemente, welche drei Connexen gemeinsam sind — oder ein rational darstellbarer Theil einer solchen Gesammtheit — bildet ein Curvenpaar. Es sind vermöge der Gleichungen dieser Connexe im Allgemeinen

sowohl die u durch die x als die u durch die x rational ausdrückbar, während zugleich durch Elimination der x eine Gleichung zwischen den u, durch Elimination der u eine Gleichung zwischen den x erhalten wird. Man hat also eine Curve in Punctcoordinaten und eine Curve in Liniencoordinaten vor sich, und die Puncte der einen sind auf die Tangenten der andern eindeutig bezogen.

Es ist nicht ohne Interesse, das eindeutige Entsprechen zweier Curven gerade in der Weise zu betrachten, wie es hier auftritt. Denn gerade die nicht aufgelöste Form der Gleichungen, wie sie hier theoretisch sich darbietet, ist es, auf welche man in den meisten derartigen Untersuchungen unmittelbar geführt wird.

3. *Covariante Gebilde und ihr Zusammenhang mit doppelt binären Formen.*

Jeder Connex führt eine Anzahl covarianter Connexe, Coincidencen, Curvenpaare unmittelbar mit sich, wie andrerseits auch Gebilde der letztern Arten wiederum covariante Gebilde aller drei Stufen im Gefolge haben. So erhält man eine einem gegebenen Connexe covariante Coincidenz, wenn man jede Gerade der Ebene nicht mit allen Puncten der zugehörigen C_m, sondern nur mit deren Wendepuncten, bez. Berührungspuncten von Doppeltangenten, zu Elementen verbindet; oder wenn man jeden Punct der Ebene nicht mit allen Tangenten der zugehörigen K_n zusammenstellt, sondern nur mit den Tangenten ihrer Doppel-, bez. Rückkehrpuncte. Ein Curvenpaar wird gebildet durch die im Systeme der C_m auftretenden Doppel- und Rückkehrpuncte und die zugehörigen Geraden, so wie durch die im Systeme der K_n auf-

tretenden Doppel- und Wendetangenten und die zugehörigen Puncte.

Vom Standpuncte der Invariantentheorie ist zunächst von besonderen Interesse eine Classe aus einem gegebenen Connexe abzuleitender covorianter Connexe (Zwischenformen), welche in folgender Weise entstehen.

Betrachten wir ein beliebiges nicht dem gegebenen Connexe angehöriges Element (y, v). Der Punct y ist Scheitel eines Büschels von Strahlen u, die Gerade v Träger einer Reihe von Puncten x. Soll (x, u) Element des gegebenen Connexes sein, so wird jedem x eine Gruppe Γ_n von n Strahlen u, jedem u eine Gruppe G_m von m Puncten x zugeordnet. Betrachten wir ein solches dem gegebenen Connex angehöriges Element (x, u), und die zu x gehörige Γ_n (welche u enthält), sowie die zu u gehörige G_m (welche x enthält). Man stelle nun die Forderung, dass die Gruppe Γ_n eine binäre Invarianteneigenschaft besitze, und dass ebenso G_m dieselbe oder eine andre habe. Dann resultirt daraus eine Bedingung für (y, v), und dieses Element gehört einem covarianten Connexe an.

Es ist eine characteristische Eigenschaft der so gebildeten covarianten Connexe, dass die Gleichungen derselben aus der Theorie binärer Formen abgebildet werden. Die binären Formen, welche hier zu betrachten sind, enthalten zwei Reihen von Veränderlichen; und die Invarianten, welche bei der obigen Darstellung zu untersuchen sind, haben die Invarianteneigenschaft auch dann noch, wenn die eine Reihe von Veränderlichen einer, die andre einer beliebigen andern linearen Transformation unterworfen

wird. Stellt man eine solche doppelt binäre Form symbolisch durch

$$\varphi = (a_1 x_1 + a_2 x_2)^m (u_1 \alpha_1 + u_2 \alpha_2)^n$$

dar, so haben die Invarianten der in Rede stehenden Art den symbolischen Ausdruck

$$J = \Sigma\, c.\ \Pi\,(ab)\ \Pi\,(\alpha\beta),$$

wo die c Zahlencoefficienten, die a, b ... Symbole der einen, die α, b ... Symbole der andern Art bedeuten, diese beiden Classen von Symbolen aber niemals vereinigt auftreten.

Ist nun symbolisch

$$f = (a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)^m (u_1 \alpha_1 + u_2 \alpha_2 + u_3 \alpha_3)^n = 0$$

die Gleichung des gegebenen Connexes, so findet man als die Gleichung des covarianten Connexes, welcher auf die oben angegebene Weise aus der Invariante J entsteht:

$$0 = \Sigma\, c.\ \Pi\,(abv)\ \Pi\,(\alpha\beta y).$$

Diese Classe covarianter Connexe ist also ebenso auf das Studium der Invarianten jener doppelt binären Formen zurückgeführt, wie die Linien-Gleichung einer in Punctcoordinaten gegebenen Curve auf das Studium der Discriminante einer binären Form mit einer Reihe von Veränderlichen.

4. *Conjugirte Connexe.*

Unter den Invarianten einer doppelt binären Form $\varphi = \varphi\,(x_1, x_2; u_1, u_2)$ giebt es eine, welche den oben angegebenen Forderungen entspricht, und welche der Discriminante einer gewöhnlichen binären Form in gewissem Sinne analog ist. Geben wir in φ den x beliebige fe-

ste Werthe, so mögen die aus $\varphi = 0$ entspringenden Werthsysteme der u eine Gruppe Γ_n bilden; ebenso sollen, wenn wir den u beliebige feste Werthsysteme beilegen, die zugehörigen Werthsysteme der x eine Gruppe C_m ausmachen. Das Verschwinden der in Rede stehenden Invariante drückt dann aus, es existire ein solches Werthsystem x_1, x_2, u_1, u_2, dass sowohl die zu x gehörige Gruppe Γ_n die u als Doppellösung enthalte, wie umgekehrt in der zu den u gehörigen Gruppe C_m die x eine Doppellösung bilden sollen. Man erhält diese Invariante, gleich Null gesetzt, indem man die x und u aus den vier Gleichungen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = 0, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = 0, \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} = 0, \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} = 0$$

eliminirt, Gleichungen welche nur die Stelle von dreien versehen, und daher nur auf eine Resultirende führen. Diese ist in Bezug auf die Coefficienten von φ im Allgemeinen vom Grade $2[mn + 2(m-1)(n-1)]$. Aus ihr entsteht ein in Bezug auf den gegebenen besonders merkwürdiger covarianter Connex von der Ordnung $n[mn + 2(m-1)(n-1)]$ und der Classe $m[mn + 2(m-1)(n-1)]$, welchen ich den zu dem gegebenen conjugirten nenne. Er steht zu dem gegebenen in einem Reciprocitätsverhältnisse; der conjugirte des conjugirten ist wieder der ursprüngliche; und diese ganze Beziehung ist durchaus derjenigen analog, welche zwischen einer Curve als Punctgebilde und derselben Curve als Liniengebilde stattfindet.

Geometrisch definirt man den conjugirten Connex in folgender Weise. Gehen wir von einem Elemente (x, u) des gegebenen Connexes

aus, so ist x ein Punct der zu u gehörigen C_m, u eine Tangente der zu x gehörigen K_n. Sei nun y der Berührungspunct von u mit dieser K_n, v die Tangente jener C_m in x. Alsdann ist (y, v) ein Element des conjugirten Connexes, und man erhält den ganzen conjugirten Connex, indem man das Element (x, u) den ganzen gegebenen Connex durchwandern lässt. Man erhält demnach auch die Gleichung des conjugirten Connexes, indem man aus den Gleichungen

$$\varrho v_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad \sigma y_i = \frac{\partial f}{\partial u_i}, \quad f = 0$$

die x und die u eliminirt.

Der gegebene und der conjugirte Connex sind eindeutig auf einander bezogen. Aber Ordnung und Classe des conjugirten Connexes übertreffen, so lange der gegebene allgemeine Coefficienten besitzt, bei weitem die des letzteren. Soll also der conjugirte Connex des conjugirten wieder der ursprüngliche sein, so muss der conjugirte gewisse Eigenschaften besitzen, welche die Ordnung und Classe des ihm conjugirten reduciren. Man findet diese in dem Auftreten der nothwendigen Singularitäten.

Unter den nothwendigen Singularitäten verstehe ich eine Classe von Singularitäten, welche sich bei jedem Connexe selbst oder doch bei seinem conjugirten finden. Nennt man allgemein einen Connex auch dann noch, wenn er zwar nicht ganz willkürliche Coefficienten besitzt, aber die Willkürlichkeit einer Coefficienten nur durch das Auftreten dieser Art von Singularitäten beschränkt ist, so tritt bei dem conjugirten dasselbe ein. Die nur mit solchen Singularitäten behafteten Connexe bilden daher

ein in sich geschlossenes System, welchem auch ihre conjugirten angehören. Dieser Begriff ist zunächst an den algebraischen Curven der Ebene gebildet; wo denn jeder Curve in Punctenordinaten sie selbst in Liniencoordinaten in ähnlicher Weise gegenübersteht, wie oben der conjugirte Connex dem ursprünglichen. Die nothwendigen Singularitäten sind hier diejenigen, welche in den Plücker'schen Formeln vorkommen — Doppelpuncte und Rückkehrpuncte einerseits, Doppeltangenten und Wendetangenten andrerseits. Geht man von einer Curve aus, welche bei übrigens willkürlichen Coefficienten Doppel- und Rückkehrpuncte von willkürlicher Lage besitzt, so wird zwar die Zahl der Doppel- und Wendetangenten dadurch modificirt werden können, dieselben werden aber sich nicht etwa zu höhern Singularitäten zusammenziehen. Die Curve als Ordnungscurve betrachtet kann demnach nothwendige Singularitäten aller Arten erhalten, ohne dass dieselbe Curve als Classencurve betrachtet, andre als ebenfalls nothwendige Singularitäten erhält. In gleicher Weise kann man den Begriff der nothwendigen Singularitäten bei allen algebraischen Gebilden characterisiren.

Wie bei den algebraischen Curven in der Ebene es die Doppelpuncte und Doppeltangenten (incl. Rückkehrpuncte und Wendetangenten) sind, welche die nothwendigen Singularitäten ausmachen, bei den Flächen Doppelcurven und Doppel- bez. dreifache Puncte, so treten hier doppelte, dreifache, vierfache Gebilde auf, welche die nothwendigen Singularitäten bilden. Und zwar erheben sich die Doppelgebilde bis zur zweifachen Mannigfaltigkeit, also bis zur Coincidenz, die dreifachen bis zum Curvenpaar,

während vierfache Elemente als nothwendige Singularitäten nur discret auftreten.

5) *Die Hauptcoincidenz und die algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung.*

Als identischen Connex bezeichne ich den Connex (1, 1), welcher durch die Gleichung

$$u_1\, x_1 + u_2\, x_2 + u_3\, x_3 = 0$$

gegeben ist. In diesem Connex gehört zu jedem Puncte die Gesammtheit der durch ihn gehenden Geraden, zu jeder Geraden die Gesammtheit der auf ihr liegenden Puncte, Element des Connexes ist überhaupt jede Combination von Punct und Gerader in vereinigter Lage.

Durch die Gesammtheit der Elemente, welche einem beliebig gegebenen Connexe $f = 0$ und dem identischen Connexe gemeinsam sind, ist eine für das Studium des Connexes $f = 0$ besonders wichtige covariante Coincidenz gegeben; ich nenne sie die Hauptcoincidenz des Connexes. In dieser Coincidenz entsprechen jedem Puncte n durch ihn gehende Strahlen, die von ihm an die zugehörige K_n gelegten Tangenten; und jeder Geraden entsprechen m Puncte, ihre Schnittpuncte mit der zugehörigen C_m.

Die Untersuchung der Hauptcoincidenz ist identisch mit der Untersuchung der allgemeinsten algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung. Betrachten wir in jedem Puncte der Ebene die n unendlich kleinen Elemente, welche von ihm in der Richtung der zugehörigen n Strahlen ausgehen, so setzt sich aus diesen Elementen ein Curvensystem zusammen, welches die Eigenschaft hat, dass durch jeden Punct der Ebene

n Zweige des Systems gehen, und dass jede Gerade von *m* Zweigen des Systems berührt wird. Ich nenne diese Curven, die zu $f=0$ gehörigen Connexcurven. Sie sind das Integral einer algebraischen Differentialgleichung, welche durch den Connex gegeben ist, und welche allgemeine Coefficienten besitzt, sobald dem Connexe solche beigelegt werden. Man hat also eine geometrische Darstellung dieses Integrals unmittelbar vor sich; und zwar in einer Weise, dass der dualistische Character der Integrale sofort hervortritt. Denn die Differentialgleichung selbst kann unmittelbar in doppelter Weise gebildet werden, einmal, indem man die x, das andre Mal, indem man die u als Veränderliche einführt. Das erstere geschieht, indem man die u durch die Grössen

$$x_2 dx_3 - x_3 dx_2, x_3 dx_1 - x_1 dx_3, x_1 dx_2 - x_2 dx_1$$

ersetzt, das zweite, indem man an Stelle der x die Grössen

$$u_2 du_3 - u_3 du_2, u_3 du_1 - u_1 du_3, u_1 du_2 - u_2 du_1$$

in die Gleichung des Connexes einführt.

Jede Differentialgleichung erster Ordnung mit algebraischen Coefficienten kann auf diese Weise erhalten werden. Man kann den Zusammenhang einer gegebenen algebraischen Differentialgleichung mit der Hauptcoincidenz eines Connexes folgendermassen darlegen.

Zu einer gegebenen Hauptcoincidenz gehören noch unendlich viele Connexe. Sie sind, wenn $f=0$ einer derselben ist, durch die Gleichung, $f + M.\, u_x = 0$ gegeben, wo M eine beliebig zu wählende ganze Function der x, u von den entsprechenden Dimensionen ist.

Es sei nun eine algebraische Gleichung zwischen ξ, η, $\frac{d\eta}{d\xi} = p$ gegeben, $\varphi(\xi, \eta, p) = 0$. Man bringe die Gleichung $\varphi = 0$ in die Form

$$f(\xi, \eta, -p, \xi p - \eta) = 0,$$

was auf unendlich viele Weisen geschehen kann. Dann ist immer

$$f\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}; \frac{u_1}{u_2}, \frac{u_3}{u_2}\right) = 0$$

die Gleichung eines Connexes, dessen Connexcurven durch die Gleichung $\varphi = 0$ gegeben werden.

So lange über die Coefficienten des Connexes besondre Festsetzungen nicht gemacht werden, hat die Differentialgleichung kein singuläres Integral. Es ist aber leicht diejenigen Curven aufzustellen, von welchen eine der Ort der Rückkehrpuncte der Integralcurven ist, während die andre von den Wendetangenten derselben umhüllt wird. In das singuläre Integral der einen oder andern Form der Differentialgleichung verwandeln sich diese Curven, sobald die Richtung der Rückkehrtangente überall mit der Tangente der Curve der Rückkehrpuncte zusammen fällt, bez. der von den Wendetangenten umhüllte Ort mit dem Orte der Wendepuncte selbst identisch wird.

6. *Satz über algebraische Differentialgleichungen erster Ordnung.*

Die hier entwickelten Vorstellungen führen auf eine interessante Anwendung der angedeuteten Theorie, indem sie eine Classification der algebraischen Differentialglei-

chungen erster Ordnung liefern, welche der Riemannschen Classification der Abelschen Integrale durchaus analog ist.

Diese Untersuchungen knüpfen sich an die Erweiterung, welche ich dem Riemannschen Satze über die Erhaltung der Zahl p bei eindeutigen Transformationen, oder, geometrisch ausgedrückt, über die Erhaltung des Curvengeschlechtes, in den Comptes Rendus vom Jahre 1868 in Bezug auf algebraische Flächen gegeben habe, und welche Hr. Nöther im 2ten Bande der math. Annalen auf algebraische Gebilde von beliebig vielen Dimensionen ausgedehnt hat.

Bezeichnen wir durch (x, u) ein Element des Connexes $f = 0$, durch $d'x$ eine Fortschreitung der x innerhalb des Connexes, bei welcher die u ungeändert bleiben, ebenso durch $d''u$ eine Fortschreitung der u innerhalb des Connexes, bei welchen die x ungeändert bleiben, endlich durch dx, du irgend eine andre innerhalb des Connexes zulässige Fortschreitung. Es seien ferner α, β beliebige Grössen, Θ eine ganze Function, welche für die x und u bezw. zu den Ordnungen $m-3$ und $n-3$ aufsteigt. Dann ist

$$d\,J = \frac{\Theta.\,(x\,\alpha\,d'x)\,(u\,du\,d''u)}{\Sigma\,\alpha_i\,f'\,x_i}$$

$$= -\frac{\Theta.\,(x\,dx\,d'x)\,(u\,\beta\,d''u)}{\Sigma\,\beta_i\,f'\,u_i}$$

das Element eines dreifachen Integrals. Bestimmt man die Constanten in Θ so, dass die dieses Integral niemals unstetig wird, so giebt die Zahl der überbleibenden Constanten von Θ das Geschlecht des Connexes an, d. h. eine Zahl, welche unverändert bleibt, wie man auch den Connex eindeutig transformirt. — In

ähnlicher Weise kann man von dem Geschlecht einer Coincidenz und eines Curvenpaars sprechen. Das letztere ist identisch mit dem Geschlecht, welches nach der Theorie der Abelschen Functionen jeder der beiden Curven zukommt. Zur Definition des **Geschlechts einer Coincidenz** bezeichne ich durch $f = 0$, $\varphi = 0$ die Gleichung der Connexe, deren ganzer oder theilweiser Durchschnitt die Coincidenz ist, durch m, n und m', n' Ordnung und Classe derselben. Es seien sodann dx, du und $d'x$, $d'u$ zwei verschiedene Fortschreitungsrichtungen innerhalb der Coincidenz, es mögen die a, α, b, β beliebige Grössen bedeuten, und Θ eine ganze Function, welche die x zur Ordnung $m + m' - 3$, die u zur Ordnung $n + n' - 3$ enthält. Dann ist

$$dJ = \frac{\Theta.\ (dx\ d'x\ x)\ (u\ b\ \beta)}{\Sigma b_i f' u_i.\ \Sigma \beta_i \varphi' u_i - \Sigma b_i \varphi' u_i.\ \Sigma \beta_i f' u_i}$$

$$= \frac{\Theta.\ (du\ d'u\ u)\ (x\ a\ \alpha)}{\Sigma a_i f' x_i.\ \Sigma \alpha_i \varphi' x_i - \Sigma \alpha_i f' x_i.\ \Sigma a_i \varphi' x_i}$$

Element eines Doppelintegrals. Bestimmt man nun die Constanten in Θ, nachdem man ihre Anzahl durch die Gleichungen $f = 0$, $\varphi = 0$ möglichst reducirt hat, so dass das Doppelintegral niemals unendlich wird, so giebt die Zahl der übrigbleibenden willkürlichen Constanten das Geschlecht der Coincidenz an; eine Zahl, welche sich bei eindeutigen Transformationen der Coincidenz nicht ändert.

Wenden wir dies insbesondre auf die Hauptcoincidenz eines Connexes an. Nicht jede eindeutige Transformation führt die Hauptcoincidenz eines Connexes wieder in eine solche über. Aber unter allen eindeutigen Transformationen,

deren eine Hauptcoincidenz fähig ist, giebt es insbesondere eine Gruppe von solchen, welche sie wieder in eine Hauptcoincidenz überführen; und auch für diese muss also die Erhaltung des Geschlechts stattfinden. Es zeigt sich nun, dass diese Transformationen genau die eindeutigen Transformationen der zugehörigen Differentialgleichung erster Ordnung sind. Ist diese, in der gewöhnlichen Bezeichnung, durch

$$1 \ldots \quad f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

dargestellt, wo f eine ganze Function ist, so besteht diese eindeutige algebraische Transformation allgemeinster Art darin, dass man

$$1 \ldots \quad \begin{aligned} \xi &= \varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) \\ \eta &= \psi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) \end{aligned}$$

setzt. Dabei sollen φ, ψ übrigens beliebige rationale Functionen sein; vorausgesetzt wird, dass man aus 1. 2., und der Gleichung, die sich ergiebt indem man $\frac{d\eta}{d\xi}$ auch durch $x, y, \frac{dy}{dx}$ ausdrückt, im Stande sei auch $x, y, \frac{dy}{dx}$ durch ξ, η, $\frac{dy}{d\xi}$ eindeutig auszudrücken. Die Endgleichung in ξ, η, $\frac{d\eta}{d\xi}$ ist dann eine transformirte Differentialgleichung, für welche jene Zahl denselben Werth hat, wie für die ursprüngliche. Man kann daher diese Zahl auch füglich das Geschlecht

der **Differentialgleichung** nennen; es ergiebt sich so eine Classification der algebraischen Differentialgleichungen erster Ordnung, welche die Differentialgleichungen von gleichem Geschlechte zu einer Gruppe vereinigt, unter dieser aber als identisch alle diejenigen betrachtet, welche durch eindeutige Transformation aus einander hervorgehen. Ich bemerke insbesondre, dass das Geschlecht immer gleich Null wird, sobald die Differentialgleichung sich dadurch integriren lässt, das y gleich einem nach x genommenen Abelschen Integrale wird; wenn also die Differentialgleichung aus Gleichungen der Form

$$\frac{d\eta}{dx} = \varphi(\zeta, \xi), \quad f(\zeta, \xi) = 0$$

durch Elimination von ζ entstanden ist, wobei φ, f rationale Functionen ihrer Argumente bedeuten.

7. *Zusammenhang mit der Liniengeometrie.*

Ich will zum Schluss dieser Note noch auf eine Beziehung hinweisen, welche zwischen den Connexen und den Complexen Plücker's eintritt, und welche zeigt, dass diese Gebilde wesentlich nur als verschiedene Interpretationen desselben algebraischen Begriffes aufzufassen sind.

Denken wir uns zunächst das System der Geraden u, welche in der Ebene eines gegebenen Connexes liegen, durch die Puncte y einer zweiten Ebene collinear abgebildet. Jedem Elemente (x, u) der ersten Ebene entspricht dann eine Gerade, welche den Punct x mit dem zu u gehörigen y verbindet. Den sämmtlichen Ele-

menten (x, u) sind die Geraden des Raums auf diese Art eindeutig zugeordnet.

Wird zwischen den Elementen der Ebene eine Gleichung (die des Connexes) festgesetzt, so führt dies auch eine Beziehung mit sich, welcher die entsprechenden Geraden des Raums genügen müssen. Dem Connexe entspricht also ein Complex; ebenso, wenn zwei Gleichungen gegeben sind, der Coincidenz eine Congruenz, endlich bei drei gegebenen Gleichungen einem Curvenpaar eine Linienfläche.

Man kann in ähnlicher Weise analytisch die Gleichung des Connexes sofort in die Gleichung eines Complexes überführen. Es seien ξ, η Coordinaten von Raumpuncten,

$$p_{ik} = \xi_i \eta_k - \xi_k \eta_i$$

die Coordinaten einer Geraden. Man setze in der Gleichung

$$f(x, x_2, x_3; u_1, u_2, u_3) = 0$$

des Connexes etwa

$$\begin{aligned} \varrho x_1 &= p_{14} & \sigma u_1 &= p_{13} \\ \varrho x_2 &= p_{24} & \sigma u_2 &= p_{32} \\ \varrho x_3 &= p_{34} & \sigma u_3 &= p_{34}. \end{aligned}$$

Die Gleichung des Connexes geht dann in die Form über

$$1 \ldots \varphi(p_{13}, p_{23}, p_{14}, p_{24}, p_{34}) = 0.$$

Die Grösse p_{12} kommt nicht vor, so dass die Identität nicht zur Anwendung kommt. Der Complex 1. ist vom Grade $m + n$, enthält aber dem Complexe $(m + n)$ten Grades mit allgemeinen Coefficienten gegenüber characteristische Besonderheiten. Denn da seine Gleichung für p_{14}, p_{24}, p_{34} homogen vom $m$ten, für p_{13}, p_{23}, p_{43} homogen vom $n$ten, Grade ist, so enthält der

Complex eine *m*fache und eine *n*fache singuläre Ebene; jede in diesen Ebenen liegende Gerade ist *m*fache, bez. *n*fache Gerade des Complexes, und diese Ebenen sind keine andere als die Ebenen der x und y der oben gegebenen Construction.

Will man umgekehrt von einem gegebnen Complexe zu einem ihm eindeutig entsprechenden Connexe in der obigen Weise übergehen, so geschieht dies, indem man mit Hülfe der Identität p_{12} eliminirt. Ist der Complex als Complex *r*ten Grades mit willkürlichen Coefficienten gegeben, so muss man hierzu eine Gleichung mit p_{34}^r multipliciren, d. h. man muss dem Complexe eine Gerade (die Durchschnittsgerade der singulären Ebenen), oder was dasselbe ist, den durch sie hergestellten speciellen linearen Complex, *r*-fach hinzufügen.

Indem man das Studium dieser Gebilde also einmal von Seite der Connexe einmal von Seite der Complexe entnimmt, liegt der Unterschied wesentlich in dem, was man das eine und das andre Mal allgemein nennt. Bei der einen Behandlungsweise ist ein Complex *r*ten Grades allgemein zu nennen, wenn seine Gleichung mit allen 6 p angeschrieben allgemeine Coefficienten zeigt; das Auftreten einer *m*fachen und einer *n*fachen singulären Ebene ($m + n = r$) ist eine Ausartung. Bei der andern Behandlungsart ist umgekehrt letzterer das Allgemeine, der im vorigen Sinne allgemein genannte Complex entsteht hier aus diesem durch *r*fache Absonderung eines speciellen linearen Complexes. Für die Connexe ist der Unterschied der beiden Behandlungsweisen ein ganz ähnlicher, der, nur in

entgegengesetztem Sinne, die beiden Fälle characterisirt.

Ein solcher Unterschied der Behandlungsweise, motivirt durch verschiedene Definition dessen, was man allgemein nennt, tritt in der Auffassung von Theorien nicht nur bei geometrischen Gebilden sehr häufig auf, und wird nicht immer hinlänglich beachtet. So sind die allgemeinen Eigenschaften der Differentialgleichungen verschiedene, je nachdem man die Differentialgleichungen oder die Integralgleichungen sich durch allgemeine Functionen gegebene denkt. Ein andrer bekannter Fall dieser Art, der dem oben behandelten nahe steht, wird durch die Normalform der algebraischen Gleichungen geblidet, die in der Theorie der Abelschen Functionen auftreten, wenn man diese einmal wie Riemann annimmt, das andre Mal wie Hr. Gordan und ich sie in unsrer Theorie der Abelschen Functionen zu Grunde gelegt haben.

Verzeichniss der bei der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangenen Druckschriften.

Juni, Juli.

Nature. 136—139.

Memorie del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere. Classe di lettere e scienze morali e politiche. Vol. XII. III. della serie III. fasc. II.

Classe di scienze mathematiche e naturali. Vol. XII. III. della serie III. fasc. III. IV. Milano 1871. 72. 4.

Bendiconti. Serie II. vol. IV. fasc. IX—XX. Serie III. vol. IV. fasc. VIII.

— Serie II. vol. V. fasc. I—VII. Ebd. 1871—72. 8.
Atti della fondazione scientifica Cagnola. Vol. V. Parte III. che abbraccia l'anno 1871.
Bulletin de l'Académie R. des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique. 41. année, 2. série, tome 23. Nr. 4. 5. Bruxelles. 1872. 8.
Dr. Karl Bettelheim, medicinisch-chirurgische Rundschau. Jahrg. XIII (Neue Folge III). Bd. II. Hft. I. April 1872. Wien 1872. 8.
Meteorologische Beobachtungen angestellt in Dorpat im Jahre 1871, redigirt u. bearbeitet von Dr. Arthur v. Oettingen u. Dr. Karl Weihrauch. Jahrg. VI. Bd. II. Hft. I. Dorpat. 1872. 8.
Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, im Verein mit andern Mathematikern herausg. von Carl Ohrtmann, Felix Müller, Albert Wangerin. Bd. II. Jahrg. 1869 u. 1870. Berlin. 1872. gr. 8.
XVII. Bericht der Philomathie in Neisse vom Okt. 1869 —April 1870. Hft. I. Neisse. 1872. 8.
Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft. Jahrg. VII. Hft. 2. (April 1872.) Leipzig. 1872. 8.
Theodore Wechniakof, contributions à une histoire générale et encyclopédique des sciences, considerée au point de vue anthropologique. Moscou. 1872. 8.
XI. u. XII. Bericht über die Thätigkeit des Offenbacher Vereines für Naturkunde, im Vereinsjahr 1869—70. Offenbach a/M. 1870—71. 8.
Dr. Rudolph Wolf, astronomische Mittheilungen. 8.
The American Ephemeris and Nautical Almanac for the yoar 1874. Washington. 1871. gr. 8.
E. Schubert, tables of Parthenope, computed for the American Ephemeris and Nautical Almanac. Ebd. 1871. 4.
Nova Acta Reg. Societatis Scientiarum Upsaliensis. Ser. III. Vol. VIII. fasc. I. 1871.
Bulletin météorologique mensuel de l'Observatoire de l'Université d'Upsal. Vol. I. Nos. 1—12. Vol. II. Nos. 7—12. Vol. III. Nos. 1—6. 7—12. Upsal. 1870.
Jahres-Bericht der Lese- und Redehalle der deutschen Studenten zu Prag. Vereinsjahr 1870—71. Prag. 1872. 8.
Archiv des historischen Vereines von Unterfranken u. Aschaffenburg. Bd. XXI. Hft. 3. Würzburg 1872. 8.
Memoirs of the American Academy of Arts and Sciences. New. series. Vol. X. Part I. Cambridge and Boston 1868. 4.

Proceedings of the London Mathematical Society. Nr. 44. 8.

Mittheilungen des historischen Vereines für Steiermark. Hft. XIX. Prag. 1871. 8.

Beiträge zur Kunde steiermärkischer Geschichtsquellen, herausg. vom histor. Vereine für Steiermark. Jahrg. 8. Ebd. 1871. 8.

Ergebnisse der in den Ländern der Ungar. Krone am Anfange des Jahres 1870 vollzogenen Volkszählung etc. verfasst u. herausg. durch das Königl. Ungar. Statistische Bureau. Pest. 1871. gr. 4.

Repertorium für Meteorologie, herausg. von der kaiserl. Akademie der Wiss; redigirt von Dr. H. Wild. Bd. 2. Hft. 2. St. Petersburg. 1872. 4.

Proceedings of the American Association for the advancement of sciences. XIX. Meeting. August. 1870. Cambridge. 1871. 8.

Meteorologiska Jakttagelser. I. Sverige. 9. 1870. 10. 1868. 11. 1869. Stockholm 1869—71.

Kongl. Svenska Vetenskaps - Akademiens Handlingar. Bd. 7. II. 1868. Bd. 8. 1869. Bd. 9. 1870. I. Ebd. 1870—71. 4.

Ofversigt of Kongl. Vetenskaps Akademiens Förhandlinger. Bd. 26 1869. Bd. 27. 1870. Ebd. 1870—71. 8.

Lefnadsteckingar. Bd. I. Hälfte 2. Ebd. 1870. 8.

F. F. Carlson, Minnesteckning öfver Erik Gustaf Geijer. Ebd. 1870. 8.

Julius Thomsen, Thermochemiske Undersögelser. (Vidensk. Selsh. Shr. 5 Raekke, naturvidenskabelig og mathematisk Afd. 2. Bd. 5.) Kjöbenhavn. 1871. 4.

Ofversigt over det Kon. Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger og dets Medlemmers Arbeider. Nr. 2. 1870. Ebd. 8.

Jahrbuch der k. k. geologischen Reichsanstalt. Jahrg. 1872. Bd. XXV. Nr. I. Jan. Febr. März. Wien. gr. 8.

Verhandlungen der k. k. geologischen Reichsanstalt. Nr. 1 – 6. 1872.

Dr. Gustav C. Laube, die Echinoiden der Oesterreichisch-Ungarischen oberen Tertiaerablagerungen. Wien 1871. 4.

XVI., XVII. und XVIII. Bericht des Vereins für Naturkunde zu Cassel. 1866—71. red. von Dr. H. Möhl. Cassel 1871. 8.

Sitzungsberichte der philos.-philolog. und. historischen Classe der k. b. Akademie der Wiss. zu München. 1871. Hft. V. VI. 1872. Hft. I. München 1871. 72. 8.

— der mathem.-physikalischen Classe. 1871. Hft. III. 1872. Hft. I. Ebd. 1871. 72. 8.

Transactions of the Zoëlogical Society of London. Vol. VII. Part. 7. 8. Vol. VIII. Part. I. London 1871. 72. 4.

Proceedings of the Zoëlogical Society of London. 1871. Part. 2. 3. Ebd. 8.

Nature 140. 141. 142. 143. 144.

C. F. Naumann, Lehrbuch der Geognosie. Bd. III. L. 3. Leipzig 1872. 8.

Monatsbericht der Berliner Ak. d. Wissensch. März 1872.

Mémoires de la Société des sciences phys. et nat. de Bordeaux. T. VIII. 3me Cahier.

1. u. 2. Jahresbericht d. naturwiss. Vereins zu Magdeburg nebst den Sitzungsberichten vom J. 1871. Magdeb. 1872. 8.

Abhandlungen d. naturwiss. Vereins zu Magdeburg. H. 1. u. 3. 8.

Proceedings of the American philosophical Society. Vol. XII. Jan. to July 1871. Nr. 86. Philadelphia.

Bulletin of the Museum of comparative Zoëlogy, of Harvard College, Cambridge, Mass. Vol. III. N. I. 8.

Annual Report of the Trustees of the Mus. of comp. Zoëlogy for 1870. Boston 1871. 8.

Archives of Science and Transactions of the Orleans County Society of natural Sciences. Vol. I. Nr. 1, 2, 3. Newport, Orleans Co. 1871. 8.

Ch. Tomlinson and van der Mensbrugghe, on supersaturated Solutions. P. III. London 1872. 8.

Bulletin de l'Académie impér. des sciences de St. Petersburg. T. XVII. fol. 1—26. St. Petersb. 1871—72. 4.

Mg. Friedr. Schmidt, wissenschaftl. Resultate der zur Aufsuchung eines angekündigten Mammuthcadavers an den untern Jeneisnei ausgesandten Expedition. St. Petersb. 1872. 4.

E. von Asten, Resultate aus O. v. Struve's Beobachtungen der Uranustrabanten. St. Petersb. 1872. 4.

A. Schiefner ausführl. Bericht über Baron v. Uslar's Awarische Studien. St. Petersb. 1872. 4.

V. Bauniakowsky, Considérations sur quelques singularités dans les constructions de la Géométrie Non-Euclidienne. St. Petersb. 1872. 4.

Raoul-Pictet, sur la vision binoculaire. St. Petersb. 1872. 4.

(Fortsetzung folgt.)

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

25. September. № 23. 1872.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Ueber die elektromotorische Kraft sehr dünner Gasschichten auf Metallplatten.

Von F. Kohlrausch, corresp. Mitgliede.

Die sogenannte Polarisation der Elektroden durch ausgeschiedene Gase bietet ausser dem bisher meistens untersuchten Falle des Maximums oder doch eines Zustandes, der sich nicht weit vom Maximum entfernt, eine zweite beachtenswerthe Seite. Ich meine den anderen Grenzfall beliebig dünner Gasüberzüge, der, wenn er auch praktisch selten von Bedeutung wird, ein um so grösseres Interesse in theoretischer Beziehung verdient; denn er betrifft eine von denjenigen Erscheinungen, bei denen die Molecularkräfte eines Körpers durch eine andere Schicht hindurch wirken.

Man sieht leicht, dass es vorläufig nicht möglich ist, dünne Gasschichten von bekannter Menge in Berührung mit Flüssigkeiten dauernd herzustellen. Und wenn auch die Gesetze der Diffusion hinreichend bekannt wären, um die Gasmenge zu berechnen, welche sich bei einem dauernden schwachen Strom — so schwach na-

türlich, dass es zu einer Entwicklung von Gas-Blasen noch nicht kommt — auf einer Elektrode befindet, so bliebe doch noch eine zweite Frage übrig, nämlich in wie weit die diffundirten Mengen in der Nachbarschaft der Elektrode zur elektromotorischen Kraft beitragen.

Demnach erscheint es nothwendig, mit nur momentaner Gasentwicklung zu arbeiten. Edlund[1]) hat einige Versuche angestellt, bei denen die elektromotorische Kraft in einem aus einer galvanischen Säule und einem Wasser-Voltameter bestehenden Kreise gemessen wurde, nachdem der Kreis ungefähr $^1/_{50}$ Secunde lang geschlossen gewesen war. Durch Vergleichung mit der Kraft der Säule allein ergab sich die Polarisation des Voltameters nach dieser kurzen Zeit bereits gleich $^3/_5$ Daniell, also etwa gleich einem Viertel des durch beliebig starke Gasentwicklung zu erreichenden Maximums. Eine quantitative Bedeutung würde dieses Resultat erst durch die Kenntniss der Elektrodenfläche und der absoluten Stromstärke erhalten, die aber von Edlund nicht mitgetheilt wird.

Andrerseits hat Becquerel[2]) eine Beziehung zwischen der Gasmenge und der Polarisation gesucht, indem er eine zu verschiedenen Schlagweiten geladene Leidener Flasche durch ein Voltameter entlud und das letztere gleich nachher mit einem Galvanometer verband. Hierbei zeigte sich für schwache Ladungen der Nadelausschlag nahezu der Schlagweite proportional. Mögen nun auch manche Einwände gegen ein solches Verfahren bestehen, mit welchem absolute Zahlenwerthe natürlich nicht gewonnen werden können, so wird durch diese Versuche

1) Pogg. Ann. LXXXV. 209.
2) Comptes rendus XXII. 381.

doch das an und für sich zu vermuthende Gesetz noch wahrscheinlicher gemacht, dass die elektromotorische Kraft sehr dünner Gasüberzüge ihrer Dicke proportional sei. Indem wir dieses Gesetz im Folgenden der Rechnung zu Grunde legen, wird die Uebereinstimmung der berechneten Werthe mit der Erfahrung seine Richtigkeit beweisen.

Um den Vortheil dauernder Beobachtungen zu erreichen und dennoch die Anhäufung von Gasmengen zu vermeiden, muss man mit Strömen arbeiten, welche ihre Richtung rasch wechseln, bei deren jedem aber die gleiche Elektricitätsmenge bewegt wird. Solche Ströme habe ich bei einer mit H. Nippoldt gemeinschaftlich ausgeführten Widerstandsbestimmung zersetzbarer Leiter angewandt [1]), und bei Gelegenheit dieser Arbeit wurden auch die Beobachtungsreihen gewonnen, welche unten angegeben werden.

Die von einem innerhalb eines Multiplicators rotirenden Magnet inducirten Ströme wurden durch eine Röhre mit verdünnter Schwefelsäure geleitet, deren Platin-Elektroden den Querschnitt von 108 □mm möglichst genau ausfüllten. Da die durch den einzelnen Strom (während einer halben Umdrehung des Magnets) zersetzte Wassermenge auf weniger als 2 Milliontel Milligramm zu veranschlagen war, also die Dicke der zersetzten Wasserschicht auf weniger als $\frac{1}{50000000}$ Millimeter, so erwarteten wir die Wirkung der Polarisation verschwinden zu sehen. Anstatt dessen aber fand sich der Ausschlag eines Weber'schen Elektro-Dynamometers, wenn man abwechselnd die Flüssigkeit und einen ebenso gro-

1) Diese Nachrichten, 1868 S. 415; 1869 S. 14.

ssen metallischen Widerstand einschaltete, im ersteren Falle bei langsamer Rotation viel kleiner, so dass z. B. für 6 Drehungen in der Secunde mit eingeschalteter Flüssigkeit kaum noch ein Ausschlag nachzuweisen war, während er bei nur metallischer Leitung noch mehrere Scalentheile betrug. Was aber zunächst ganz paradox erschien, war der Umstand, dass oberhalb einer bestimmten Rotationsgeschwindigkeit die Ausschläge mit der Flüssigkeit umgekehrt erheblich grösser ausfielen. (Vgl. S. 461 die Tabelle.)

Die folgende Betrachtung giebt die vollständige Erklärung dieser unerwarteten Erscheinungen aus der Annahme, dass so geringe Gasmengen wie die obigen noch erheblich elektromotorisch wirksam sind, und liefert ausser der Bestätigung der anfänglichen Proportionalität der Polarisation mit der Gasmenge noch das Zahlenverhältniss beider Grössen.

Rechnen wir die Stromstärke i nach einer bestimmten Richtung positiv, so ist zu einer beliebigen Zeit t die nach dieser Richtung durchgegangene Elektricitätsmenge gleich $\int i dt$. Die Menge der Zersetzungsproducte ist der Elektricitätsmenge proportional; die durch sie entwickelte elektromotorische Kraft, nach derselben Seite wie i positiv genommen, können wir also durch

$$- p \int i dt$$

bezeichnen. p, nämlich die von dem Durchgang der Elektricitätsmenge Eins erzeugte elektromotorische Kraft, ist nach unseren Voraussetzungen eine mit der Elektrodenfläche f umgekehrt proportionale Constante. (Man kann pf die erste Polarisationsconstante der Wasserzersetzung nen-

nen; die zweite wird durch das von starken dauernden Strömen hervorgebrachte Maximum der Polarisation gegeben).

Der Umstand, dass die alternirenden Ströme an derselben Elektrode successiv Wasserstoff und Sauerstoff ausscheiden, thut gar nichts zur Sache, falls die Ausscheidung eines Gases sofort die Neutralisirung der äquivalenten Menge des etwa vorhandenen anderen zu Wasser bewirkt, was wir wohl als das wahrscheinliche annehmen dürfen. Sollten aber auch Sauerstoff und Wasserstoff eine Zeitlang neben einander bestehen können, so muss dieses Gemisch dennoch unwirksam sein, weil es, symmetrische Verhältnisse vorausgesetzt, immer auf beiden Elektroden in ganz gleicher Menge vorhanden wäre. Ich brauche kaum zu erwähnen, dass bei unseren Versuchen eine Bildung von Gasblasen niemals sichtbar wurde; auch eine dauernde Polarisation nach Beendigung eines Versuches wurde trotz mehrfacher Proben niemals gefunden.

Um die gesammte elektromotorische Kraft zu erhalten, führen wir zunächst die von dem rotirenden Magnet inducirte Kraft ein. Nennen wir 2τ die Dauer einer Umdrehung (τ die Dauer eines einseitigen Stromes) so lässt die Kraft sich bei der Gestalt des Inductors (vgl. Pogg. Ann. 138. S. 291) darstellen durch

$$\frac{k}{\tau} \sin \frac{\pi}{\tau} t.$$

Endlich kommt die in der durchlaufenen Leitung mit mehreren Drahtrollen erhebliche Induction des Stromes auf sich selbst hinzu, die durch

$$- q \frac{di}{dt}$$

bezeichnet werde. k und q sind constante Grössen.

Ist nun w der gesammte Widerstand der Leitung, so hat man

$$wi = \frac{k}{\tau} \sin \frac{\pi}{\tau} t - q \frac{di}{dt} - p \int idt,$$

welcher Gleichung man durch Differentiation nach t die Gestalt geben kann

$$q \frac{d^2 i}{dt^2} + w \frac{di}{dt} + pi = \frac{k\pi}{\tau^2} \cos \frac{\pi}{\tau} t.$$

Das vollständige Integral dieser Gleichung ist

$$i = \frac{k}{\tau} \frac{w \sin \frac{\pi}{\tau} t + (p \frac{\tau}{\pi} - q \frac{\pi}{\tau}) \cos \frac{\pi}{\tau} t}{w^2 + (p \frac{\tau}{\pi} - q \frac{\pi}{\tau})^2}$$

$$+ C_1 e^{-\frac{t}{2q}(w + \sqrt{w^2 - 4pq})} + C_2 e^{-\frac{t}{2q}(w - \sqrt{w^2 - 4pq})}.$$

Die Exponentialgrössen aber nähern sich mit wachsendem t der Null, und zwar können sie zu den Zeiten der Beobachtung, die immer erst nach einer grossen Anzahl von Umdrehungen eintrat, erfahrungsgemäss vernachlässigt werden.

Den übrigbleibenden Ausdruck kann man vereinfachen, indem man den Anfangspunct der Zeitrechnung, der bisher von dem Durchgang des Magnets durch die Normale der Windungsebene des Multiplicators an gerechnet wurde, um $\frac{\tau}{\pi}$ arc tg $\left[\frac{1}{w} (p \frac{\tau}{\pi} - q \frac{\pi}{\tau})\right]$ nach rückwärts verlegt. Dadurch entsteht der einfache Ausdruck

$$i = \frac{k}{\tau} \frac{\sin \frac{\pi}{\tau} t}{\sqrt{w^2 + (p \frac{\tau}{\pi} - q \frac{\pi}{\tau})^2}}.$$

Trotz Extraströmen und Polarisation bleibt die Stromstärke also eine einfache Sinusfunction des Drehungswinkels. Nur sind die Stromstärken Maximum und Null gegen die Durchgänge des Magnets durch die Windungsebene resp. deren Normale um obige Grösse verschoben, und der Strom ist gegen denjenigen, welcher im gleichen Widerstande w ohne Polarisation und Extrastrom entstehen würde, im Verhältniss $\left[1 + (\frac{p}{w} \frac{\tau}{\pi} - \frac{q}{w} \frac{\pi}{\tau})^2\right]^{-\frac{1}{2}}$ geschwächt.

Man bemerkt sofort, dass es eine bestimmte Umdrehungsgeschwindigkeit giebt, bei welcher die beiden, einzeln den Strom schwächenden, Wirkungen der Polarisation und des Extrastromes sich gegenseitig vollkommen aufheben, nämlich für die Umdrehungsdauer $2\tau = 2\pi\sqrt{\frac{q}{p}}$. Gleichzeitig wird auch die Verschiebung der Function gleich Null.

Dieses mir völlig unerwartete Resultat erscheint nicht ohne Bedeutung, indem es vielleicht ein Mittel an die Hand geben wird, die schädliche Wirkung des Extrastromes in den Magnetelektrisirmaschinen abzuschwächen. Bei rascher Rotation wird sich die primäre elektromotorische Kraft eines Stöhrer'schen oder Siemens'schen Inductors ohne Zweifel genähert als Sinusfunction darstellen, und so müsste für jede

Drehungsgeschwindigkeit eine bestimmte Combination von Platinplatten in Schwefelsäure gefunden werden können, welche eingeschaltet die Schwächung durch die Extraströme compensirt.

Der S. 456 beschriebene Charakter der bei unseren Versuchen gefundenen Erscheinungen findet sich wie man leicht sieht in obiger Formel vollkommen wieder. Hat τ den Werth $\pi\sqrt{\frac{2q}{p}}$, so ist $\left(p\frac{\tau}{\pi}-q\frac{\pi}{\tau}\right)^2=q^2\frac{\pi^2}{\tau^2}$, d. h. die Stromstärke ist ganz dieselbe wie ohne Polarisation. Solange τ grösser als obiger Werth, sind die Ströme geschwächt; sobald es kleiner, sind sie verstärkt. Ganz in Uebereinstimmung hiermit stehen die Beobachtungen.

Um dieselben quantitativ zu prüfen und zu verwerthen, muss die Wirkung d. h. das mittlere Drehungsmoment obiger Ströme auf das Bifilar-Dynamometer bestimmt werden. Dasselbe ist proportional mit

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau i^2\,dt=\frac{b^2}{2\tau^2}\,\frac{1}{w^2+\left(p\frac{\tau}{\pi}-q\frac{\pi}{\tau}\right)^2}.$$

Der Dynamometer-Ausschlag α, solange er klein ist, kann hiermit ebenfalls proportional gesetzt werden, lässt sich also ausdrücken, indem wir für τ die Umdrehungszahl in 1 Secunde $n=\frac{1}{2\tau}$ einführen,

$$\alpha=\frac{A.\,n^2}{w^2+\left(\frac{p}{2\pi n}-q.2\pi n\right)^2}.$$

Von den Constanten kann A aus Beobachtungen mit bloss metallischem Widerstande [1]) ermittelt werden und fand sich $A = 7700$. Diess eingeführt erhält man aus den unten folgenden Zahlen die anderen Constanten

$$w = 271,4 \quad p = 74800 \quad q = 0,5027.$$

In der Tabelle werden Beobachtung und Rechnung zusammengestellt. In der letzten Spalte sind die ganz abweichenden Ausschläge berechnet, welche derselbe metallische Widerstand anstatt des Elektrolyten ergeben würde.

Umdreh.-Zahl.	Ausschlag des Dynam. in Scalentheilen		ber.—beob.	Ausschl. bei gleich.metall. Widerstande
	beobachtet	berechnet		
5,90	0,08	0,07	—0,01	3,6
8,56	0,3	0,29	—0,01	7,6
9,61	0,5	0,46	—0,04	9,5
10,79	0,9	0,73	—0,17	12,0
13,59	2,1	1,8	—0,3	18,8
19,22	7,1	7,4	+0,3	36,8
27,19	29,9	28,7	—1,2	70,2
38,45	99,5	104,4	+4,9	129
54,37	304	300	—4	220
76,90	556	559	+3	342

Die Uebereinstimmung ist so gut, wie die nur gelegentlich und ohne Absicht ihrer Verwendung gemachten Beobachtungen (l. c.) erwarten lassen. Aber nicht nur das, sondern die beiden Constanten w und q, wie sie aus diesen Beobachtungen abgeleitet wurden, stimmen hinreichend genau mit den zu erwartenden Werthen

1) Jahresber. d. Frankf. Phys. Vereins, 1867/8 S. 75.

überein. Die Zahl q folgt nämlich aus den Beobachtungen mit bloss metallischer Leitung = 0,5217; den Widerstand w genau zu bestimmen, fehlen die genauen Angaben über die Schicht der Schwefelsäure. Ich würde als wahrscheinlichen Werth etwa $w = 250$ geschätzt haben.

Die Zahl $p = 74800$ bedeutet nach dem früheren diejenige elektromotorische Kraft, welche die Elektricitätsmenge Eins (welche bei dem Strome 1 in der Zeit 1 durch einen Querschnitt fliesst) durch Beladung der 108 □^{mm} grossen Elektroden mit äquivalenten Mengen Sauerstoff und Wasserstoff hervorbringen würde, wenn die Proportionalität zwischen elektromotorischer Kraft und Gasmenge bis zu dieser Ladung gültig wäre. Da die Widerstände oben in Siemens'schen Quecksilbereinheiten ausgedrückt sind, so gilt als Einheit der elektromotorischen Kraft diejenige Kraft, welche in dieser Widerstandseinheit den Strom Eins hervorbringt. (Nach welcher Stromstärke man rechnen will, bleibt sich gleich, weil die Einheiten der Elektricitätsmenge und der elektromotorischen Kraft sich in gleichem Verhältniss mit der ersteren ändern.)

Um von 108 auf 1 □^{mm} zu reduciren, muss man 74800 mit 108 multipliciren, und erhält die Zahl 8080000. Am verständlichsten sprechen wir die Bedeutung dieser Zahl so aus:

Wenn der Strom Eins, nach Weber'schem magnetischen Maasse, $\frac{1}{8080000} =$ 0,000000124 Secunden lang zwischen Platinelektroden von 1 □^{mm} Fläche Wasser zersetzt hat, so ist dadurch die elektromotorische Kraft der Polarisation

1 Siem. Weber entstanden. Oder auch, da in dieser Einheit Daniell = 11,7 ist[1]),

der Strom 1 Weber bringt in $\frac{1}{690000}$ = 0,00000145 Sec. auf Elektroden von 1 □mm die Polarisation von 1 Daniell hervor.

Um die Zahlen auf die ausgeschiedenen Gasschichten zurückzuführen, ist zu erwägen, dass durch den Strom 1 Weber in 1 Sec. 0,00933 Mgr., also in 0,000000124 Sec. 0,0000000116 Mgr. Wasser zersetzt, oder 0,0000000013 Mgr. Wasserstoff und 0,0000000103 Mgr. Sauerstoff ausgeschieden werden. Diese Mengen als Ueberzüge auf Platinplatten von je 1 □mm geben also die elektromotorische Kraft 1 Siem. Weber. Oder auch: Die Polarisation = 1 Daniell wird durch Schichten von 0,0000000015 Mgr. Wasserstoff und 0,000000012 Mgr. Sauerstoff auf dem Quadrat-Millimeter hervorgebracht.

Das Gesetz der Proportionalität der elektromotorischen Kraft mit der Gasmenge ist selbstverständlich nur eine erste Annäherung. Innerhalb der obigen Versuchsgrenzen mindestens scheint diese Annäherung noch merklich richtig zu sein, d. h. bis zu einer Beladung des Quadrat-Millimeter der Elektrode mit etwa 0,000000001 Mgr. Wasserstoff resp. 0,000000008 Mgr. Sauerstoff, welcher Ladung nach dem Früheren eine elektromotorische Kraft von 0,6 Daniell entspricht. Die grösste während eines Inductionsstosses durchgehende Elektricitätsmenge ist nämlich, wenn Polarisation und Extrastrom sich aufheben, d. h. für $n=61$,

1) Nachr. 1870 S. 402.

$$\int_0^\tau i dt = \frac{k}{\tau w} \int_0^\tau \sin \frac{\pi}{\tau} t \, dt = \frac{2}{\pi} \frac{k}{w}.$$

Nun war k = 0,0824 bestimmt worden (Pogg. Ann. 138, S. 294), ferner ist w = 271,4, also die Menge = 0,000193. Auf 1 □^{mm} Elektrodenfläche kommt also die zersetzte Wassermenge $\frac{0,000193 . 0,00933}{108}$ = 0,0000000167 Mgr. Da sich nach der Gleichung für i ein symmetrischer Zustand herstellt, so wird offenbar die erste Hälfte der durch einen Stoss ausgeschiedenen Gasmenge immer zur Neutralisation der von dem vorigen Stoss übriggebliebenen entgegengesetzten Ladung verbraucht, und nur die andere Hälfte kommt als freier Ueberzug zur Wirkung. Daraus folgen obige Zahlen.

Die räumliche Dicke der Schichten ist unbekannt, solange man über den Verdichtungszustand der Gase an den Oberflächen nichts weiss. Die gewöhnliche Gasdichte angenommen, entspräche der Polarisation 1 Daniell die Dicke 0,000008 Mm. der Sauerstoffschicht. Setzte sich endlich die Proportionalität bis zu dem Maximum 2,4 Daniell fort, d. h. bis zu der Grenze, wo das Platin nicht mehr wirkt, so wäre die Dicke der Sauerstoffschicht 0,00002 Mm. Es ist vielleicht nicht ohne Interesse, dass letztere Zahl wenn auch wie zu erwarten nicht gleich, doch von derselben Ordnung ist, wie die aus optischen Erscheinungen von Quincke abgeleitete Zahl, über welche hinaus die Molecularkräfte unwirksam erschienen. (Nachr. 1869. 217.)

Eine zweite, angenäherte Bestimmung der Polarisationsconstante habe ich aus einer anderen Versuchsreihe folgendermassen erhalten. Wie S. 460. erwähnt, muss $\tau = \pi \sqrt{\frac{2q}{p}}$ oder die Umdrehungszahl $n = \frac{1}{2\tau} = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{p}{8q}}$ sein, damit die Stromstärke mit eingeschalteter Flüssigkeit dieselbe ist wie mit eingeschaltetem gleichen metallischen Widerstand. Es wurde zwischen den früheren Elektroden eine Säule von verdünnter Schwefelsäure eingeschaltet, deren Widerstand nahe gleich 125,5 Siem. bekannt war. Man musste nun, um gleiche Ausschläge des Dynamometers zu erhalten, diese Säule vertauschen

bei der Drehungszahl 25,7 51,3 72,6
mit dem Widerstande 160 96 71 Siem.

Eine graphische Interpolation ergiebt daraus, dass 125,5 Siem. bei $n = 37,5$ denselben Ausschlag ergeben hätten, wie die Flüssigkeit. Danach wird $p = 8\pi^2 . q . 37,5^2$ oder da $q = 0,513$ war, $p = 57000$. Die Elektricitätsmenge $\frac{1}{108p} = 0,000000163$ würde also nach dieser zweiten Bestimmung die elektromotorische Kraft 1 Siem. Web. erzeugen. Die Zahl stimmt mit der vorigen 0,000000124 so weit überein, wie es diese, überhaupt nur als vorläufig zu betrachtenden, Versuche erwarten lassen.

Darmstadt im September 1872.

Verzeichniss der bei der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangenen Druckschriften.

Juni, Juli. (Fortsetzung.)

Die Werke mit * in spanischer Sprache.

Oscar Grimm, Beiträge zur Lehre von der Fortpflanzung u. Entwicklung der Arthropoden. St. Petersb. 1872. 4.

Al. Bunge, die Gattung Acantholimon Boiss. St. Petersburg 1872. 4.

V. Fuss, über die astronomische Strahlenbrechung in der Nähe des Horizonts. St. Petersb. 1872. 4.

L. Stephani, die Antiken-Sammlung zu Pawlowsk. St. Petersb. 1872. 4.

S. Brassai, des Siebenbürgischen Museums-Vereins Jahrbücher. Bd. VI. H. 1. Klausenburg 1872. 4. (in ungar. Spr.)

Schriften der neurussischen naturforsch. Gesellschaft. Th. I. H. 1. Nebst 2 Beilagen. Odessa 1872. 8. (in russ. Spr.)

*Annalen der Universität von Chile. 14 Hefte von 1869. St. Jago de Chile 1869. 8.

*J. A. Torres, Lösung der Frage bezüglich der Gränzen zwischen Chile und Bolivia. St. Jago 1863. 8.

*Officieller Catalog der nationalen Agricultur-Ausstellung in St. Jago. Valparaiso 1869. 8.

*Sammlung von Vorträgen zwischen der Republik von Chile und auswärtigen Staaten. T. 1. St. Jago 1857. 8.

*Wahl-Gesetz der Republik Chile. St. Jago 1861. 8.

*Berichte der Minister der Finanzen, des Krieges, der Marine, des Auswärtigen, des Innern, der Justiz, des Cultus, und des öffentl. Unterrichts an den National-Congress. 6 Bände. St. Jago 1869. 8.

*A. Covarrubias, Bericht über die landwirthschaftl. Ausstellung zu St. Jago 1869. Valparaiso 1869. fol.

*Gesetz über die Wählerliste von 1869. St. Jago 1869. 8.

*Documente über das Bündniss zwischen den spanisch-amerikanischen Völkern. St. Jago 1862. 8.

*Rede des Präsidenten bei Eröffnung des Nationalcongresses 1869. 8.

*Gesetz über die innern Angelegenheiten. St. Jago 1863. 8.

*Statistischer Jahresbericht der Republik Chile. T. X. von 1868 und 1869. St. Jago 1870. 4.

Verhandlungen des naturforsch. Vereins in Brünn. Bd. IX. 1870.

Neues Lausitzisches Magazin. B. 49. Erste Hälfte. 1872.

Bulletin de l'Académie roy. de Belgique. 41. annèe. 2. série. T. 33. Nr. 6. 1872.

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

9. October. №. 24. 1872.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Die Lie'sche Integrationsmethode der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung.

Von A. Mayer in Leipzig.

Mitgetheilt von A. Clebsch.

In der Sitzung der Academie zu Christiania vom 10. Mai dieses Jahres hat Herr Lie die Umrisse einer neuen Integrationsmethode der partiellen Differentialgleichungen 1ter O. entwickelt und darüber vom 19. Juni auch der Kgl. Gesellschaft eine Mittheilung gemacht. Diese aus gewissermassen geometrischen Betrachtungen hervorgegangene Methode, welche die zur Ermittelung einer vollständigen Lösung erforderlichen Integrationen genau um dieselbe Anzahl verringert, wie das Verfahren, welches ich in meinem Schreiben vom 12. Juni und ausführlicher in den Mathematischen Annalen, Bd. V. p. 466 auseinandergesetzt habe, gründet sich auf den Satz[1]), dass wenn H und H_1 irgend 2 solche Functionen von $q_1 \,.\,.\, q_n\, p_1 \,.\,.\,.\, p_n$ sind, welche der Bedingung:

1) Vgl. Satz 3 und 4 der Lie'schen Note vom 10. Mai.

$$\sum_{h=1}^{h=n} \left(\frac{\partial H}{\partial q_h} \frac{\partial H_1}{\partial p_h} - \frac{\partial H}{\partial p_h} \frac{\partial H_1}{\partial q_h}\right) = 0$$

Genüge leisten, die simultane Integration der beiden partiellen Differentialgleichungen mit n unabhängigen Variabeln

$$H = \text{const.}, \; H_1 = \text{const.} \quad \left(p_h = \frac{\partial V}{\partial q_h}\right)$$

zurückgeführt werden kann auf die vollständige Integration einer einzigen partiellen Differentialgleichung 1ter O., die nur noch $n - 1$ unabhängige Variabeln enthält, in der Art, dass sich aus einer beliebigen vollständigen Lösung dieser letzteren Gleichung durch blosse Differentiation und Elimination eine gemeinsame Lösung der beiden gegebenen Gleichungen ableiten lässt. Es fehlt aber in den Lie'schen Mittheilungen die nähere Angabe, wie diese Differentiation und Elimination anzustellen sei. Diesem Mangel soll die vorliegende Note abhelfen. Nach eingehender persönlicher Besprechung des Gegenstandes mit Herrn Lie ist es mir gelungen, mit Hülfe zweier Sätze aus meiner Mittheilung vom 21. August, eine allgemein gültige algebraische Regel für diese Zurückführung zu finden. Es zeigt sich, dass dieselbe nicht nur auf eine, sondern auf unendlich viele Arten bewirkt werden kann. Die wie mir scheint einfachste Art giebt der folgende Satz an:

Wenn H und H_1 irgend zwei Functionen der $2n$ Variabeln $q\, q_1 \ldots q_n\, p_2 \ldots p_n$ sind, welche der Bedingung:

$$\frac{\partial H_1}{\partial q} - \frac{\partial H}{\partial q} + \sum_{h=2}^{h=n} \left(\frac{\partial H_1}{\partial q_h} \frac{\partial H}{\partial p_h} - \frac{\partial H_1}{\partial p_h} \frac{\partial H}{\partial q_h}\right) = 0$$

identisch genügen, so besitzen die beiden partiellen Differentialgleichungen mit $n+1$ unabhängigen Variabeln

$$1)\ \frac{\partial V}{\partial q} + H = 0,\quad 2)\ \frac{\partial V}{\partial q_1} + H_1 = 0,\ \left(p_h = \frac{\partial V}{\partial q_h}\right)$$

eine gemeinsame vollständige Lösung mit $n-1$ willkürlichen Constanten[1]), die man durch vollständige Integration einer einzigen partiellen Differentialgleichung mit n unabhängigen Variabeln folgendermassen finden kann:

Man führt statt q_1 eine neue Variable x_1 ein durch die Gleichung:

$$q_1 = a_1 + (q - a)\, x_1,$$

in der a und a_1 unbestimmte Constanten sind, und integrirt die partielle Differentialgleichung

$$3)\ \frac{\partial V}{\partial q} + H + x_1 H_1 = 0,$$

in der x_1 nur als Constante auftritt, vollständig. Ist:

$$V = f(q\, x_1\, q_2 \ldots q_n\, c_2 \ldots c_n)$$

eine beliebige vollständige Lösung derselben, so setze man:

$$V = f - f_a + b_2 a_2 + b_3 a_3 + \ldots b_n a_n,$$

worin

$$f_a = f(a\, x_1\, a_2 \ldots a_n\, c_2 \ldots c_n)$$

1) Ich sehe auch hier wieder stets von der bloss additiven willkürlichen Constante ganz ab.

ist und für $a_2 \ldots a_n$ $c_2 \ldots c_n$ ihre Werthe aus den $2n - 2$ Gleichungen

$$\frac{\partial f_a}{\partial c_h} = \frac{\partial f}{\partial c_h}, \quad \frac{\partial f_a}{\partial a_h} = b_h$$

zu substituiren sind. Man erhält hierdurch eine Function V von q x_1 $q_2 \ldots q_n$ und den willkürlichen Constanten $b_2 \ldots b_n$, die eine gemeinsame vollständige Lösung der beiden partiellen Differentialgleichungen zwischen V und den Variabeln q x_1 $q_2 \ldots q_n$

$$4) \quad \frac{\partial V}{\partial q} + H + x_1 H = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial x_1} + (q-a) H_1 = 0$$

ist und die daher, wenn man in derselben rückwärts

$$x_1 = \frac{q_1 - a_1}{q - a}$$

setzt, übergeht in eine simultane vollständige Lösung der beiden gegebenen Gleichungen 1) und 2).

Die nähere Begründung dieses Satzes, sowie die (übrigens ziemlich evidente) Ausdehnung auf mehr als 2 simultane partielle Differentialgleichungen, muss ich mir für eine ausführlichere Veröffentlichung vorbehalten. Es sei mir hier nur noch gestattet, mit einigen Worten den Gang anzudeuten, der mich zu diesem Satz geführt hat. Ich zeige zunächst mit Hülfe des Satzes 4. meiner letzten Mittheilung, dass man, sobald man eine vollständige Lösung der Gleichung 1) kennt, die simultane Integration der beiden Gleichungen 1) und 2) zurückführen kann auf die Integration einer partiellen Differentialgleichung mit n unabhängigen Variabeln, die

frei von q ist — eine Zurückführung, die in einer anderen und mannigfachen Ausnahmen unterworfenen Art übrigens schon früher von Korkine[1]) bewirkt worden ist. — Diese letztere partielle Differentialgleichung, die an Stelle von V eine neue unbekannte Function W enthält und deren unabhängige Variabeln neben q_1 die Integrationsconstanten der zu Grunde gelegten vollständigen Lösung von 1) sind, will ich, nur des bequemern Ausdruckes wegen, hier die Resultante der beiden Gleichungen 1) und 2) nennen. Diese Resultante wird eine andere, sobald man von einer anderen vollständigen Lösung der Gleichung 1) ausgeht. Man kann sie daher im Allgemeinen nur bilden, nachdem man bereits die Gleichung 1) vollständig integrirt hat. Aus dem Umstande aber, dass in der Resultante q gar nicht vorkommt und dass es daher auch gestattet sein muss, in den Gleichungen, aus denen durch blosse algebraische Operationen die Resultante hervorgeht, der Variabeln q einen beliebigen Werth beizulegen, ergiebt sich, dass man für eine bestimmte vollständige Lösung der Gleichung 1) die Resultante aufstellen könnte, auch ohne diese Lösung selbst zu kennen, sobald man nur wüsste, welchen Werth dieselbe für einen gegebenen Werth a von q erhält. Nun lehrt Satz 1., in meiner Note vom 21. August, wie man aus einer beliebigen Lösung der Gleichung 1) eine andere Lösung ableiten kann, die für $q = a$ einen vorgeschriebenen Werth annimmt. Sobald man daher eine solche, a priori bestimmte vollständige Lösung der Gleichung 1) zu Grunde legt, wird man die Resultante der Gleichungen 1) und 2) auch bil-

1) Comptes rendus t. 68 p. 1460.

den können vor jeder Integration der Gleichung 1). Indem man nun schliesslich die beiden Gleichungen 1) und 2) durch Einführung der Variabeln x_1 an Stelle von q_1 auf die Form 4) bringt, erkennt man, dass für gewisse solche, von vornherein bestimmte Lösungen [1]) der Gleichung 3) die Resultante der beiden Gleichungen 4) die Eigenschaft erhält, dass sie für $q = a$ sich auf

$$\frac{\partial W}{\partial x_1} = 0$$

reducirt; d. h. aber, da q in der Resultante gar nicht vorkommt, es ist

$$\frac{\partial W}{\partial x_1} = 0$$

selbst diese Resultante und damit die gleichzeitige Integration der beiden Gleichungen 4) zurückgeführt auf die vollständige Integration der einen Gleichung 3).

Diese Andeutungen werden hinreichen, um die vollkommene Analogie erkennen zu lassen, die besteht zwischen der Schlussweise, die mich auf rein algebraischem Wege zur Lie'schen Methode führt, und derjenigen, auf welche sich meine Integrationsmethode der partiellen Differentialgleichungen 1ter O. gründet. Sie verhüllen aber auch in keiner Weise, dass, solange es sich lediglich um die Integration der partiellen Differentialgleichungen handelt, die Methode von Lie in Resultat und Ableitung weitaus kürzer und schöner ist als die meinige. —

1) In dem oben gegebenen Satze ist diejenige vollständige Lösung der Gleichung 3) gewählt worden, die für $q = a$ den Werth erhällt

$$V = b_2\, q_2 + b_3\, q_3 + \ldots b_m\, q_m.$$

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

30. October. № 25. 1872.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Zur Theorie partieller Differentialgleichungen erster Ordnung, insbesondere über eine Classification derselben.

Von

Sophus Lie.

Vorgelegt von A. Clebsch.

In der nachstehenden Note bespreche ich zunächst das gegenseitige Verhältniss einiger Arbeiten, die neuerdings von Hr. Mayer (diese Nachrichten Nr. 15. Math. Annalen t. V, 3) und von mir (Berichte der Akademie zu Christiania, 3. und 10. Mai 1872, diese Nachrichten Nr. 16) veröffentlicht worden sind. Sodann entwickele ich eine allgemeine Auffassung der Begriffe: partielle Differentialgleichung erster Ordnung, vollständige Lösung etc., wie dieselbe meinen seitherigen Arbeiten über den Gegenstand zu Grunde liegt und die den gewöhnlichen gegenüber mehrere Erweiterungen enthält[1]. Ins-

1) Bei einer späteren Gelegenheit denke ich näher auseinanderzusetzen, in welcher Beziehung diese Theorien

besondere schliesst sich daran eine neue Classification der bez. partiellen Differentialgleichungen. Unter den Gleichungen mit $(n+1)$ Variabeln kann man nämlich ausser der Classe der linearen noch weitere $(n-1)$ Classen angeben, deren Lösung auf die vollständige Integration eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen zwischen nur $(n+1)$ Variabeln zurückgeführt werden kann. Zum Schlusse der Note deute ich noch an, wie die Combination der verschiedenen zur Lösung partieller Gleichungen entwickelten Methoden in gewissen Fällen wesentliche Vereinfachungen nach sich zieht.

I. Vergleich von Mayer's Integrationsmethode mit der meinigen.

Den Ausgangspunct, den Hr. Mayer in seiner Arbeit (vergl. bes. Math. Annalen t. V, 3) nimmt, besteht darin, dass er die Integration eines simultanen Systems von p totalen Differentialgleichungen zwischen $n+1$ Variabeln, welches unbeschränkt integrabel ist, auf die Integration eines reducirten Systems zurückführt, das aus p gewöhnlichen Differentialgleichungen besteht. Derselbe Ausgangspunkt findet sich auch bei mir, was ich freilich in meiner kurzen und geometrisch vorgetragenen Darstellung nur angedeutet habe[1]. Hr. Mayer fügt nun aber

zu allgemeinen Betrachtungen über mathematische Methoden stehen, welche Herr Klein in einer bald erscheinenden Abhandlung entwickeln wird.

1) Die im Texte gewählte Ausdrucksweise ist die analytische Formulirung meiner Theorie characteristischer Mannigfaltigkeiten. Eine frühere Bemerkung muss ich dahin berichtigen, dass die Integration eines integrabeln Ausdrucks $\Sigma X_i dx_i = 0$ durch nur eine gewöhnliche Differentialgleichung zuerst von Herrn Dubois Raymund gezeigt worden ist (Borchardt's Journal Bd. 72).

den sehr wichtigen Satz hinzu, dass die Auffindung eines Integral's des reducirten Systems die Kenntniss eines Integrals des totalen Systems zur Folge hat. Dieses Theorem, welches bei meiner Untersuchung kein Analogon hat, gestattet Hrn. Mayer nicht nur die neue Jacobi'sche Methode sondern auch die Clebsch'sche Behandlung des Pfaff'schen Problems zu vervollkommnen. Statt dessen führe ich ein Princip ein, welches gestattet, die Integration simultaner partieller Gleichungen mit grösstmöglicher Zahl gemeinsamer Lösungen auf die Integration einer einzigen partiellen Gleichung zwischen einer entsprechend erniedrigten Variabelnzahl zurückzuführen. Wenn es sich darum handelt, gegebene totale Gleichungen, die unbeschränkt integrabel sind, oder geg. partielle Gleichungen oder Systeme solcher zu integriren, so leisten die beiden Methoden dasselbe, was Zahl und Ordnung der nothwendigen Integrationen angeht. Hrn. Mayer's Theorie geht aber insofern weiter, als sie, wie bereits hervorgehoben, noch andere Probleme, insbesondere das Pfaff'sche, umfasst. Auf der anderen Seite glaube ich, dass, was partielle Differentialgleichungen angeht, meine Methode einfacher ist; sie gibt überdies, nach meiner Auffassung, einen tieferen Einblick in das Wesen der ganzen Theorie.

Am Schlusse dieser Note werde ich zeigen, wie vermöge meiner Methode diejenigen Fälle, welche man bisher als die ungünstigsten betrachtete, im Gegentheile gar keine weiteren Integrationen erfordern. Dies ist aber nicht für die Methode characteristisch, vielmehr lässt sich eine ähnliche Bemerkung auch hinsichtlich der Mayer'schen Theorie machen.

Ich muss hier noch hinzufügen, dass die wich-

tige, mir freilich nahe liegende Bemerkung Mayer's, dass jedes System totaler Gleichungen, d. h. auch solcher, die nicht unbeschränkt integrabel sind, sich auf ein äquivalentes System linearer partieller Gleichungen zurückführen lässt, sich mir nicht dargeboten hatte. Vermöge dieser Bemerkung kann offenbar jedes totale System auf ein aequivalentes totales System, welches unbeschränkt integrabel ist, und also auch auf ein reducirtes System zurückgeführt werden. Ich erinnere beispielsweise daran, dass in Hrn. Darboux's schöner Theorie partieller Differentialgleichungen beliebiger Ordnung eben Alles darauf hinauskommt, totale Systeme, die beschränkt oder unbeschränkt integrabel sind, zu erledigen.

II. Allgemeine Betrachtungen betreffend die Behandlung partieller Differentialgleichungen erster Ordnung und darauf gegründete Classification derselben.

1. Unter einer Berührungstransformation verstehe ich[1]) (vergl. Ber. der Akad. zu Christiania 1870. 71. 72. Math. Annalen t. V, 1) eine solche Transformation einer Mannigfaltigkeit

$$z, x_1, \ldots\ldots x_n,$$

vermöge deren diese ursprünglichen Variabeln und ihre partiellen Differentialquotienten

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = p_1, \ldots\ldots \frac{\partial z}{\partial x_n} = p_n$$

1) Herr Darboux theilte mir gelegentlich mit, dass auch er alle Berührungstransformationen bestimmt habe.

durch neue Variabeln

$$z', y_1, \ldots\ldots y_n$$

und deren partielle Differentialquotienten

$$\frac{\partial z'}{\partial y_1} = q_1, \ldots\ldots \frac{\partial z'}{\partial y_n} = q_n$$

ausgedrückt werden, wobei ich voraussetze, dass die bez. Gleichungen umkehrbar sind. Indem man zwischen diesen Gleichungen die p_i bez. q_i eliminirt, erhält man eine Anzahl Relationen zwischen den z, x und den z', y:

$$\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0, \ldots\ldots \varphi_\mu = 0,$$

wo μ von 1 anfangend bis zu $(n+1)$ aufsteigen kann. Diese μ Gleichungen repräsentiren die Transformation vollständig; auch kann jedes System solcher μ Gleichungen als eine Berührungstransformation interpretirt werden. Dem Werthe von μ entsprechend zerfallen die Berührungstransformation in Gruppen.

Ich bin erst in neuerer Zeit darauf aufmerksam geworden, dass Jacobi schon längst die Berührungstransformationen betrachtet hat als die allgemeinsten Transformationen einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung. Zwischen dem Jacobi'schen Begriffe einer solchen Transformation und dem hier vorliegenden findet nach meiner Auffassung insofern ein Unterschied statt, als ich den Einfluss der Transformation auf alle Werthsysteme

$$z, x_1 \ldots x_n, p_1 \ldots p_n$$

und nicht bloss auf diejenigen, die einer gegebenen Gleichung genügen, betrachte. Wenn Jacobi angiebt, dass die letzteren Transformationen die für die ersteren hier aufgestellte allgemeine Form ebenfalls besitzen, mit jenen also zusammenfallen, so hat man dies als einen Satz zu betrachten [1]).

Ich untersuche nun die partiellen Differentialgleichungen zunächst hinsichtlich aller solcher Eigenschaften, welche der Gesammtheit der Berührungstransformationen gegenüber einen invarianten Character haben. Man beweist bes. die folgenden Sätze:

Eine einzelne partielle Differentialgleichung 1. O. zwischen $n+1$ Variabeln hat keine Invariante; jede kann in jede andere durch Berührungstransformation umgeformt werden. (Für den vorliegenden Gesichtspunct sind also die linearen Gleichungen, die man sonst auszeichnet, von den übrigen nicht unterschieden). Ferner:

Systeme partieller Differentialgleichungen 1. O. haben Invarianten. Eine

1) Auf die Betrachtung von Transformationen partieller Differentialgleichungen erster Ordnung führt auch, wie mir Hr. Clebsch mündlich mitgetheilt hat, die Erweiterung der Untersuchungen über die von ihm eingeführten Connexe (diese Nachr. Nr. 22) auf die ähnlichen Gebilde aus Mannigfaltigkeiten von drei und mehr Dimensionen, welche derselbe in seiner Abhandlung »über eine Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie« (Abh. der kgl. Ges. zu Göttingen, Bd. 17) erwähnt hat. Der Schwerpunct dieser Untersuchungen (Geschlechtsbegriff etc.) ruht aber dabei auf der Eindeutigkeit und der algebraischen Natur der anzuwendenden Transformationen, ein Gesichtspunct, der in den obigen Untersuchungen zunächst nicht in den Vordergrund tritt.

invariante Beziehung ist z. B. die involutorische Lage [1]) zweier Gleichungen. —

Neben die Betrachtung aller Berührungstransformationen stellt sich als etwas Specielleres die Beschränkung auf die Betrachtung aller Puncttransformationen, d. h. solcher Transformationen, welche die z, x durch die z', y allein ausdrücken, die also der Annahme $\mu = n + 1$ in der allgemeinen Classentheilung der Berührungstransformationen entsprechen. Bei dieser Beschränkung treten bereits bei einer Gleichung invariante Eigenthümlichkeiten auf, und diese sind es, welche die sogleich vorzutragende Classification begründen [2]). Während der Berührungs-Transformations-Standpunct der richtige scheint, wenn es sich darum handelt, den allgemeinen begrifflichen Inhalt einer partiellen Differentialgleichung 1. O. zu exponiren, finden die Erleichterungen, welche in besonderen Fällen hinsichtlich der Integration eintreten können, ihre Würdigung auf dem Standpuncte der Punct-Transformationen. Für den letzteren bilden dann namentlich auch die linearen Gleichungen eine besondere Classe.

2. Mit der Betrachtung der Berührungstransformationen sind die folgenden Vorstellungen über partielle Differentialgleichungen erster Ordnung überhaupt, ihre vollständigen Lösungen insbesondere verknüpft. Das Werthsystem

1) Unter involutorischer Lage verstehe ich diejenige Beziehung zweier partieller Differentialgleichungen, vermöge deren sie die grösstmögliche Zahl gemeinsamer Lösungen gestatten.

2) Gleichungen höherer Ordnung haben Invarianten hinsichtlich der allgemeinen Berührungs-Transformationen; hierauf wird eine naturgemässe Classification derselben sich gründen lassen.

$$z, x, \ldots . x_n, p_1 \ldots . p_n$$

fasse ich als ein Individuum, als ein Element, wie ich sage. Unter den $(2n+1)$ fach unendlich vielen Elementen, die es gibt, werden $2n$ fach unendlich viele durch eine geg. partielle Differentialgleichung ausgeschieden, und diese heissen die Elemente der Gleichung. Vermöge dieser Vorstellung kann man auch eine Gleichung bloss zwischen den $(n+1)$ Veränderlichen z, $x_1 \ldots x_n$ als eine partielle Differentialgleichung auffassen, welcher nämlich alle diejenigen Elemente genügen, deren z, x die Gleichung befriedigen. Fundamental ist nun diejenige Beziehung einander benachbarter Elemente, die in ihrer vereinigten Lage besteht. Sind die beiden Elemente durch z, x, p und bez. $z+dz$, $x+dx$, $p+dp$ vorgestellt, so besteht die vereinigte Lage in dem Stattfinden der einfachen Gleichung

$$dz - p_1 \, dx_1 \ldots \ldots - p_n \, dx_n = 0,$$

eine Gleichung, die gegenüber einer beliebigen Berührungstransformation augenscheinlich invariant ist.

Beschränken wir uns der Einfachheit wegen nunmehr bei der Auseinandersetzung auf eine Mannigfaltigkeit von 3 Dimensionen, für die wir den Raum mit seinen Puncten wählen mögen. Benachbarte Elemente liegen vereinigt, wenn sie entweder ihren Punct gemein haben, oder wenn sie consecutive Berührungselemente einer Curve oder endlich einer Fläche sind. Alle Elemente die durch einen Punct gehen, alle

Elemente, die eine Curve berühren, alle Elemente, die eine Fläche bedecken, constituiren gleichförmig zweifach unendliche Mannigfaltigkeiten von Elementen, von denen jedes mit allen benachbarten vereinigt liegt. Das Problem, eine geg. partielle Differentialgleichung zu integriren, kann nun so ausgesprochen werden:

Alle zwiefach unendlichen Mannigfaltigkeiten dieser Eigenschaft zu bestimmen, die unter den vierfach unendlich vielen Elementen der Gleichung enthalten sind.

Dieses Problem der allgemeinen Lösung führt man auf die Aufgabe der vollständigen Lösung zurück, die nun folgende Gestalt annimmt:

Man soll die vierfach unendlich vielen Elemente der Gleichung auf eine Weise in derartige zwiefach unendliche Mannigfaltigkeiten zerlegen, wobei denn zwiefach unendlich viele solche Mannigfaltigkeiten zu bestimmen sind. Nimmt man nach willkürlichem Gesetze einfach unendlich viele derselben heraus, und sucht ihr Umhüllungsgebilde, so hat man die allgemeine Lösung.

Diese Formulirungen, welche sich gleichmässig auf beliebig viele Variable erstrecken, verlangen eine Erweiterung des analytischen Apparates, mit dem man gewöhnlich die Theorie der partiellen Differentialgleichungen darstellt. Eine vollständige Lösung einer Gleichung zwischen $(n+1)$ Variabeln braucht nicht aus einer Gleichung zwischen denselben und den n Constanten zu bestehen, sondern sie kann, je nach dem, durch $1, 2 \ldots . n$ Gleichungen repräsentirt sein, wobei aber die Zahl der willkürlichen Constanten immer gleich n sein muss. Wie um-

gekehrt jedes solches Gleichungssystem[1]) eine partielle Differentialgleichung zur Folge hat, für welche dasselbe eine vollständige Lösung repräsentirt, wie man ferner von dieser vollständigen Lösung zu beliebigen anderen Lösungen übergehen kann, mag hier an dem Beispiele von vier Variabeln z, x_1, x_2, x_3 und von zwei zwischen denselben bestehenden Gleichungen mit 3 Constanten:

$$f_1\,(z,\ x,\ a_1,\ a_2,\ a_3) = 0,$$

$$f_2\,(z,\ x,\ a_1,\ a_2,\ a_3) = 0$$

gezeigt werden.

Man setze:

$$p_i = -\frac{\dfrac{\partial (f_1 + \lambda f_2)}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial (f_1 + \lambda f_2)}{\partial z}} = \varphi_i$$

und eliminire zwischen diesen drei Gleichungen und den beiden gegebenen die vier Constanten a_1, a_2, a_3 und λ. So entsteht eine Gleichung zwischen z, x, p und diese ist die gesuchte partielle Differentialgleichung.

Man kennt eine vollständige Lösung derselben

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0.$$

1) Es wird hier wie gewöhnlich vorausgesetzt, dass die willkürlichen Constanten wirklich wesentliche Constanten sind.

Will man zu anderen Lösungen übergehen, so füge man beliebig

$$\psi\,(a_1, a_2, a_3) = 0$$

hinzu. Man verbinde hiermit die Gleichungen:

$$p_i = \varphi_i.$$

Betrachtet man nun die z, x und p so wie etwa a_3 als constant, so hat man:

$$0 = \frac{\partial \varphi_i}{\partial a_1} . da_1 + \frac{\partial \varphi_i}{\partial a_2} . da_2 + \frac{\partial \varphi_i}{\partial \lambda} . d\lambda$$

$$0 = \frac{\partial \psi}{\partial a_1} . da_1 + \frac{\partial \psi}{\partial a_2} . da_2 + \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} . d\lambda.$$

Aus diesen vier Gleichungen ergeben sich durch Elimination der drei Differentiale zwei Gleichungen zwischen z, x, p, a, λ:

$$\chi_1 = 0, \quad \chi_2 = 0.$$

Sodann wiederhole man denselben Process, indem man nicht a_3, sondern etwa a_2 als constant betrachtet, und findet:

$$\chi_3 = 0, \quad \chi_4 = 0.$$

Eliminirt man jetzt die 4 Grössen a, λ aus den fünf Gleichungen:

$$\psi = 0, \quad \chi_1 = 0, \quad \chi_2 = 0, \quad \chi_3 = 0, \quad \chi_4 = 0,$$

so erhält man eine (oder auch gelegentlich 2, 3, 4) Gleichung zwischen den z, x:

$$\Omega\,(z,\,x) = 0$$

und dieses ist die neue Lösung. — Denkt man die willkürlich angenommene Function ψ von 3 Constanten abhängig, so wird Ω eine neue vollständige Lösung.

In einer neueren Mittheilung (diese Nachrichten Nr. 21 vergl. auch Math. Ann. Bd. III, p. 435) hat Hr. Mayer darauf aufmerksam gemacht, dass die allgemeinen Regeln, welche Jacobi gegeben hat, um von den Lösungen einer partiellen Differential-Gleichung zu den Lösungen einer durch Berührungstransformation aus ihr abgeleiteten überzugehen, in vielen Fällen unzureichend sind, und hat andere Regeln aufgestellt, welche eben auch solche Fälle innerhalb gewisser Gränzen erledigen. Eine vollständige Behandlung dieser Frage verlangt nach meiner Auffassung die hier vorgetragenen Begriffs-Erweiterungen; die Behandlung der einzelnen Fälle wird alsdann vollkommen durchsichtig. Dabei ist aber das Folgende zu bemerken. Bei einer Berührungstransformation kann gelegentlich eine aber dann nur eine partielle Differential-Gleichung statt in eine neue in ein System von Gleichungen transformirt werden. Ist die Berührungstransformation gegeben, so kann man immer untersuchen, ob dieses der Fall ist, und welches ev. diejenige partielle Differential-Gleichung ist, die zu ihr in der fraglichen Beziehung steht (Math. Ann. t. V, p. 163).

3. Nach den Auseinandersetzungen der vorstehenden Nummer können unter den Lösungen einer partiellen Gleichung Gebilde auftreten,

welche durch 1, 2 . . . $n+1$ Gleichungen zwischen den $n+1$ Variabeln z, x repräsentirt werden. Auf dem Auftreten solcher Gebilde beruht nun meine Classification, wie sie hier für den Fall von 4 Variabeln auseinandergesetzt werden soll.

Eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung zwischen 4 Variabeln muss nothwendig in eine der folgenden Classen gehören:

1. Sie besitzt ∞^3 Gebilde nullter Dimension (Puncte) als Lösungen. Dann ist sie ohne Weiteres integrirt; sie enthält beim Gebrauche von Punct-Coordinaten die partiellen Differentialquotienten nicht mehr, sondern ist eine endliche Gleichung. Man kann die Lösung einer partiellen Differential-Gleichung als das Problem bezeichnen, die Gleichung durch Berührungstransformation auf diesen ersten Typus zu bringen.

2. Sie besitzt ∞^3 Gebilde erster Dimension als Lösungen. Sie ist dann eine lineare Gleichung, ihre Erledigung mit der Integration eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen zwischen vier Variabeln aequivalent, wie bekannt.

3. Sie besitzt ∞^3 Lösungen von der zweiten Dimension. Von diesem Falle, dessen Betrachtung neu ist, während 2. bekannt und 1. nur aus formalen Gründen neu hinzugefügt ist, werde ich sogleich zeigen, dass er sich auf den Fall 2. vermöge immer ausführbarer Operationen zurückführen lässt. Dabei wird nur verlangt, dass die Zahl der Lösungen zweiter Dimension auch nicht grösser ist als ∞^3.

4. Sie hat nur Lösungen von 3 Dimensionen, wenigstens in der hinreichenden Anzahl.

Dies ist der allgemeine Fall, über dessen Behandlung hier zunächst Nichts zu bemerken ist.

Die entsprechende Classification für Gleichungen mit $n+1$ Variabeln ist nun ohne Weiteres zu entwerfen. Man unterscheidet $(n+1)$ Stufen. Während 1. an sich erledigt, 2. bekannt ist, Fall $(n+1)$ der Vereinfachung entgeht, können die Zwischenstufen, wie im Beispiele der vier Variabeln die Stufe 3., immer auf die Stufe 2., d. h. den Fall der linearen partiellen Gleichungen zwischen $n+1$ Variabeln zurückgebracht werden.

Wie diese Zurückführung zu bewerkstelligen sei, werde ich nur für vier Variable und auch da nur andeutungsweise nunmehr auseinandersetzen. In der gegebenen Gleichung

$$f(z, x, p) = 0$$

betrachte man einen Augenblick die z, x als Parameter die p als Ebenen-Coordinaten im Raume. Sie stellt dann eine Fläche als Enveloppe von Ebenen dar und diese Fläche kann unabhängig von den Werthen z, x gewisse Eigenschaften haben. In dem Falle 3., den wir hier betrachten, überzeugt man sich, dass sie eine Linienfläche ist, dass sich also ihre Ebenen in einfach unendlich viele Büschel zusammenfassen lassen, deren einzelnes man durch einen Parameter λ characterisiren mag. Dieser Umstand, dass eine Linienfläche auftritt, ist übrigens für den Fall 3. nur nothwendig nicht characteristisch; es gehören dazu gewisse weitere Bedingungen, die man unter die Form von Integrabilitätsbedingungen setzen kann. Man stelle jetzt das bekannte Gleichungssystem auf:

$$dx_1 : dx_2 : dx_3 : dz : dp_1 : dp_2 : dp_3$$

$$= \frac{\partial F}{\partial p_1} : \dots\dots\dots : \frac{\partial F}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial F}{\partial z} : \dots\dots$$

Aus demselben eliminire man vermöge $f = 0$ das p_3 und dp_3, sodann vermöge der Relation, die p_1, p_2, p_3 mit λ in Beziehung setzt, auch noch p_2 und dp_2, wodurch man freilich λ und $d\lambda$ in das Gleichungssystem einführt. Aus den so gewonnenen fünf Gleichungen entferne man noch p_1 und dp_2, wodurch drei Gleichungen zwischen z, x, λ, dz, dx, $d\lambda$ entstehen. Diese Gleichungen bilden dann ein unbeschränkt integrables System[1]), und die Integration eines solchen ist nach Mayer's und meiner Methode mit der Integration eines System's gewöhnlicher Differentialgleichungen zwischen vier Veränderlichen gleichbedeutend. Hiermit ist die behauptete Zurückführung geleistet, so wie noch gezeigt wird, dass die Integration des totalen Systems die vollständige Lösung der gegebenen partiellen Differentialgleichung nach sich zieht. Man erhält diese vollständige Lösung, indem man zwischen den 3 Integralgleichungen des totalen System's das λ eliminirt.

Die hier vorgetragene Classification partieller Differentialgleichungen 1. O. soll übrigens keine definitive sein, es gibt in der That noch weitere Gesichtspuncte, auf die sich Eintheilungen gründen lassen.

1) Kommt man bei entsprechender Behandlung einer gegebenen partiellen Differentialgleichung auf ein totales System, welches nicht unbeschränkt aber doch beschränkt integrabel ist, so kann man daraus für die Lösung der ursprünglichen Gleichung immer Vortheil ziehen.

III. Bemerkungen über den sogenannten ungünstigsten Fall.

1. Cauchy's Integrationsweise einer partiellen Differentialgleichung $f = 0$ kann so ausgesprochen werden: Man suche alle Gleichungen $\varphi - a = 0$, welche mit $f = 0$ in Involution liegen, dann ist f erledigt. Eine analoge Methode gilt für Systeme:

$$f_1 = 0, \ldots\ldots f_p = 0$$

welche die grösstmögliche Anzahl gemeinsamer Lösungen gestatten: man suche alle $\varphi - a = 0$, die gleichzeitig mit allen f in Involution liegen, wobei wohlbemerkt die φ untereinander nicht involutorisch zu sein brauchen.

2. Vermöge dieser Auffassung von Cauchy's Methode und durch Verknüpfung der Jacobi'schen Integrationsweise mit der meinigen kann man das Integrationsgeschäft einer partiellen Differentialgleichung in demjenigen Falle, den man sonst als den ungünstigsten betrachtet, ohne Weiteres beenden. Sei nämlich $f = 0$ die gegebene Gleichung. Man sucht eine Gleichung $\varphi - a = 0$, die mit f in Involution liegt. Zwischen f und φ eliminirt man ein p und bekommt $\psi = 0$, wobei, nach meiner Methode, die Integration von ψ die von f nach sich zieht. Hat man nun eine neue Gleichung $\chi - b = 0$ mit $\psi = 0$ in Involution, so zeigt Jacobi, wie man eine Reihe Gleichungen

$$\chi' - b' = 0, \quad \chi'' - b'' = 0, \ldots\ldots$$

construiren kann, die alle mit ψ involutorisch liegen. Diese Reihe kann abbrechen, ehe die

grösstmögliche Zahl von χ erreicht ist. Thut sie es nicht, und das ist der sogenannte ungünstigste Fall, so ist, nach Cauchy's Methode, $\psi = 0$ integrirt und also, nach der meinen, auch $f = 0$ [1]).

3. Man kann eine ähnliche Ueberlegung benutzen, um in der Mayer'schen Methode in gewissen Fällen abzubrechen. Bei der Mayer'schen wie bei der Jacobi'schen Integrations-Methode handelt es sich immer darum, zu p Gleichungen

$$f_1 = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; f_p = 0,$$

die eine gemeinsame Lösung mit grösstmöglicher Constantenzahl besitzen, eine weitere Gleichung

$$f_{p+1} - a = 0$$

zu finden, die mit jeder unter den früheren involutorisch liegt. Herr Mayer findet nun im Allgemeinen nicht eine $f_{p+1} - a = 0$, sondern gleichzeitig mehrere. Findet er alle, so ist nach dem Satze, den ich unter 1. der Cauchy'schen Methode zufügte, das Integrationsgeschäft als beendigt anzusehen.

1) Fand man vermöge der Jacobischen Operation alle $\chi - b = 0$ ausgenommen nur eine, so lässt sich offenbar die Integration von $\psi = 0$ und also auch von $f = 0$ auf die Erledigung einer gewöhnlichen Differentialgleichung zwischen zwei Variabeln zurückführen u. s. w.

Erlangen, 11. October 1872.

Zur Theorie der algebraischen Functionen.

Dritte Note[1]).

Von

M. Noether.

Vorgelegt von A. Clebsch.

In einer Reihe von geometrischen und functionentheoretischen Arbeiten findet sich eine Lücke, die das Folgende auszufüllen bestimmt ist. Das Theorem

»dass die Gleichung einer algebraischen Curve $f=0$, welche durch den vollständigen Schnitt zweier solcher Curven $\varphi=0$, $\psi=0$ hindurchgeht, von der Form ist:

$$0=f\equiv A\varphi+B\psi,$$

wo $A=0$, $B=0$ ebenfalls Gleichungen von Curven sind«;

mit andern Worten, der Satz

»dass eine rationale Function $\frac{f}{\varphi}$ zweier Variabeln s, z, zwischen denen eine algebraische Gleichung $\psi=0$ besteht, eine ganze Function von s und z ist, wenn sie nur für $s=\infty$ oder für $z=\infty$ unendlich wird«

ist nur so lange richtig, als kein Theil des gemeinschaftlichen Werthsystems von $\varphi=0$, $\psi=0$ aus vielfachen Punkten von $\varphi=0$, $\psi=0$ besteht. Aber auch von dem erweiterten Satze für diesen letztern Fall, für welchen die hierbei

1) S. diese Nachrichten 1869 Nr. 15, 1871, Nr. 9.

nothwendigen Bedingungen der Gültigkeit noch nicht aufgestellt worden sind, hat man schon vielfache Anwendung gemacht; wie z. B. beim analytischen Beweis der Anzahl p der endlichen Integrale in der Theorie der Abel'schen Functionen der H. Clebsch und Gordan, in meinem analogen Beweis der Erhaltung der Zahl p bei eindeutigen Transformationen algebraischer Gebilde von mehreren Dimensionen[1]); ebenso von H. Fuchs in Borchardt's Journal, Bd. 73[2]).

Die Kenntniss der nähern Bedingungen des Satzes wird in denjenigen Fällen nothwendig, in welchen die Anzahl der in f noch vorhandenen willkürlichen Constanten sich nicht im Voraus genau bestimmen lässt. Auch die schon von Roch[3]) angegebene Bedingung, dass in einem Doppelpunkte von $\psi = 0$ die rationale Function von s, z nur einen Werth besitzen darf, ist im allgemeinen Falle noch nicht hinreichend. Die hier folgende Untersuchung ist eine Erweiterung des in Math. Ann., Bd. II, p. 314 gegebenen und für den einfachen Fall gültigen Beweises.

I.

Ich werde zunächst das Verhalten einer Curve $f = 0$ in einem singulären Punkte P von $\varphi = 0$, $\psi = 0$, in dessen Nähe sie die Gleichungsform $A'\varphi + B'\psi = 0$ besitzen soll, feststellen.

In P ($s = 0$, $z = 0$) habe φ einen q-fachen, ψ einen r-fachen Punkt ($r \geqq q$). Ordnet man die beiden Seiten der Gleichung

1) Math. Ann. II, p. 293.
2) p. 308. 309. 332.
3) Borchardt's Journal Bd. 66, p. 100.

$$f = A'\varphi + B'\psi,$$

wo die A', B' zu bestimmende ganze Functionen von s, z sind, nach ihren Dimensionen in s und z, so ergeben sich durch Vergleichung der Glieder 0ter, 1ter etc. Dimension zwischen den Coefficienten dieser Glieder von f, A', B' lineare Gleichungen, aus welchen durch Elimination der Coefficienten von A', B' die zwischen den Coefficienten von f bestehenden Relationen folgen. So findet man, damit f einen q-fachen Punkt besitze, $\frac{q(q+1)}{2}$ Relationen; sodann zwischen den Coefficienten der Glieder $(q+i)$ter Ordnung von f $(i < r - q)$ q lineare Relationen; und zwischen den Coefficienten der Glieder $(r+i)$ter Ordnung $(i < q - 1)$ $q - i - 1$ lineare Relationen. Im Allgemeinen finden sich so

$$\frac{q(q+1)}{2} + q(r-q) + \frac{q(q-1)}{2} = rq$$

lineare Bedingungen für die Coefficienten der Glieder 0ter bis incl. $(r+q-2)$ter Dimension von f. Erst die Glieder $(r+q-1)$ter und höherer Dimension sind ganz willkürlich.

Dabei ist noch zu bemerken, dass, wenn f in P einen m-fachen Punkt $(m > q)$ besitzt, einem Theil dieser Bedingungen dadurch identisch genügt wird, dass man auch A' in P einen $(m-q)$-fachen, und für $(m > r)$ auch B' einen $(m-z)$-fachen Punkt gibt. Für die Glieder $m$ter Ordnung etc. bleiben dann noch immer die oben angegebenen Relationen bestehen. Dagegen ist für $m = r + q - 1$ der m-fache Punkt von f willkürlich.

Einen Theil der Relationen kann man geometrisch als Berührungs- und als Involutions-Bedingungen zwischen den Tangentensystemen von f, φ, ψ in P auffassen.

Nach Erfüllung der sämmtlichen Relationen in jedem singulären Punkte kann man sagen, dass in allen Punkten der Fläche, welche die Verzweigung der durch die Gleichung $\psi = 0$ definirten algebraischen Function s von z darstellt, die wie s verzweigte Function $\frac{f}{\varphi}$ den Character einer ganzen Function von s und z hat.

Ich definire dieses Verhalten noch etwas näher. Eine ganze Function unterscheidet sich in ihrem Verhalten von einer rationalen Function von s, z, die nur für $s = \infty$ oder $z = \infty$ unendlich wird, nur in den zusammenfallenden und sich aufhebenden Verzweigungspunkten. Während man in einem solchen Punkte $(z = a)$ die verschiedenen Entwicklungen einer rationalen Function von s, z nach aufsteigenden Potenzen von $z - a$ als von einander unabhängig annehmen kann [1]), bestehen zwischen solchen Entwicklungen einer ganzen Function in jenem Punkte eine Reihe leicht aufzustellender linearer Beziehungen für die Coefficienten der niedrigeren Potenzen von $z - a$, welche mit den auf dem früheren Weg gefundenen Beziehungen übereinstimmen. Diese Bedingungen sind z. B. identisch erfüllt, wenn in einem solchen Punkte, in welchem r Werthe von s zusammenfallen, $\frac{f}{\varphi}$ noch $(r - 1)$-fach verschwindet.

1) Vergl. Riemann, Abel'sche F., §. 8, Anmerkung.

II.

Es soll nun nachgewiesen werden, dass eine rationale Function $\frac{f}{\varphi}$ von s, z, welche für alle Werthsysteme von s, z, für die $\psi=0$ ist, den Character einer ganzen Function von s, z hat, eine ganze Function A von s, z ist; d. h. dass dann die Identität existirt:

$$f \equiv A\varphi + B\psi.$$

Es möge zunächst durch eine lineare Transformation, indem man $z+\alpha s$ statt z einsetzt, ψ so umgeformt werden, dass sein Glied höchster Dimension in s eine Constante zum Coefficienten habe, und sei alsdann n diese Dimension. Wenn Φ die durch Elimination von s entstehende Resultante von φ und ψ bezeichnet, so hat man

$$\Phi = \lambda\varphi + \mu\psi,$$

wo λ und μ ganze Functionen von s, z sind. Ferner erhalte man, indem man λf durch ψ dividirt und den Rest auf die $(n-1)$te Potenz in Bezug auf s erniedrigt,

$$\lambda f = \nu\psi + X,$$

wo

$$X = \Phi_1 s^{n-1} + \Phi_2 s^{n-2} + \ldots, + \Phi_n,$$

und wo jetzt ν eine ganze Function von s, z, die Φ_i, wie Φ, ganze Functionen von z allein sind.

Φ besitze nun den Factor z^k; man kann

zeigen, dass derselbe auch in allen Φ_i enthalten ist.

Für $z=0$ mögen von den n Werthen s, für welche auch $\psi=0$ wird, r zusammenfallen in $s=b\,(r \gtreqless k)$, die übrigen $n-r$ Werthe gehören $n-r$ Puncte $c_1, \ldots c_{n-r}$ an. In einem solchen Punkte c_i berührt, wie die obigen beiden Gleichungen zeigen, die Curve $\lambda=0$, also auch die Curve $X=0$ die gegebene Curve $\psi=0$ in der $(k-1)$ten Ordnung, was k Bedingungen für die Curve X gibt. Seien mit

$$\Phi_i^0, \quad \frac{d\Phi_i^0}{dz}, \quad \frac{d^2\Phi_i^0}{dz^2}, \ldots$$

die Werthe der Φ_i und deren Differentialquotienten für $z=0$ bezeichnet. Für die $n-r$ Punkte c_i erhält man sodann k Systeme von je $n-r$ Gleichungen, von denen das $h$te System aus $n-r$ Gleichungen besteht, die linear und homogen sind in Bezug auf die Grössen

$$\Phi_i^0, \quad \frac{d\Phi_i^0}{dz}, \ldots, \quad \frac{d^{h-1}\Phi_i^0}{dz^{h-1}}$$

Das Verhalten der Curve $X=0$ im Punkte $P(s=b,\ z=0)$, ergibt nun nach der in I geführten Untersuchung noch weitere rk Relationen, und zwar werden diese von derselben Form und zwischen denselben Grössen, wie die für die Punkte c gefundenen Bedingungen.

Nach der Annahme ist in der Nähe des Punktes P die Function f, geordnet nach aufsteigenden Potenzen von z und $s-b$, identisch mit einer solchen Entwicklung einer Function $A'\varphi + B'\psi$; also in P:

$$X = \lambda f - \nu\psi = \lambda A'\varphi + (\lambda B' - \nu)\psi$$

$$= A'\Phi + (\lambda B' - \mu A' - \nu)\psi,$$

d. h. X ist von der Form:

$$X = (z^k + az^{k+1} + \ldots)A' + C\psi,$$

wo A', C ganze Functionen von z, $s-b$ sind.

Vergleicht man auf beiden Seiten dieser Gleichung die Glieder 0ter, 1ter, . . ., $(k+r-2)$ter Dimension in z und $s-b$, so erkennt man leicht, dass man sich auf die Betrachtung derjenigen Glieder beschränken kann, welche z zu einer niedrigeren, als der $r$ten Potenz enthalten, und man zeigt nach und nach, jeweils mit Benutzung der schon früher gefundenen Relationen, dass in C sämmtliche Glieder 0ter, 1ter, ..., $(k-2)$ter Dimension in z und $s-b$ verschwinden müssen. Dies sagt aus, dass die Grössen

$$X, \frac{dX}{dz}, \ldots\ldots, \frac{d^{k-1}X}{dz^{k-1}}$$

und die sämmtlichen partiellen Differentialquotienten dieser k Grössen, nach s genommen, bis incl. den $(r-1)$ten, für $s=b$, $z=0$ verschwinden. Das sind aber $r.k$ homogene lineare Gleichungen für die Grössen

$$\Phi_i^0, \quad \frac{d\Phi_i^0}{dz}, \quad \ldots\ldots, \quad \frac{d^{k-1}\Phi_i^0}{dz^{k-1}}.$$

Aus den $n.k$ für diese $n.k$ Grössen jetzt aufgestellten Gleichungen folgt nun, dass diese Grössen sämmtlich verschwinden. Denn die Determinante dieser Gleichungen verschwindet nicht, wenn nicht von den $n-r+1$ Punkten c_i und P zwei zusammenfallen, was aber bei allgemeiner Lage des Coordinatensystems nicht stattfindet.

Daher haben sämmtliche Φ_i die Grösse z^k zum Factor; und da nach unserer Annahme dasselbe auch für die übrigen Factoren von Φ stattfinden muss, so ist Φ selbst ein Factor für alle Φ_i; und man hat die Darstellung

$$\lambda f = \nu\psi + A\Phi = \lambda A\varphi + (A\mu + \nu)\psi,$$

oder

$$f = A\varphi + \frac{A\mu + \nu}{\lambda}\psi.$$

Da nun f und $A\varphi$ ganze Functionen sind und λ und ψ keinen Factor gemein haben, muss λ in $A\mu+\nu$ theilbar sein, und f ist von der Form

$$A\varphi + B\psi.$$

Für die Punkte, in welchen $s=\infty$ oder $z=\infty$, haben sich bei dieser Darstellung keine weitern Bedingungen für die Function $\frac{f}{\varphi}$ ergeben. Geometrisch aufgefasst, existiren aber bei der

hier angenommenen Gleichungsform vielfache Punkte von $\varphi = 0$, $\psi = 0$ in dem Schnitt der unendlich fernen Geraden $t = 0$ mit zwei Geraden $s + \alpha z = 0$, $s + \beta z = 0$; und somit lässt sich nur f, mit einer gewissen Potenz von t multiplicirt, auf die Form $A\varphi + B\psi$ bringen.

Ich bemerke noch, dass die hier gegebenen Betrachtungen auch für die Erweiterung des Satzes auf Flächen hinreichen, und dass man hierbei nur das Verhalten von f längs gemeinschaftlicher Curven von φ und ψ im Allgemeinen, ohne auf das in einzelnen singulären Punkten derselben einzugehen, zu bestimmen hat. Analoges findet für höhere algebraische Gebilde statt.

Heidelberg, 1872 Oct. 11.

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

13. November. № 26. 1872.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Sitzung am 2. November.

Ewald, Ueber den Stadtnamen Kolossä.
Marx, Lassen oder Thun? eine ärztliche Kunst- und Gewissensfrage. (Erscheint in den Abhandlungen).
Waitz, Mittheilung eines Aufsatzes von Dr. A. Stern über einen bisher unbeachteten Brief Spinoza's und Verwandtes.
Wöhler, nachträgliche Bemerkung über das Meteoreisen von Ovifak.
Grassmann, Corresp., Schreiben an Clebsch, zur Theorie der Curven 3ter O.
Weber, legt eine Arbeit von Dr. E. Riecke vor: die Magnetisirungsfunction einer Kugel aus weichem Eisen.

Nachträgliche Bemerkung über das Meteoreisen von Ovifak.

Von dem merkwürdigen Eisen von Ovifak in Grönland ist auch von Hrn. Daubrée eine Analyse gemacht und mit sehr interessanten Bemerkungen über die Natur und den Ursprung dieses Eisens am 24. Juni und 29. Juli d. J. in den Comptes rendus mitgetheilt worden. Er hat den ungewöhnlichen Sauerstoffgehalt desselben

bestätigt, das heisst bestätigt, dass es einen grossen Theil des Eisens im oxydirten Zustand enthält; aber in Betreff der quantitativen Verhältnisse weichen seine Resultate von den von mir gefundenen [1]), namentlich in den Zahlen für den Eisengehalt, so sehr ab, dass diese Abweichung, die Hr. Daubrée, wie es scheint, aus rücksichtsvoller Höflichkeit mit Stillschweigen übergeht, weder auf Seiten eines so ausgezeichneten Analytikers, noch auf meiner Seite in einer fehlerhaften Bestimmung ihren Grund haben kann. Sie ist aber einfach daraus zu erklären, dass wir zwei verschiedene Eisen zur Analyse genommen haben. Schon Nordenskiöld macht auf die verschiedene Beschaffenheit der bei Ovifak gefundenen Eisenstücke aufmerksam, und Daubrée selbst unterscheidet drei Arten, die er mit 1, 2 und 3 bezeichnet. Zu seiner vollständigen Analyse diente das Eisen Nr. 1, das er als metallglänzend, sehr dunkelgrau, fast schwarz, beschreibt. Den gesammten Eisengehalt in diesem fand er zu 71 Procent. Von dem Eisen 2, in welchem er nicht alle Bestandtheile bestimmt zu haben scheint, sagt er, es sei metallglänzend und hellgrau, und enthalte 82 Procent Eisen. Dieses scheint das von mir analysirte Eisen zu sein, von dem ich angab, es sei vollkommen metallglänzend, von grauer Eisenfarbe, halb blättrigem halb feinkörnigem Bruch, an der Luft vollkommen unveränderlich und enthalte 80,64 Proc. Eisen. Sein spec. Gewicht, das von Daubrée leider nicht angegeben ist, fand ich = 5,82 bei + 20° C. Es versteht sich, dass schon in Folge des ungleich eingesprengten Schwefeleisens in einer und derselben Eisenart die Mengen der Be-

1) Nachrichten 1872. Nr. 11.

standtheile etwas variiren müssen. — Auffallend bleibt es, dass während nach Daubrée's Beobachtung eine frisch geschnittene Fläche dieses Eisens Nr. 2 schon nach wenigen Tagen feucht zu werden und zu rosten anfängt, das von mir analysirte, fast pfundschwere Stück noch jetzt, seit einem Jahr offen liegend, ganz unverändert geblieben ist und weder seinen Glanz verloren noch Eisenchlorür ausgeschwitzt hat.

W.

Ueber den Stadtnamen Kolossä.

Von

H. Ewald.

Die Phrygische Stadt Kolossä wird in dem uns heute bekannten Theile von alten Schriften zuerst bei Herodot (7, 30), dann in Xenophon's Anabasis sogleich zu anfange erwähnt, wo der Reisebericht beginnt. Die Stadt war damals nach Xenophon's Erzählung eine sehr grosse und volkreiche, scheint jedoch in den späteren Jahrhunderten des sinkenden Alterthums sich wenig auf dieser uns bekannten ältesten Stufe ihrer Bedeutung gehalten zu haben, und würde wie die meisten Städte des Kleinasiatischen Binnenlandes uns aus dem Alterthume wenig bekannt seyn wenn sie nicht durch das bekannte NTliche Sendschreiben an ihre noch sehr junge Christliche Gemeinde bei den Späteren weit häufiger als die meisten anderen ihrer Umgebung erwähnt wäre. Durch das gesammte reiche Schriftthum welches sich alsdann im Christlichen Zeitalter an dieses Paulussendschreiben knüpft, wissen

wir auch erst Bestimmteres von einer etwas anderen Aussprache des Namens, welche uns hier allein beschäftigen soll[1]).

Vergleicht man nämlich die ältesten und besten Handschriften zu dieser Stelle, die alten Uebersetzungen und Griechischen Erklärungen des Sendschreibens und andere ältere Schriften der Art, so bemerkt man dass der Stadtname allen klaren Merkmalen zufolge hier ursprünglich nicht *Κολοσσαί* sondern *Κολασσαί* geschrieben war. Auch die neuesten Hülfsmittel welche jetzt entdeckt sind, stimmen im Wesentlichen mit dieser Gewissheit überein. Der Cod. *Sin.* zeigt zwar vorne in der Zuschrift *Κολοσσαί*, in der Unterschrift aber (und diese Handschrift hat überall nicht Ueberschriften sondern nur Unterschriften der einzelnen Buchtheile) *Κολασσαί*: da aber alle diese Unterschriften unstreitig ebenso alt sind als die Sammlung der Paulussendschreiben selbst, so kann die andere Lesart vorne nur durch eine spätere Hand zu jener Zeit in das Wortgefüge gekommen seyn als man überhaupt schon die in den übrigen Schriften gewöhnlichere Aussprache auch auf das N. T. überzutragen allgemeiner begann. Denn von der einen Seite ist der Cod. *Sin.* obwohl einer der uns heute bekannten ältesten keineswegs dér Art dass wir seine Lesarten sämmtlich für die besten nämlich die ursprünglichsten halten könnten, wie heute hinreichend bewiesen ist. Von der andern ist leicht erklärlich wie die in allen den übrigen alten Urkunden von Herodot's und Xenophon's

1) Die verschiedene Aussprache des Stadtnamens ist zwar schon in Mannert's Geographie der Griechen und Römer VI, 3 S. 127 f. erwähnt, aber nur beiläufig; und eine nähere Erwägung des Verhältnisses der zwei Namen ist meines Wissens auch sonst noch nirgends versucht.

Schriften an allein herrschende Aussprache des Stadtnamens früh auch in viele und endlich in die meisten Handschriften des N. Ts eindringen und auch hier so gut wie allein herrschend werden konnte.

Allein wir können nicht zweifeln dass die Aussprache Kolassä vielmehr die ursprünglichere und noch im ersten Jahrh. nach Chr. landesübliche war. Die andere findet sich zwar von Herodot und Xenophon an als die bei den Griechen und Römern allein gewöhnlich gewordene; auch auf den Münzen und anderen öffentlichen Urkunden aus der Griechisch-Römischen Zeit ist sie verewigt. Dies erklärt sich jedoch leicht daraus dass man zur Zeit der Griechen und Römer bei dem Namen der Stadt gerne an die Bedeutung eines oder meherer Kolosse dachte und der Name dadurch dem Griechischen Ohre gefälliger wurde. Die damalige hohe Welt sprach und schrieb nun einmal so: die neue Christliche Welt aber konnte in dieser so wie sie das in unzähligen anderen Sachen that, wieder freier an das Volksthümliche sich halten. Wir haben in diesem Sendschreiben eine Urkunde, die von solchen Männern ausging welche im Volke der Stadt gelebt hatten oder doch mit Einwohnern dieser Stadt auf das vertraulichste bekannt waren: sie mussten genau wissen wie der Name von der grossen Menge der Einwohner ausgesprochen wurde und welcher Name ihnen selbst der liebste war. Wir können es daher auch nur billigen dass Lachmann diejenige Schreibart welche allen Spuren zufolge die ursprünglichste ist, hier wiederherstellt. Seine Ausgabe des Griechischen Neuen Testaments wurde zwar als sie erschien und noch lange Zeit nachher von den meisten seiner Zeitgenossen viel zu hoch gestellt:

allein es lässt sich nicht läugnen dass er hier das ganz richtige wiederherstellte.

Mit dem aus dem Griechischen ins Lateinische und damit in alle unsere Sprachen übergegangenen Worte *κολοσσός* fällt indess der Stadtname auch nach seiner herrschend gewordenen Aussprache nicht zusammen, da er nicht *Κολοσσοί* sondern beständig *Κολοσσαί* lautet. Wir können daher bisjetzt nicht sagen was der Unsinn dieses Phrygischen Stadtnamens war. Aber auch der unter uns so gewöhnlich gewordene Name für eine ungemein hohe Säule *κολοσσός* ist nicht Griechischen Ursprunges, da er keine Ableitung aus einer Griechischen Wurzel zulässt und dazu keiner Bildung eines Griechischen Nennwortes gleicht. Die Griechen nannten die Säule *στήλη;* und es ist merkwürdig wie sie eine Säule ungewöhnlicher Höhe und Dicke lieber mit einem Fremdworte bezeichneten. Aber auch Semitisch wie *κίων* klingt *κολοσσός* nicht.

Vielmehr mag das Wort irgendeiner dem Griechischen verwandten Sprache entstammen, da es dem Sinne nach in dem Lateinischen *columen*, *culmen*, *columna* wiederkehren und der Bildung nach dem Lateinischen *celsus* (vgl. *excellere*, *praecellere*) entsprechen kann. Dann aber mag man auch sicher genug weitèr annehmen das Wort für Koloss sei den Griechen wie so manche andere von Kleinasien her vermittelst dér Sprache zugekommen welche einst in Kleinasien bis Kypros hin weitverbreitet war und in dem vielgliedrigen Leibe des Mittelländischen Sprachstammes das Glied zwischen dem Armenisch-Persischen und dem Griechisch-Lateinischen bildete. Die Sprache der dort wohnenden ältesten Völker wird uns hoffentlich in der Zukunft klarer werden: jene Völker hatten einst schon in den

frühesten Zeiten eine eigenthümliche höhere Bildung, und ihre Schrift deren Gebrauch sich bis Kypros erstreckte war wol aus der Assyrischen Keilschrift entlehnt [1]).

Indessen klingt doch auch ein Wort wie *κολασσά* dem *κολοσσός* zu ähnlich als dass man von vorne an läugnen könnte beide hätten zuletzt etwa dieselbe Bedeutung gehabt. Wollte man demnach annehmen der Stadtname Kolassä sei nur mundartig in doppelter Weise von einem möglichen *Κολοσσοί* verschieden, so könnte man meinen er habe ursprünglich soviel als Säulen bedeutet, wie die Perser eine Stadt چهل منار oder چهل ستون Vierzigsäulen nennen. Jedenfalls aber müsste man auch dann von der Aussprache *Κολασσαί* als der einheimisch ächten des Stadtnamens ausgehen. Ihr entspricht dann als abgeleitetes Beziehungswort *Κολασσαεύς* in der Unterschrift jenes Sendschreibens.

Möge denn diese kurze Bemerkung zugleich als ein kleiner Beitrag zum Wiedererkennen jener verlorenen Sprache dienen!

Zur Theorie der Curven 3. Ordnung.

Von

H. Grassmann.

Correspond. Mitgliede. Aus einem Schreiben an A. Clebsch.

— Der Satz, den Sie in Bd. 5 Ihrer Annalen (S. 425) über das einer Curve dritter Ordnung

1) Wie in den Gel. Anz. 1872 S. 1583 vermuthet wurde.

eingeschriebene Dreieck, dessen Seiten durch 3 gegebene Punkte dieser Curve gehen, aufgestellt haben, und der dem von mir in Crelle's Journal (Bd. 52, S. 261) mitgetheilten Satze entspricht, lässt sich leicht auf beliebige Vielecke mit ungerader Seitenzahl ausdehnen.

Zu dem Ende gehe ich auf folgende sogleich einleuchtende Sätze zurück (vgl. Crelle's Journal a. a. O. S. 258 ff.):

1. Die Ebene wird durch eine in ihr liegende algebraische Curve in Theile zerlegt, von denen man je zwei (lineal) aneinandergränzende als entgegengesetzt bezeichnet betrachten darf, so dass also, wenn einer dieser Theile als positiv angenommen wird, auch für jeden andern Theil unzweideutig feststeht, ob er positiv oder negativ sei.

Nachdem diese Bestimmung getroffen ist, kann man ferner festsetzen, ein Punkt, welcher sich auf der Curve bewegt, bewege sich nach rechts hin, wenn der positive Flächenraum, an dessen Gränze er sich hinbewegt, dem mit ihm Gehenden rechter Hand liegt. Dies festgestellt, ergiebt sich sogleich:

2. Wenn eine Gerade um einen einfachen festen Punkt einer Curve $n$ter Ordnung sich bewegt, so bewegen sich die $n-1$ übrigen Durchschnittspunkte der Geraden und der Curve abwechselnd nach entgegengesetzten Seiten (rechts und links).

Da man ferner unendlich entfernte Punkte, welche vom Endlichen aus betrachtet (in derselben oder) in parallelen Linien liegen, als einen einzigen Punkt betrachten kann, so darf man sagen, ein Punkt durchlaufe einen Zug der Curve einfach, wenn er sich so auf ihm fortbewegt, dass er zuletzt wieder zu dem Aus-

gangspunkte zurückkehrt, ohne aber inzwischen irgend einen Punkt seiner früheren Bahn wieder berührt zu haben, wobei jedesmal, wenn der Punkt ins Unendliche vorgerückt ist, er dann sogleich in entgegengesetzter Richtung (aber auf neuer Bahn) wieder aus dem Unendlichen dem Endlichen zustrebt.

3. Hiernach besteht die Curve dritter Ordnung aus zwei Zügen, von denen der eine durch jede Gerade in einer ungeraden, der andere (der also auch imaginär werden kann) in einer geraden Anzahl von Punkten geschnitten wird. Ich will den ersteren den H a u p t z u g, den anderen den N e b e n z u g nennen.

4. Wenn eine Gerade sich um einen einfachen festen Punkt einer Curve dritter Ordnung bewegt, und einer der beiden andern Durchschnittspunkte der Geraden und der Curve einen Zug derselben einfach durchläuft, so thut es auch der andere (weil die Rückkehr des einen auch die des andern bedingt).

Um nun zu dem allgemeinen Satze zu gelangen, nehme ich in der Curve dritter Ordnung eine ungerade Anzahl n von einfachen festen Punkten $a_1, a_2, \ldots a_n$ und eine bewegliche gebrochene Linie $x_1\ x_2, \ldots x_{n+1}$ an, deren $n+1$ Ecken auf der Curve liegen und deren n Seiten nach der Reihe durch die n festen Punkte gehen, d. h. ich ziehe von a_1 durch den auf der Curve sich bewegenden Punkt x_1 eine Gerade, welche die Curve zum drittenmale in x_2 schneidet, ziehe x_2, a_2, welche die Curve zum drittenmale in x_3 schneidet u. s. w., zuletzt $x_n\ a_n$, welche die Curve

noch in x_{n+1} schneidet. Durchläuft nun x_1 einen Zug der Curve einfach, so thut das (nach 4.) auch x_2, also auch x_3 u. s. w., zuletzt x_{n+1}. Ferner müssen (nach 2.) die Endpunkte jeder Seite der Figur nach entgegengesetzten Seiten (links und rechts) sich bewegen, also, da die Seitenzahl (n) ungerade ist auch x_1 und x_{n+1} Ferner wenn einer der Punkte $a_1, \ldots a_n$ auf dem Hauptzuge liegt, so müssen (nach 3.) die Ecken der durch diesen Punkt gehenden Seite auf ein und demselben Zuge sich bewegen, wenn hingegen einer jener Punkte auf dem Nebenzuge liegt, so bewegen sich die Ecken der durch diesen Punkt gehenden Seite in verschiedenen Zügen; wenn also m jener Punkte $a_1 \ldots a_n$ auf dem Nebenzuge liegen, so wechseln die Punkte $x_1 \ldots x_{n+1}$ nach der Reihe m-mal den Zug, in welchem sie sich bewegen; ist also m eine ungerade Zahl, so bewegen sich x_1 und x_{n+1} in verschiedenen Zügen, können sich also nie begegnen; ist aber m gerade, so bewegen sich x_1 und x_{n+1} auf demselben Zuge und durchlaufen ihn nach dem Obigen einfach und nach entgegengesetzter Seite, begegnen sich also auf ihm zweimal. Da dies auf jedem der beiden Züge geschehen kann, so folgt:

Wenn auf einer Curve dritter Ordnung eine ungerade Anzahl n von Punkten gegeben ist, von denen eine gerade Anzahl auf dem Nebenzuge, die übrigen auf dem Hauptzuge liegen, so giebt es 4 n-ecke, deren E-

cken auf der Curve liegen, und deren Seiten einzeln durch die n gegebenen Punkte gehen.

Von diesen 4 n-ecken werden nur dann 2 imaginär, wenn der Nebenzug selbst imaginär wird. Wenn aber eine ungerade Anzahl der n Punkte auf dem Nebenzuge liegt, so ist kein Vieleck der genannten Art möglich.

Es liegt hierin (für $n = 1$) der Satz, dass man von jedem Punkte des Hauptzuges 4, und wenn der Nebeuzug imaginär ist, 2 reelle Tangenten an die Curve ziehen kann, von einem Punkte des Nebenzuges keine.

Ferner kann man den Satz dahin erweitern, dass man statt jeder beliebigen Seite, z. B. statt der Seite $x_1 x_2$, die durch a_1 geht, einen Bogen $x_1 x_2$ setzt, der einem durch 4 gegebene Punkte a_1, b_1, c_1, d_1 der Curve gehenden veränderlichen Kegelschnitte angehört. Auch hier muss von den sämmtlichen gegebenen Punkten eine gerade Anzahl auf dem Nebenzuge liegen. Der Beweis dieses allgemeinen Satzes ist ganz derselbe, wie der oben für geradseitige n-ecke mitgetheilte, indem sich die Hülfssätze unmittelbar auf diesen allgemeineren Fall übertragen lassen, wobei Satz 3 dann aussagt, dass jeder Zug durch einen Kegelschnitt in einer geraden Anzahl von Punkten geschnitten wird.

Die Magnetisirungsfunction einer Kugel aus weichem Eisen.

Von

Eduard Riecke.

Vorgelegt von Wilhelm Weber.

Wenn wir auf einen Eisenkörper von beliebiger Gestalt successive magnetisirende Kräfte von verschiedener Stärke wirken lassen, so wird jeder bestimmten Kraft ein bestimmtes in dem Körper inducirtes magnetisches Moment entsprechen, wir können uns also dieses Moment dargestellt denken durch eine Funktion der äusseren magnetisirenden Kraft; ganz dasselbe wird auch gelten von dem Quotienten, der entsteht, wenn wir das inducirte magnetische Moment dividiren durch die magnetisirende Kraft und diesen Quotienten wollen wir bezeichnen als die Magnetisirungsfunktion des betrachteten Körpers. Es leuchtet ein, dass diese Magnetisirungsfunktion, selbst abgesehen von Verschiedenheiten in der magnetischen Natur des Eisens, für jeden gegebenen Körper eine eigenthümliche, durch seine Gestalt und Grösse bedingte sein wird. Es würde also diese Magnetisirungsfunktion für jeden gegebenen Körper besonders bestimmt werden müssen.

Die Aufgabe der Theorie des inducirten Magnetismus, wie sie von Poisson, Neumann und Kirchhoff entworfen wurde, lässt sich nun dahin formuliren:

Absehend von der verschiedenen magnetischen Natur des Eisens, setzt die Theorie voraus, dass die Magnetisirungsfunktion einmal für einen be-

stimmten Körper auf experimentellem Wege ermittelt sei, und sie stellt dann Gleichungen auf, mittelst welcher sich die Magnetisirungsfunktionen aller übrigen Körper berechnen lassen aus jener einzigen ein für allemal bestimmten Funktion.

Der Charakter dieser Theorie ist demnach wesentlich verschieden von dem einer Molekulartheorie der Magnetisirung, deren Grundlinien von Weber (Elektrodynamische Messbestimmungen, insbesondere über Diamagnetismus S. 570) entwickelt worden sind.

In der Poissonschen Theorie der Magnetisirung sind nun besonders zwei Magnetisirungsfunktionen von besonderer Bedeutung; die eine derselben ist die Magnetisirungsfunktion der Kugel, welche den ursprünglichen Ausgangspunkt der Theorie bildet. Wir werden diese Funktion im Folgenden bezeichnen durch p, das Argument derselben, d. h. die auf die Kugel wirkende magnetisirende Kraft durch P. Hiebei denken wir uns das in der Kugel inducirte magnetische Moment reducirt auf die Volumeinheit. In der weiteren Entwicklung der Theorie tritt jedoch eine andere Funktion in den Vordergrund, die Magnetisirungsfunktion eines unendlich langen Cylinders von kreisförmigem Querschnitt. Wenn auf einen solchen Cylinder eine in seiner ganzen Ausdehnung constante seiner Axe parallele magnetisirende Kraft wirkt, so wird derselbe gleichförmig magnetisirt; als Magnetisirungsfunktion desselben wollen wir unter diesen Umständen den Quotienten aus dem magnetischen Moment der Volumeinheit und aus der auf den Cylinder wirkenden magnetisirenden Kraft bezeichnen. Wir

in Uebereinstimmung mit der üblichen Bezeichnung diese Magnetisirungsfunktion des Cylinders bezeichnen durch k das Argument derselben, die auf den Cylinder wirkende Kraft durch K.

Zwischen den Funktionen p und k besteht ein gewisser einfacher Zusammenhang; es ist nämlich:

$$k = \frac{p}{1 - \frac{4}{3}\pi p}$$

vorausgesetzt, dass zwischen den entsprechenden Argumenten P und K die Beziehung besteht:

$$P = K(1 + \tfrac{4}{3}\pi k),$$

eine Beziehung, die wir auch in folgende Form bringen können:

$$p \, . \, P = k \, . \, K.$$

In den bisherigen experimentellen Arbeiten bildete die Ermittlung der Funktion k stets den Zielpunkt der Untersuchung. In der That nimmt die Funktion k eine bevorzugte Stellung in so fern ein, als die Gleichungen durch welche bei gegebenen äusseren Kräften der magnetische Zustand eines Körpers bestimmt wird, sich einfacher gestalten, wenn die Funktion k in denselben eingeführt wird, als bei Einführung der Funktion p. Doch scheint es, dass dieser Umstand wenigstens bei dem augenblicklichen Stand unserer Kenntnisse nicht allzu schwer ins Gewicht fallen. Jene allgemeinen Gleichungen wurden nämlich bis jetzt nur in zwei Fällen aufgelöst; der eine Fall, welcher von Kirchhoff (Pogg. Ann. Ergänzungsbd. 5) behandelt wurde

ist der eines eisernen Ringes, welcher magnetisirt wird durch einen den Ring spiralförmig umziehenden Strom; der andere Fall ist der eines Ellipsoides, für welchen bekanntlich Neumann die Poisson'schen Gleichungen gelöst hat. Der Fall eines geschlossenen Ringes steht in einer gewissen Verwandtschaft zu dem Fall des unendlich langen Cylinders und dem entsprechend stellt sich die Lösung der Gleichungen am einfachsten dar mit Hülfe der Funktion k; das Ellipsoid dagegen umfasst ebenso den unendlich langen Cylinder, wie die Kugel als speciellen Fall und dem entsprechend verhält sich die Lösung der Poisson'schen Gleichungen vollkommen symmetrisch gegen die Funktionen p und k. Man darf vielleicht die Vermuthung aussprechen, dass für Körper welche weder in einer bestimmten Verwandschaft zum Ellipsoide noch in einer bestimmten Verwandtschaft zu dem unendlich langen Cylinder stehen, die Lösung der allgemeinen Gleichungen sich ebenso wohl der Funktion p als der Funktion k anbequemen würde. Es schien mir durch diese Ueberlegungen der Versuch gerechtfertigt, das vorhandene Beobachtungsmaterial einmal zu einer Berechnung der Funktion p zu verwerthen und ich werde im Folgenden die Resultate dieser Berechnung mittheilen. Ausser meinen eigenen Versuchen, welche sich nur auf ein beschränktes Gebiet magnetisirender Kräfte beziehen, habe ich Beobachtungen von v. Quintus Icilius (Pogg. Ann. Bd. 121), Oberbeck (Pogg. Ann. Bd. 135) und Stoletow (Pogg. Ann. Bd. 144) benutzt.

Ich werde zunächst die aus den Beobachtungsreihen von v. Quintus Icilius und Oberbeck berechneten Tabellen anführen. In denselben bezeichnet p die Magnetisirungsfunktion der Ku-

gel, *P* die auf die Kugel wirkende Kraft in Gaussischem Masse gemessen.

Aus Beobachtungen, welche von Quintus Icilius an einem verlängerten Rotationsellipsoid aus Eisen anstellte, ergab sich folgendes System korrespondirender Werthe von *p* und *P*.

p	P
0,2360	441
0,2363	1079
0,2375	4235
0,2381	12050
0,2382	19360
0,2382	29230
0,2380	37590
0,2375	42230
0,2373	42870
0,2363	45900
0,2342	49110
0,2310	53010
0,2286	57540
0,2214	58260
0,2203	58940

Aus den von Herrn Oberbeck mitgetheilten Beobachtungsreihen wurden drei ausgewählt, welche sich auf die von ihm mit II, 1; II, 2 und III, 2 bezeichneten Stäbe beziehen. Es mag dabei bemerkt werden, dass die Stäbe II, 1 und II, 2 demselben Eisendrathe entnommen waren. Die für diese drei Stäbe erhaltenen Werthe der Magnetisirungsfunktion *p* sind folgende:

II, 1		II, 2		III, 2	
p	P	p	P	p	P
		0,2378	5930	0,2364	2550
		0,2380	8780	0,2369	3960
		0,2382	15840	0,2376	7955
0,2381	20025	0,2382	19800	0,2379	10890
0,2381	27400	0,2382	25200	0,2381	16133
0,2378	32810	0,2382	27900	0,2381	19450
0,2377	35080	0,2380	32040	0,2381	23810
0,2372	40300	0,2379	37020	0,2379	33080
0,2364	41210	0,2374	39010	0,2375	35740
0,2355	43420	0,2368	41120	0,2369	41540
0,2341	48450	0,2351	46270	0,2353	46100
0,2334	48780	0,2329	50200	0,2332	50830

Die Uebereinstimmung der vier bis jetzt mitgetheilten Tabellen ist eine so grosse, dass wir dieselben ohne Bedenken in eine einzige würden zusammenziehen können. Eine etwas grössere Abweichung zeigt die folgende, welche aus den Beobachtungen Herrn Stoletows berechnet wurde:

p	P	p	P
0,2361	392	0,2383	40360
0,2366	784	0,2383	41940
0,2373	1591	0,2381	47200
0,2378	2893	0,2379	50400
0,2380	4396	0,8377	51550
0,2382	6843	0,2376	54280
0,2384	15290	0,2374	54430
0,2384	23470	0,2374	54530

Wir werden an die in diesen Tabellen enthaltenen Resultate zunächst zwei Bemerkungen knüpfen.

Erstens sehen wir, dass die Funktion p innerhalb des von den Tabellen umfassten Bereiches magnetisirender Kräfte sich verhältnissmässig nur wenig ändert der höchste Werth von p ist 0,2384, der niedrigste 0,2203. Wenn wir uns beschränken auf Kräfte, welche weniger als 40000 betragen, so ist der höchste vorkommende Werth 0,2384, der niedrigste 0,2360; es ist also für das so begrenzte Intervall von Kräften die Funktion p konstant bis auf 1 Procent.

Zweitens geht aus allen Tabellen hervor, dass die Funktion p anfangs mit wachsendem Argument ebenfalls zunimmt. Dass ein solches Verhalten bei der Funktion k wahrscheinlich ist, hatte ich aus den in meiner Dissertation (die Magnetisirungsgase des Eisens für schwache magnetisirende Kräfte, Göttingen 1871) mitgetheilten Versuchen geschlossen, es wurde aber diese auffallende Thatsache zuerst mit Sicherheit ausgesprochen und nachgewiesen durch Herrn Stoletow.

Die untere Grenze derjenigen Kräfte, für welche die Funktion p bestimmt wurde, ist bis jetzt gegeben durch Versuche, welche ich im Jahre 1870 ausgeführt und im Laufe dieses Sommers mit erweiterten Mitteln wiederholt habe. Es wurden hiebei 7 Ellipsoide aus Eisen von allmälig zunehmender Excentricität successive der magnetisirenden Wirkung der horizontalen und verticalen Componente des Erdmagnetismus unterworfen; das indueirte magnetische Moment wurde nach Webers Methode (Abh. d. Gött. Soc. 6ter Band) gemessen und daraus der Werth von p berechnet. Indem ich einen aus-

führlicheren Bericht über die Versuche selbst mir vorbehalte, begnüge ich mich hier die Resultate derselben anzuführen. Dieselben bestehen für jedes der Ellipsoide in zwei Werthen von *p* entsprechend den beiden zur Induktion benützten Componenten des Erdmagnetismus; es sind diese Werthe in folgender Tabelle zusammen gestellt in welcher die einzelnen Ellipsoide durch die Zahlen I bis VII bezeichnet sind.

	p'	P	p	P
I.	0 2370	7,96	0,2374	18,85
II.	0,2364	10,41	0,2370	24,25
III.	0,2363	13,20	0,2373	31,20
IV.	0,2360	16,16	0,2367	38,00
V.	0,2364	22,65	0,2367	52,88
VI.	0,2357	28,11	0,2369	69,01
VII.	0,2363	33,67	0,2368	80,43

Zwischen den Werthen von *p*, welche sich auf verschiedene Ellipsoide beziehen ist ein bestimmter Zusammenhang nicht erkennbar; dagegen ergiebt sich aus der Vergleichung der Werthe von *p*, welche einem und demselben Ellipsoide angehören, dass schon für die äusserst schwachen Kräfte um welche es sich hier handelt, eine Zunahme der magnetisirenden Kraft begleitet ist, von einer Zunahme der Funktion *p*. Uebrigens überzeugen wir uns leicht, dass die obigen auf 7 verschiedene Eisenstücke sich beziehenden Werthe von *p*, den in den früheren Tabellen enthaltenen sich ganz gut anschliessen.

Wir werden demnach als Resultat der ganzen Untersuchung folgende zwei Sätze aufstellen können.

1. Die Magnetisirungsfunktion der Kugel, p, ist für Werthe der magnetisirenden Kraft von 8 bis 40000 bis auf 1 Procent als konstant zu betrachten, für sämmtliche zu den obigen Versuchen benützten Eisensorten. Der Mittelwerth derselben innerhalb der genannten Grenzen des Argumentes ist:

$$p = 0{,}2372.$$

2. Eine genauere Betrachtung des Verlaufes der Funktion p zeigt, dass dieselbe anfangs bei wachsendem Argument zunimmt, zwischen den Werthen des Arguments $P = 20000$ und $P = 30000$ ein Maximum erreicht und bei noch weiter zunehmenden Argument wieder abnimmt. Der Maximalwerth der Funktion p ist im Mittel aus den obigen Beobachtungen

$$p = 0{,}2382.$$

Zur Vergleichung mögen im Folgenden noch zwei Tabellen für die Werthe der Magnetisirungsfunktion k mitgetheilt werden, welche auf Grund der von v. Quintus Icilius und Stoletow ausgeführten Versuche berechnet sind und welche ich der Arbeit des Herrn Stoletow entnehme. Die beiden ersten Columnen beziehen sich auf die auch im Vorhergehenden benützten Versuche von v. Quintus Icilius, die beiden letzten auf die Versuche Stoletows.

k	K	k	K
20,1	5,2	21,54	4,30
23,1	10,3	26,44	7,02
45,3	22,2	40,95	9,22
83,4	34,4	59,76	11,51
98,1	47,0	76,53	13,67
107,3	64,9	104,5	15,60
76,8	116,5	157,0	23,20
47,1	213	174,2	32,12
21,9	495	120,0	83,26
7,11	1723	93,97	119,6
5,37	2449	66,87	179,3
3,05	4229	47,29	272,7
2,86	4541	42,13	307,3

Man sieht, dass in diesen beiden Tabellen eine gewisse allgemeine Aehnlichkeit im Verlaufe der Funktion *k* nicht zu verkennen ist; aber im einzelnen ist die Abweichung derselben von einander eine so grosse, dass einem und demselben Argumente *K* unter Umständen in der einen Tabelle ein doppelt so grosser Werth von *k* entspricht als in der anderen. Es ergiebt sich daher, dass in der Funktion *k* sowohl die verschiedene magnetische Natur des Eisens, als auch die Fehler der Beobachtung in ausserordentlich vergrössertem Massstabe sich darstellen, und dass somit von diesem Gesichtspunkte aus der Funktion *p* ein ganz entschiedener Vorzug vor der Funktion *k* zukommt.

Es möge mir schliesslich noch gestattet sein, auf die im vorhergehenden entwickelten Resul-

tate noch einen Blick zu werfen vom Standpunkte der Molekulartheorie aus.

Die Molekulartheorie betrachtet einen Eisenkörper als einen Haufen kleiner Molekularmagnete, deren Axen im unmagnetischen Zustande alle möglichen Richtungen einnehmen. Wirkt auf den Eisenkörper eine magnetisirende Kraft, so werden alle Molekularmagnete aus ihrer ursprünglichen Gleichgewichtslage abgelenkt werden und zwar wird einer bestimmten magnetisirenden Kraft für jeden einzelnen Molekularmagnet eine ganz bestimmte Ablenkung entsprechen; wir können die Ablenkung jedes einzelnen Molekularmagnets darstellen als Funktion der magnetisirenden Kraft. Daraus folgt aber auch, wenn wir aus dem ganzen Haufen der Molekularmagnete einen einzelnen herausgreifen und die Ablenkung desselben aus der Gleichgewichtslage bestimmen, dass wir dann die Ablenkungen aller übrigen Molekularmagnete darstellen können als Funktionen der Ablenkung jenes einzelnen. Wir werden somit auch das molekulare Drehungsmoment, welches alle übrigen Magnete auf jenen aus der ganzen Zahl herausgegriffenen Magnet ausüben, darstellen können als Funktion des Winkels, um welchen der letztere aus seiner Gleichgewichtslage abgelenkt ist. Es wird diese Funktion natürlich abhängen von der Gestalt des betrachteten Eisenkörpers.

Weber hat nun den Versuch gemacht, das molekulare Drehungsmoment darzustellen durch das Produkt aus einer konstanten Direktionskraft D und dem Sinus des Ablenkungswinkels. Bezeichnen wir die magnetisirende Kraft durch P, die Zahl der in der Volumeinheit befindlichen Molekularmagnete durch n, den Magnetismus eines einzelnen derselben durch μ, so ergiebt sich

unter der obigen Annahme, so lange die Direktionskraft D grösser ist als die magnetisirende Kraft P, für das in der Volumeinheit inducirte magnetische Moment der Ausdruck

$$\tfrac{2}{3} n \mu \frac{P}{D}.$$

Der Quotient aus dem inducirten Magnetismus und der magnetisirenden Kraft wird somit gleich

$$\tfrac{2}{3} \frac{n \mu}{D}$$

also gleich einer Constanten. Unter der von Weber gemachten Voraussetzung ist somit die Magnetisirungsfunktion eine Constante, so lange als die magnetisirende Kraft P kleiner oder höchstens gleich ist der molekularen Direktionskraft D. Nun ergiebt sich aber aus den oben mitgetheilten Versuchen, dass die Magnetisirungsfunktion p der Kugel in der That innerhalb gewisser Grenzen eine Constante ist, es wird also die von Weber gemachte Voraussetzung für die Kugel innerhalb gewisser Grenzen zutreffen und wir erhalten daher für die Magnetisirungsfunktion p die Gleichung

$$p = \tfrac{2}{3} \cdot \frac{n \mu}{D}.$$

Setzen wir den constanten Werth von p gleich 0,2372, so ist der grösste Werth der magnetisiden Kraft, für welchen p noch diesen Werth besitzt

$$P = 40000$$

und wir werden demnach auch wenigstens annähernd setzen können:

$$D = 40000.$$

Die molekulare Direktionskraft, welche eine Kugel aus weichem Eisen von der Einheit des Volumens auf einen in ihrem Innern befindlichen Molekularmagnet ausübt kann etwa gleich 40000 gesetzt werden.

Substituiren wir diesen Werth in der Gleichung

$$p = \frac{2}{3} \cdot \frac{n\mu}{D}$$

und setzen wir gleickzeitig für p den Werth 0,2372, so ergiebt sich

$$n\mu = 14200.$$

Es ist dieses Produkt aber offenbar nichts anderes als der Maximalwerth, welchen das in der Volumheit inducirte magnetische Moment nach der Molekulartheorie anzunehmen im Stande ist, eine Zahl für welche Waltenhofen (Pogg. Ann. Bd. 137) auf einem ganz anderen Wege den Werth

$$n\mu = 16000$$

abgeleitet hat.

Ueber einen bisher unbeachteten Brief Spinozas und die Korrespondenz Spinozas und Oldenburgs im Jahre 1665.

Von Dr. **Alfred Stern.**

In dem Briefwechsel Spinozas und Heinrich Oldenburgs befinden sich, wie man weiss, mehrere Lücken, welche auch durch die neuentdeckten von v. Vloten herausgegebenen Aktenstücke (Ad Benedicti de Spinoza opera quae supersunt omnia supplementum. Amstelodami 1862) nicht vollständig ausgefüllt werden. So wird a. a. O. S. 300 zwar ein vorher unbekannter Brief Oldenburgs an Spinoza mitgetheilt, welcher ohne Zweifel ganz richtig in den September 1665 versetzt wird, indessen sowohl der vorhergehende Brief Spinozas, (vom vierten September 1665), den Oldenburg in den vorliegenden Zeilen beantwortet, wie auch die Antwort Spinozas auf diesen Brief seines Freundes hat sich bisjetzt nicht auffinden lassen. Von diesem bisher vermissten Antwortschreiben Spinozas glaube ich wenigstens ein nicht unbedeutendes Bruchstück nachweisen zu können. Es befindet sich im fünften Bande der »Works of the honourable Robert Boyle« (London 1744 fol.) p. 339. Daselbst bemerkt man nämlich unter der übrigen reichhaltigen Korrespondenz Robert Boyles einen Brief seines Freundes Heinrich Oldenburg, datirt vom »10. Oct. 1665.« Unter anderen Mittheilungen erwähnt Oldenburg a. a. O. auch einen Brief, den er am siebenten Oktober (»On Saturday last«) an den bekannten Sir Robert Moray gesandt habe, und theilt aus diesem seinem Schreiben an S. R. Moray unter Anderem Folgendes mit. »In the same letter to Sir Robert, I took notice to him

of what a certain odd philosopher, (whom you know better than he, it being signior Spinoza) hath very lately written to me concerning M. Huygens's transmigration into France, his pendulums, and his progress in diopticks etc. The same Spinoza expresses a very great respect for you [R. Boyle.] and presents you his most humble service, and is displeased, that the Dutch stationers will, in spight of our teeth, sell off one of their own Latin impressions of their history of Colours, before the translation, made here, can be sent thither.

To give you an extract of what he is thinking and doing, he writes thus:

Gaudeo, philosophos vestrates vivere, sui suaeque reipublicae memores. Quid nuper fecerint expectabo, quando bellatores sanguine fuerint saturi, et, ad vires nonnihil instaurandas, quieverint. Si celebris ille irrisor haec (sic!) aetate viveret, risu sane periret. Me tamen hae turbae nec ad risum, nec etiam ad lacrymandum, sed potius ad philosophandum, et humanam naturam melius observandam, incitant. Nam nec naturam irridere, mihi fas existimo, multo minus ipsam deplorare, dum cogito, homines, ut reliqua, partem tantum esse naturae, meque ignorare, quomodo unaquaeque pars naturae cum suo toto conveniat, et quomodo cum reliquis cohaereat [1]); et ex solo hujus cognitionis defectu reperio, quod quaedam naturae, quae ita ex parte et non nisi mutilate percipio, et quae cum nostra mente philosophica minime conveniunt, mihi antehac vana, inordinata, absurda, videbantur: jam vero unumquemque ex suo ingenio vivere sino, et qui volunt, profecto suo bono moriantur, dum-

1) vgl. Ethices pars III. Praefatio Ed. Bruder I 270. 271.

modo mihi pro vero vivere liceat. Compono jam tractatum de meo circa scripturam sensu; ad id vero faciendum me movent, 1. Praejudicia theologorum; scio enim, ea maxime impedire, quo minus homines animum ad philosophiam applicare possint; ea igitur patefacere atque amoliri a mentibus prudentiorum satago. 2. Opinio, quam vulgus de me habet, qui me atheismi insimulare non cessat: eam quoque averruncare, quoad fieri potest, cogor. 3. Libertas philosophandi dicendique quae sentimus; quam asserere omnibus modis cupio, quaeque hic ob nimiam concionatorum authoritatem et petulantiam utcunque supprimitur. Nondum audio, Cartesianum aliquem ex Cartes. hypothesi, nuperorum cometarum phaenomena explicare; et dubito, an ex illa rite explicare possint.«

Welches Datum der Brief Spinozas getragen, aus dem Oldenburg seinem Freunde Boyle dies interessante Fragment mittheilt, ist nicht genau zu bestimmen, das »very lately« (s. o. S. 524) in Verbindung mit dem Umstand, dass Spinozas Brief bereits am 7. Oktober in Oldenburgs Händen gewesen, lässt den Schluss zu, dass er nicht allzulange vor diesem Tage geschrieben sei. Dass aber in dem Mitgetheilten in der That die direkte Antwort auf den bei v. Vloten S. 300 abgedruckten Brief Oldenburgs zu erkennen, lehrt die Vergleichung beider Aktenstücke. Die in Holland vorbereitete Uebersetzung von Boyles Traktat über die Farben, der Holländisch-Englische Krieg: eben diese Gegenstände hatte Oldenburg in seinem Schreiben berührt, betreffend Huygens' Arbeiten hatte er eine förmliche Anfrage an Spinoza gerichtet, welche dieser nun beantwortet. (s. o. S. 524 die Worte: »hath very lately written to me concerning Mr. Huygens's

transmigration into France, his pendulums and his progress in diopticks etc.«) Ja er hatte die längere Auseinandersetzung über Motive und Zweck von Spinozas Arbeit durch die Frage provocirt: id saltem rogo, ut consilium et scopum tuum in isthoc tuo scripto mihi in proximis tuis significare non graveris« (v. Vloten S. 301.) Ebenso klar scheint mir zu sein, dass Oldenburgs Brief vom 12. Okt. 1665 (Epistola XIV in Bruder's Ausgabe von Spinozas Werken. Vol. II. 182) die unmittelbare Erwiderung auf jenes Schreiben Spinozas ist, von dem ich soeben das erhaltene Bruchstück mitgetheilt habe. Oldenburgs Bemerkung: »Brevi putem me accepturum quid de cometis nuperis sit statuendum etc. — explicare« bezieht sich offenbar auf Spinozas Worte: »Nondum audio Cartesianum aliquem ex Cartes. hypothesi nuperorum cometarum phaenomena explicare« etc. und die Worte in Oldenburgs Brief: »Causas quas memoras tanquam incitamenta ad tractatum de Scriptura concinnandum omnino probo,« werden erst jetzt verständlich, indem man sie als Antwort auf Spinozas letzte Mittheilungen über seine Arbeiten auffasst. Ebenso knüpft die Bitte weitere Aufklärung über die schwierige Frage zu geben: »quomodo unaquaeque pars naturae cum suo toto conveniat et qua ratione cum reliquis cohaereat« unmittelbar an Spinozas Sätze an. Dieser kam auch schon in seinem nächsten Briefe dem Wunsche des Freundes nach, (s. Epistola XV bei Bruder II. 184) und Oldenburg nahm in seinem Antwort-Schreiben vom 8. December 1665 (Nr. XVI bei Bruder II. 188) noch einmal auf den Gegenstand Bezug.

Auch hier wieder verfehlt Oldenburg nicht dem Sir Robert Boyle aus Spinozas Briefe Einiges

mitzutheilen, wodurch uns Gelegenheit gegeben wird, das Datum dieses Briefes etwas genauer zu bestimmen.

Am 21. November 1665 schreibt Oldenburg an Boyle (Boyle's Works V. 341): »I find Mr. Huygens is very busy in making trials of optick glasses by a very fine engine, I hear, he has lately caused to be made for the purpose; but I heard nothing more concerning the book of Colours in Holland, though I had lately another letter from Signior Spinoza, who is very much your servant, and who entertains me with a discourse of his concerning the agreement and coherence of the parts of the world with the whole; which is not unphilosophical in my opinion, though it would perhaps be tedious to you to have a letter filled with it; and this makes me forbear to send it you.« Und in einem anderen Brief an Boyle vom 5. Dec. 1665 (Boyle's Works V. 342) findet sich die Notiz: »I think it will be most convenient every way, to remit Signior Spinoza's discourse de consensu partium, till our personal interview« etc.

Es ist kaum nöthig darauf hinzuweisen, welches Werk Spinozas unter dem Traktat gemeint sei, welchen Spinoza in dem mitgetheilten Brief-Fragment „tractatum de meo circa scripturam sensu" und Oldenburg (am 12. Okt.) „tractatum de Scriptura" nennt. Sigwart (in seiner Schrift: Benedict de Spinoza's kurzer Tractat von Gott, dem Menschen und dessen Glückseligkeit Tübingen 1870 p. LVIII. LX) hat bereits bemerkt, dass hier vom Tractatus theologico-politicus die Rede ist, und das von mir mitgetheilte Bruchstück des Briefes Spinozas wird es

über allen Zweifel erheben, dass eben damals, im Jahre 1665, jenes Werk begonnen wurde[1].

Leider bin ich nicht im Stande mit gleicher Sicherheit einen Zweifel zu lösen, welcher durch einen im Vorigen noch nicht berührten Brief Oldenburgs erregt wird. Es ist dies Ep. XVII b. Bruder II. 190. In dem frühesten Abdruck der Korrespondenz Spinozas (Opera posthuma 1677 p. 445) nimmt dieses Schreiben Oldenburgs die allerdings eigenthümliche Stellung nach allen übrigen Briefen des Jahres 1665, selbst nach einem Briefe Oldenburgs vom 8. December, ein, während es datirt ist: „8. Octob. 1665". Schon hieraus darf man vielleicht Vermuthungs Weise schliessen, dass der Herausgeber, wohl über das Jahr (1665) ganz sicher war, bei der Lesung des Monats-Datums seiner Sache aber doch nicht so völlig gewiss war, um den Brief chronologisch einzufügen, und es vorzog ihn nur überhaupt unter dem Jahre 1665 anzubringen. Dass in dem Datum etwas Falsches steckt, ist klar; wenn man die unten gegebene Uebersicht zu Rathe zieht, wird man bemerken, dass vom 4. September bis zum 8. December 1665 die Kette des Briefwechsels der beiden Freunde ununterbrochen fortläuft, so dass sich für einen Brief Oldenburgs vom 8. Okt. kein Raum findet.

1) Da ich ein Mal auf die Korrespondenz Boyles hingewiesen habe, so will ich aus ihr noch eine Stelle herausheben, die sich auf den 1670 im Druck erschienenen tractatus theol. pol. bezieht. In einem »Christ-Church College, Dec. 4« datirten Brief schreibt der Philosoph Henry More unter Anderem an Boyle: it is not a week ago, since I saw a letter, that informed me, that Spinosa, a Iew first, after a Cartesian, and now an atheist, is supposed the author of Theologico-Politicus. I suppose you may have seen the book etc. (s. Boyle's Works V 551.)

Und dies um so weniger, da er in dem fraglichen Schreiben auf einen einige Wochen vorher abgesandten, für uns verloren gegangenen Brief hindeutet, der doch an irgend einer Stelle des Briefwechsels aus dem Jahre 1665 noch hätte erwähnt werden müssen.

Sodann schienen innere Gründe dafür zu sprechen das Datum „8. Oct. 1665" zu verändern. Oldenburg schreibt, er habe sich in seinem vorigen Briefe bedankt „pro tractatu tuo mihi transmisso, licet nunquam tradito" und er giebt über den Inhalt jenes Traktats, der ihm also auf andere Weise zu Gesicht gekommen sein muss, einige Andeutungen. Er schreibt nämlich „Indicaveram in iis (sc. in dem verloren gegangenen Briefe) meam de tractatu illo sententiam; quam utique, dehinc re propius inspecta et perpensa nimis immaturam fuisse nunc excistimo. Quaedam mihi videbantur tunc temporis vergere in fraudem religionis, dum eam ex eo pede metiebar, quam theologorum vulgus et receptae confessionum formulae (quae nimium spirare videntur partium studia) sappeditant. At totum negotium intimius recogitanti multà occurrunt, quae mihi persuasum eunt, te tantum abesse ut quicquam in verae religionis solidaeve philosophiae damnum moliaris, ut contra genuinum Christianae religionis finem, nec non divinam fructuosae philosophiae sublimitatem et excellentiam commendare et stabilire allabores".

Was lag näher als in diesen Worten eine Hindeutung auf den tractatus-theologico-politicus zu finden? Da dieser nun aber erst 1670 erschien, und da vom 8. Dec. 1665 bis zum 22. Juli 1675 eine grosse Lücke in der Korrespondenz der beiden Freunde vorhanden ist, so hielt sich, irre ich nicht, zuerst v. Murr, nach ihm

u. a. auch Bruder für berechtigt das 1665 in 1675 zu verändern[1]). Aber auch das »8. Oct.« konnte nicht stehn bleiben, v. Murr machte daraus »8. Juni«, ohne Zweifel durch den Wunsch geleitet, wenigstens die Zahl zu retten und, um den Zusammenhang des Briefwechsels vom Jahre 1675 herzustellen, für den Monat ein möglichst spätes Datum anzunehmen. Er denkt sich offenbar den Hergang so.

Vom 8. Dec. 1665 an hörte aus unbekannten Gründen der Briefwechsel beider Freunde für lange Zeit auf. Etwa Anfangs 1675 übersandte Spinoza dem H. Oldenburg ein Exemplar seines tractatus-theologico-politicus; dies gieng zwar verloren, indes Oldenburg hatte von der Absicht Spinozas Kunde erhalten, zudem das unschwer zugängliche Werk gelesen und gab, nachdem er schon einige Wochen vorher ein Dankschreiben abgesandt, dem Dr. Bourgeois einen neuen Dank-Brief (die fragliche Ep. XVII) mit. Spinozas nächster Brief vom 5. Juli 1675 ist nicht mehr vorhanden, nur aus Oldenburgs Antwort vom 22. Juli 1675 (Bruder Ep. XVIII) haben wir Kunde von seiner einstigen Existenz.

Unerklärt bleibt hierbei, wie es geschah, dass Oldenburg nicht bereits früher mit Spinoza über ein Werk korrespondirt hat, an dessen Entstehen er im Jahre 1665 ein so reges Interesse genommen hatte, und welches bereits in zwei Ausgaben (von 1670 und 1673) im Drucke vorlag[2]). Indessen sollte man überhaupt unweiger-

1) In der Ausgabe von Paulus dagegen Bd. I p. 505 trägt der Brief sein ursprüngliches Datum: »8 Octob. 1665« und nimmt dieselbe Stellung ein wie in der Ausgabe der Op. posthuma.

2) Hatte sich Oldenburg vielleicht gerade nach dem Erscheinen des tractatus-theologico-politicus veranlasst gesehen, sich zeitweise von Spinoza zurückzuziehn, und ist etwa die grosse Lücke in der Korrespondenz der Freunde

lich gezwungen sein Oldenburgs Worte auf den tractatus-theologico-politicus zu beziehn? Ich

zum Theil dadurch zu erklären? Wenigstens scheint soviel festzustehen, dass sowohl Oldenburg wie Boyle, soweit erkennbar, weil sie über den Inhalt des tract. theol. pol. stutzten, sich eine »eigenthümliche Ansicht« über Spinoza gebildet hatten. Erst Tschirnhausen, welcher im Sommer 1675 in England verweilte, bewog beide Männer den Philosophen und sein neuestes Werk in besserem Lichte anzusehn, und es ist beachtenswerth, dass um eben diese Zeit der lang unterbrochene Briefwechsel, vermuthlich durch ein Schreiben Oldenburgs (s. u. S. 532. Anm. 2.) wieder aufgenommen wird. Vgl. den bei v. Vloten 313 an Spinoza gerichteten Brief Schallers vom 25 Juli 1675. So schlecht, und mir wenigstens oft unverständlich Schallers Latein ist, enthält sein Schreiben doch den Beleg für das Gesagte: »Caeterum refert (sc. Tschirnhausen in einem Briefe an Schaller.) Dm. Boyle et Oldenburg mirum de Tua persona formasse conceptum, quam (sic?) ipse eisdem non solum ademit, sed rationes addidit, quarum inductione iterum non solum dignissime et faventissime de eadem sentiant, sed et Tr. Theol. Politicum, summe aestiment, cujus (wonach vielleicht ein »nisi« einzuschieben?) pro regimine Tuo Te certiorem facere non fui ausus« etc. Nun läge allerdings die Versuchung nahe zwischen diesen Mittheilungen und dem fraglichen Briefe Oldenburgs (Ep. XVII) einen Zusammenhang zu statuiren, anzunehmen, dass Tschirnhausen eine Verstimmung Oldenburgs (und Boyles) gegenüber Spinoza, welche nach der Lecture des tr. theol. pol. eingetreten, wieder aufgehoben und H. Oldenburg Anlass gegeben habe, einer scharfen Kritik des Werkes jene versöhnliche Ep. XVII nachzuschicken. Indes scheint mir eine solche Annahme mit dem im Text Entwickelten unverträglich. Oldenburg stand dem tr. theol. pol. immer zu fremd und ablehnend gegenüber, als dass die fast überschwänglichen Ausdrücke der Ep. XVII auf diesen Traktat bezogen werden könnten. Sodann ist an der Thatsache festzuhalten, dass Ep. XVII, nach der ersten Ausgabe, von 1665 datirt. Auch sollte man, im Fall jene Annahme Anspruch auf Richtigkeit machen wollte, eine Erwähnung Tschirnhausens in O. Brief erwarten. — Soviel ich sehe, nimmt weder Trendelenburg in den hist. Beitr. z. Phil. III

meine, es sei sogar kaum möglich, ,wenn man überlegt wie ganz anders Oldenburg an andern Stellen über diesen Traktat sich geäussert hat[1]). Während er hier deutlich ausspricht, dass die religiösen Bedenken, die er Anfangs beim Durchlesen des fraglichen Traktats gehegt habe, völlig geschwunden seien, macht er am 15. Nov. 1675 (Ep. XX Bruder II. 194), am 16. Dec. 1675 (Ep. XXII Bruder II 198), am 14. Januar 1676 (Ep. XXIV. Bruder II 201) und am 11. Februar 1676 (v. Vloten 309) sehr gewichtige, fremde und eigne, Bedenken der Art geltend.

Macht man sich aber einmal von der vorgefassten Idee los, dass in der fraglichen Ep. XVII unter dem »tractatus transmissus, licet nunquam traditus« der tractatus-theologico-politicus zu verstehn sei, so liegt durchaus kein Grund vor das Datum der ersten Edition »1665« willkürlich in »1675« zu verändern[2]). Die Bezeichnung des Monats bedarf allerdings, wie oben bemerkt, jedenfalls einer Korrektur, und es entsteht nun die doppelteFrage, wie diese zu machen ist, und welcher Traktat denn in Wahrheit gemeint sein könne, wofern wir der Ep. XVII ihr ursprüngliches Jahres-Datum 1665 lassen.

227 noch v. Kirchmann in seiner Uebersetzung von Spinozas Schriften und den Erläuterungen dazu auf jene bei v. Vloten zuerst mitgetheilte, und jedenfalls nicht unwichtige Stelle, irgend welche Rücksicht. Von Auerbachs Uebersetzung liegt mir die zweite Ausgabe nicht vor. Weissenborns »Lebenbeschreibung des E. W. v.Tschirnhaus« (Eisenach 1866) gewährt keinen weiteren Aufschluss.

1) Auch v. Vloten S. 311 hat dies gefühlt, doch hält er an der v. Murrschen Korrektur fest.

2) Der lange Zeit unterbrochene Briefwechsel (Commercio literario sic feliciter instaurato«) würde demnach 1675 wieder aufgenommen sein durch einen nicht mehr erhaltenen Brief Oldenburgs, auf den Spinoza am 5. Juli 1675 antwortete (Bruder II. 192.)

In Betreff der ersten Frage wüsste ich Folgendes zu bemerken: Wir besitzen einen Brief Spinozas an Oldenburg vom Mai 1665 (Bruder II, 181 ep. XIII), das nächste Stück aus dem Briefwechsel, von dem wir Kunde haben, ohne doch es zu besitzen, ist Spinozas Brief an Oldenburg vom 4. Sept. 1665 (s. den Anfang von Oldenburgs Brief bei Vloten 300). Zwischen Mai und viertem Sept. 1665 ist also eine Lücke in der Korrespondenz. Wenn irgendwo, so lässt sich in diese die fragliche Ep. XVII einschieben. Und wenn nun eine Vermuthung geäussert werden darf, so ist es die, dass dieser Brief ursprünglich »8. August. 1665« datirt gewesen ist. Aus dem »8. VIII. 1665« mochte ein gedankenloser Kopist leicht »8. Octo 1665« machen, womit denn der achte October gegeben war. Nehmen wir den achten August als das richtige Datum an, so gewinnen wir auch vollständig Raum für den »einige Wochen« vorhergegangenen uns verlorenen Brief Oldenburgs, den er erwähnt.

Unter dem »tractatus transmissus, licet nunquam traditus« verbirgt sich aber meiner Meinung nach nichts Anderes als Spinozas Werk: »Renati des Cartes Principia Philosophiae more geometrico demonstrata, accesserunt ejusdem cogitata metaphysica.« Folgende Gründe bewegen mich zu dieser Annahme: Wenn Oldenburg einen Traktat Spinozas genau durchgelesen hat, von dem ihm ein Exemplar zwar zugedacht war, ohne doch je in seine Hände zu gelangen, wenn er ferner unmittelbar nach Erwähnung jenes leidigen Zufalles als ganz natürlich voraussetzt, dass er doch Einsicht in das Buch gewonnen, ohne irgendwie anzudeuten, auf welche Weise dies geschehen sei: so wird kaum eine andere Deutung erlaubt sein, als dass wir es hier mit

einem Druckwerk zu thun haben, welches auch in England verbreitet und dort unschwer zu erlangen war [1]).

Das einzige Druckwerk aber, das hier in Betracht kommen kann, ist das Genannte, welches 1663 erschien. Dass Oldenburgs Andeutungen (»Quaedam mihi videbantur tunc temporis vergere in fraudem religionis« etc. s. o. S. 529) zu dem Inhalt namentlich des Appendix der Principia »continens cogitata metaphysica« ganz wohl passen, wird, denke ich, zugegeben werden [2]). Auch dürfte man sich nicht daran stossen, dass zwischen dem Erscheinen des Werkes und dieser ersten Erwähnung des erschienenen Werkes in dem Briefwechsel der Freunde ein so langer Zeitraum verstrich. Wir wissen aus Oldenburgs Brief vom 28. April 1665 (Ep. XII. b. Bruder II. 180) dass der briefliche Verkehr zwischen ihm und Spinoza viele Monate lang (»per tot mensium spatium«) unterbrochen war. Zum grossen Theil waren die Holländisch-Englischen Verwicklungen die Ursache dieser Unterbrechung, sie erschwerten den Verkehr zwischen dem einen und dem andern Lande. Vielleicht beraubten sie Spinoza der Möglichkeit Oldenburg seine 1663 erschienene Arbeit zu senden. Es war natürlich, dass er, sobald die Verbindung mit Oldenburg wieder hergestellt war, den Versuch dazu machte, und die Vermu-

1) Die Vermuthung liegt nahe, dass sich Oldenburg die »Princigia« von einen Freunde geliehen habe. Am 12 Okt. 1665 (Ep. XIV. Bruder II. 183) schreibt er »Non jam ad manum est libellus, quem antehac edidisti de Cartesii principiis geometrice demonstratis non subit animum, num ibi falsitatem istam ostenderis, an vero Cartesium in aliorum gratiam κατὰ πόδα fueris secutus.«

2) S. z. B. Cap. X De creatione.

thung liegt nahe, dass sein Brief vom Anfang Mai 1665, der erste, den er nach langer Zeit wieder an Oldenburg schrieb (Ep. XIII. Bruder II. 181) auf dessen Worte hin: »Ego quid tu nuper egeris vel sub manu habeas, accipere a manu tua propria aveo«: eine Bemerkung über die Vollendung der »Principia« und über die Absicht dem Freunde ein Exemplar zu senden, enthielt. Man muss im Auge behalten, dass dieser Brief Spinozas nur fragmentarisch erhalten ist, er bricht mit einem »etc.« ab.

Die von mir gemachte Annahme giebt endlich auf eine natürliche Frage die Antwort. Im Jahre 1663 hatten Spinoza und Oldenburg mehrfach über das im Druck befindliche Werk der »Principia« korrespondirt. Spinoza hatte dem Freunde einige Exemplare desselben versprochen (Ep. IX Bruder II 169), Oldenburg hatte zweimal gebeten das Werk dem in Amsterdam wohnenden Peter Serrarius zu übergeben, welcher es einem nach England reisenden Bekannten dann zur Besorgung anvertrauen sollte (Ep. X. XI Bruder II 175. 179). Diese, zum zweiten Mal am 4. August 1663, ausgesprochene Bitte ist fast das letzte Wort der Korrespondenz beider Freunde aus dem Jahre 1663 [1]). Nun tritt in ihrem Briefwechsel jene Pause von vielen Monaten ein, wir haben keinen Grund die Existenz eines früheren Briefes Oldenburgs anzunehmen als jenes Schreibens vom

1) Die Annahme erscheint gerechtfertigt, dass Spinoza Oldenburgs Brief vom 4. August 1663 seinerseits noch beantwortet hat. Wenigstens deuten die ersten Sätze in Oldenburgs Briefe vom 28. April 1665 (Ep. XII) unverkennbar an, dass damals Oldenburg selbst an der Reihe des Schreibens war, und nicht Spinoza, der überhaupt der pünktlichere Korrespondent gewesen zu sein scheint.

28. April 1665, (Ep. XII) welches die Korrespondenz wieder aufnimmt. Man erwartet selbstverständlich, dass von dem inzwischen erschienenen Werke Spinozas zwischen den Freunden ein Mal die Rede ist. Durch meine Deutung und Datirung der Ep. XVII wird diese Erwartung inder That erfüllt.

Zugleich wird aber, wenn man dieser Ep. XVII das Datum des 8. August 1665 giebt, der Zusammenhang mit den folgenden Briefen gut hergestellt. Oldenburg bittet in diesem Briefe, Spinoza möge ihm in häufigen Schreiben Mittheilungen über seine augenblicklichen Arbeiten machen [1]). Dass dies in Spinozas verloren gegangenem Brief vom 4. September geschehen, dürfen wir aus Oldenburgs Erwiderung (v. Vloten 300) schliessen. Er schreibt nämlich: »Video te non tam philosophari quam, si ita loqui fas est, theologizare, de angelis quippe, prophetia, miraculis cogitata tua consignas; sed forsan id agis philosophice«, und hieraus geht deutlich hervor, dass Spinoza ihm Andeutungen über den Inhalt des tractatus theologico-politicus gemacht hatte, mit dessen Abfassung er eben beschäftigt war (s. auch Sigwart a. a. O. p. LX).

Mit einem Worte: Alles scheint die Ansicht zu begünstigen, dass Ep. XVII vom 8. August 1665 zu datiren sei. Indem ich die Richtigkeit dieser Vermuthung der Beurtheilung Anderer

1) B. Bruder II. 191. 3. »Quum igitur — tollam.« Der folgende Satz: »Ni fallor admodum, penitius mihi perspicere videris mentis humanae naturam et vires ejusque cum corpore nostro unionem« etc. scheint auf ein Thema hinzudeuten, welches ein früherer Brief Spinozas berührt hatte. Unglücklicher Weise ist aber nach dessen Brief vom Anfang Mai 1665 (Ed. XII Bruder II 180) bis zum Oktober desselben Jahres kein weiteres Schreiben von ihm vorhanden.

unterwerfe, füge ich zum Schluss eine chronologische Uebersicht des Briefwechsels Spinozas und Oldenburgs aus dem Jahre 1665 an, wie sie sich nach den gemachten Angaben zu gestalten hätte:

O. an Sp.	28. April 1665	(Bruder XII)
Sp. an O.	Mai 1665	(Bruder XIII)
. . . .	. . . .	. . . .
. . . .	. . . .	. . . .
O. an Sp.	? circa Anfang Juli 1665	(verloren, erwähnt in ep. XVII b. Bruder).
O. an Sp.	? 8. August 1665	(Bruder XVII)
Sp. an O.	4. Sept. 1665	(verloren, erwähnt bei v. Vloten S. 300).
O. an Sp.	Sept. 1665	(v. Vloten S. 300 ff).
Sp. an O.	kurz vor 7. Okt. 1665	(Fragment in Boyle's Works V. 339).
O. an Sp.	12. Okt. 1665	(Bruder XIV)
Sp. an O.	nach 12. Okt. vor 21. Nov. 1665	(Bruder XV)
O. an Sp.	8. Dec. 1665	(Bruder XVI)

Ueber das Geruchsorgan der Störe.

Vorläufige Mittheilung

von **Oscar Grimm** in St. Petersburg.

Vorgelegt von Henle.

Bekanntlich habe ich vor einigen Jahren gezeigt, dass in der Macula acustica der Katze die Nervenfasern in das Epithel eintreten und hier mit den sog. Becherzellen in nächster Verbindung stehen, indem die letzten als Endorgane derselben erscheinen. Indem ich aber in den letzten zwei Jahren die Structur des Geruchsorgans der Störe studirt habe, erlaube ich mir die erzielten Resultate der k. Societät kurz vorzulegen.

Das Geruchsorgan ist bei den Stören vollkommen ähnlich demjenigen anderer Fische (wie

Esox lucius, nach M. Schultze) gebaut, nur dass hier die runden oder ovalen Riechgruben durch längliche Rinnen ersetzt sind, die quer auf den Radiallamellen des Organs liegen. In diesen Rinnen finden wir zwischen den Epithelialzellen die sog. Fadenzellen, von denen über die Oberfläche der Epithelialschicht ziemlich lange Haare oder eher Borsten hervorstehen. Diese Fadenzellen bestehen aus dem Nucleus mit einem Nucleolus, der leicht pater-noster-förmig anschwellenden Zellenwandung und einem von Osimiumsäure sich schwärzenden Faden, der in den Axencylinder der entsprechenden Nervenfaser übergeht; es ist sehr wahrscheinlich, dass zwischen diesem Strang und der Zellenwandung noch vielleicht eine flüssigere (Protoplasma)-Substanz eingeschlossen ist, die man aber gar nicht zu Gesicht bekommt.

Ausser diesen echten Fadenzellen sind mir noch andere vorgekommen, die augenscheinlich nichts anderes als modificirte, verdickte Fadenzellen sind, da man leicht ganze Reihen von Uebergangsformen auffindet. Diese Zellen erinnern an die Engelmann'schen Gabelzellen, da ihr oberes Ende öfters in zwei oder drei getheilt ist; und dem ersten Blick nach könnte man sie auch mit den Epithelialzellen verwechseln; dass sie aber nichts mit diesen Gemeinschaftliches haben, wird dadurch bewiesen, dass sie ebenfalls, wie auch die echten Fadenzellen, einen Strang im Innern haben, der continuirlich in die Nervenfaser übergeht, und dass sie weder den Verbindungssaum, noch die für die Epithelialzellen der Geruchsschleimhaut charackteristische Längsstreifung besitzen.

Höchst interessant wäre auf embryologischem Wege die wahre Natur dieser Zellen, d. h.

überhaupt der Fadenzellen, zu bestimmen, da sie dem Baue, Verhalten, Vorkommen und der Function nach viel ähnliches wie mit den Nervenzellen, so auch den Epithelialzellen haben, und also eine Art Verbindungsglied darstellen.

Ueber Synura Urella Ehrb. und Uroglena Volvox Ehrb. und den wahrscheinlichen genetischen Zusammenhang der Catallacten mit den Schwämmen.

Vorläufige Mittheilung

von **Oscar Grimm.**

In diesem Sommer mit der Untersuchung Synura Urella Ehrb. und Uroglena Volvox Ehrb. beschäftigt, bin ich zu einigen interessanten Resultaten gelangt, die ich hier aber nur vorläufig mittheilen kann.

1. Die Synura Urella und Uroglena Volvox gehören zu der neuerdings von E. Haeckel gegründeten Protistengruppe der Catallacten, indem sie sich von der Magosphära planula E. H. nur dadurch unterscheiden, dass sie nur ein Flagellum besitzen.

2. Die Kolonien von Synura sind sehr zahlreich an Individuen, und diejenigen von Uroglena sind kleiner und bestehen auch aus einer kleineren Anzahl von Personen.

3. Eine die Individuen zusammenbindende Zwischensubstanz (Panzer van Ehrenberg) giebt es nicht.

4. Nach dem Zerfall der Kolonie, resp. der Abtrennung der Einzelindividuen von einander, verwandeln sich dieselben in Amöben um sich dann zu encystiren.

5. Sie vermehren sich aber nicht nur durch Encystirung, sondern auch durch Quer- und Längs(?)-Theilung und eine, möchte ich sagen, Sprossentheilung, da es schwer fällt zu entscheiden, ob es eine Sprossung oder nur eine Theilung in schiefer Richtung ist.

6. Die beiden oben benannten Formen habe ich neben und auch selbst im Flussschwamm (Spongilla lacustris Zk.) gefunden. Da aber auch die Magosphära planula von Haeckel ebenfalls in der Nähe einiger Schwämme aufgefunden worden ist, so giebt mir diese Thatsache die Möglichkeit zu vermuthen, dass die Catallacten in einem genetischen Zusammenhang mit den Schwämmen stehen, was auch in der That durch viele Eigenthümlichkeiten wie in der Structur, so auch der Entwicklung bestätigt wird. Und so wäre denn die Gruppe der Catallacten aufzuheben und deren Arten in den Entwicklungscyclus der Schwämme als eine besondere Generation zu ziehen.

Verzeichniss der bei der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften eingegangenen Druckschriften.

August, September, October 1872.

Nature. 145 bis 153. 154. 155. 156.

v. Malortie, Beiträge zur Geschichte des Braunschweig-Lüneburgischen Hauses und Hofes. H. 6.

— — Historische Nachrichten der Familie v. Malortie von 1132—1872. Hannover. 8.

Denkschriften der k. Akademie der Wissenschaften zu Wien. Mathem.-naturwiss. Classe. Bd. XXXI. Wien 1872. 4.

Sitzungsberichte der k. Akademie:
Mathem.-naturwiss. Classe. Erste Abtheilung. Bd. LXIV. Hft. I. u. II. III. IV. u. V. Jahrg. 1871. Zweite Abtheilung. Bd. LXIV. Hft. I. u. II. III. IV. u. V. Jahrg. 1871. Philosoph.-hist. Classe. Bd. LXVIII. Hft. II. III. IV. Jahrg. 1871. Bd. LXIX. Hft. I—III. Jahrg. 1871. Wien 1871. 8.

Oesterreichische Geschichts-Quellen. Abth. II. Bd. XXXV. Ebd. 1871. 8.

Archiv für Oesterreichische Geschichte. Bd. 47 Zweite Hälfte. Ebd. 1871. 8.

Magnetische u. meteorologische Beobachtungen auf der k. k. Sternwarte zu Prag im Jahre 1871. Jahrg. 32. Prag 1872. 4.

A. Kölliker, weitere Beobachtungen über das Vorkommen und die Verbreitung typischer Resorptionsflächen an den Knochen. Würzburg 1872. 8.

Dr. Hermann Knoblauch, über den Durchgang der Wärmestrahlen durch geneigte diathermane Platten. Berlin 1872. 8.

Memorie dell' Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna. Serie III. Tomo I. Fasc. 1. 2. 3. 4. Tomo II. Fasc. 1. Bologna 1872. 4.

Rendiconto delle Sessioni dell' Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna. Anno Accademico 1871—72. Ebd. 1872. 8.

Mittheilungen der Antiquarischen Gesellschaft in Zürich. Nr. XXXV. 1871 und XXXVI 1872. Zürich 1871. 72. 4.

R. Lipschitz, über eine Ausdehnung der Theorie der Minimalflächen. 8.

Josef Haltrich, die Macht und Herrschaft des Aberglaubens in seinen vielfachen Erscheinungsformen. 8.

Der zoologische Garten. Jahrg. XIII. 1872. Nr. 1—6. Frankfurt a. M. 1872. 8.

Jahrbuch der k. k. geologischen Reichsanstalt. Jahrg. 1872. Bd. XXII. Nr. 2. April, Mai, Juni. Wien. gr. 8.

Verhandlungen der k. k. geologischen Reichsanstalt. Nr. 7—10.

Jahres-Bericht des physikalischen Vereins zu Frankfurt a. M. für das Rechnungsjahr 1870—71. Frankfurt a. M. 1872. 8.

Mittheilungen des naturwissenschaftlichen Vereins zu Steiermark. Jahrg. 1872. Graz 1872. 8.

Abhandlungen, herausg. vom naturwissenschaftlichen Vereine zu Bremen. Bd. III. Hft. 2. Bremen 1872. 8.

XXI. Jahresbericht der naturhistorischen Gesellschaft in Hannover von Michaelis 1870 bis dahin 1871. Hannover 1871. 8.

Monatsberichte der Königl. Preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. April, Mai, Juni 1872. Berlin 1872. 8.

Tabulae quantitatum Besselianarum pro annis 1875 ad 1879. computatae. Petropoli 1871. 8. Edidit Otto Struve.

General-Bericht über die europäische Gradmessung für das Jahr 1871. Berlin 1872. 4.

Publikationen des geodätischen Instituts. Maasvergleichungen. Hft I. Ebd. 1872. 4.

Vierteljahrsschrift der Astronomischen Gesellschaft. Jahrg. VII. Hft. III. Leipzig 1872. 8.

Zeitschrift der deutschen morgenländischen Gesellschaft. Bd. 26. Hft. 1. u. 2. Leipzig 1872. 8.

57. Jahresbericht der naturforschenden Gesellschaft in Emden. 1871. Emden 1872. 8.

Jahresbericht am 27. Mai 1871 dem Comité der Nicolai Hauptsternwarte abgestattet vom Director der Sternwarte. St. Petersburg. 1871. 8.

Bulletin de la Société Imp. des Naturalistes de Moscou. Année 1872. Nr. 1. Moscou 1871. 8.

Bulletin de l'Académie R. des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique. 41e année, 2e série, tome 34. Nr. 7 u. Nr. 8. Bruxelles 1871. 8.

Indici generali dei dieci tomi della seconda serie delle Memorie dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna 1871. 4.

Proceedings of the London mathematical Society. Nr. 47. London 1871. 8.

Observations made at the magnetical and meteorological Observatory at Batavia. Vol. I. Batavia 1871. 4.

Transactions of the American Philosophical Society held at Philadelphia. Vol. XIV. New series. Part III. Philadelphia 1871. 4.

Proceedings of the American Philosophical Society. Vol. XII. 2. July to December 1871. Nr. 87. Ebd. 8.

Monthly Reports of the Department of Agriculture for the year 1870 und 1871. Washington 1871. 72. 8.

(Fortsetzung folgt.)

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

11. December. № 27. 1872.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Oeffentliche Sitzung am 7. December.

Marx, zur Erinnerung an die ärztliche Wirksamkeit Hermann Conring's. (Erscheint in den Abhandlungen).
Ewald, Abhandlung zur Zerstreuung der Vorurtheile über das alte und neue Morgenland. (Erscheint in den Abhdl.).
Derselbe, über eine neue Kyprisch-Phönikische Inschrift.
Waitz, über die Formeln der Deutschen Königs- und der Römischen Kaiserkrönung vom 10ten bis zum 12ten Jahrhundert. (Erscheint in den Abh.).
Listing, über unsere jetzige Kenntniss der Gestalt und Grösse der Erde.
Enneper, über die Flächen, welche gegebenen Flächen der Krümmungsmittelpunkte entsprechen.
Neumann, auswärtiges Mitglied, zum Andenken an Clebsch.
Clausius, Corresp., über die Beziehungen zwischen den bei Centralbewegungen vorkommenden characteristischen Grössen.
Grassmann, Corresp., über zusammengehörige Pole und ihre Darstellung durch Producte.
Brioschi, auswärt. Mitgl., und Cremona, Corresp., Schreiben über den Tod von Clebsch.
Bericht des Secretairs.

Am heutigen Tage feierte die K. Gesellschaft d. W. ihren Stiftungstag zum ein und zwanzigsten Mal in dem zweiten Jahrhundert ihres Bestehens. Nachdem die obigen Vorträge gehalten waren, erstattete der Secretair den folgenden Bericht:

Das unter den drei ältesten Mitgliedern der K. Societät jährlich wechselnde Directorium ist zu Michaelis d. J. von dem Hrn. Hofrath Marx in der physikalischen Classe auf den Hrn. Geheimen Hofrath Weber in der mathematischen Classe übergegangen.

Zunächst wurde des grossen Verlustes gedacht, den die mathematische Wissenschaft durch den so frühzeitigen Tod des ordentlichen Mitgliedes der Societät, des Professors Clebsch, erlitten hat. Zu seinem Andenken wurde eine Denkschrift vorgetragen, die das auswärtige Mitglied, Hr. Prof. Neumann, im Namen mehrerer Freunde und Schüler des Verstorbenen für die heutige Feier eingesandt hatte und die in den Nachrichten erscheinen wird. Ein Condolenzschreiben hatten die auswärtigen Mitglieder, die Hrn. Brioschi und Cremona eingesandt.

Die K. Societät verlor ferner durch den Tod ihr Ehrenmitglied, Carl Stüve, Bürgermeister in Osnabrück. Er starb am 16. Februar im 74. Lebensjahre.

Von den auswärtigen Mitgliedern verlor sie den Staats- und Reichsrath Georg Ludwig von Maurer in München. Er starb am 9. Mai, im 82. Lebensjahre;

ferner den Professor der Philosophie Adolph Trendelenburg in Berlin. Er starb am 24. Januar im 70. Lebensjahre.

Von den Correspondenten verlor sie den Pro-

fessor der Botanik Hugo von Mohl in Tübingen. Er starb am 1. April im 71. Lebensjahre.

Mit Bedauern sah die Societät aus der Reihe ihrer Assessoren den Herrn Felix Klein scheiden, der einem Rufe als Professor der Mathematik an der Universität Erlangen folgte.

Die von der K. Societät neu erwählten Mitglieder sind folgende:

Zu Ehrenmitgliedern wurden erwählt:

Hr. Ignaz von Döllinger in München,
— Michaele Amari in Florenz.

Zu auswärtigen Mitgliedern in der historisch-philologischen Classe die beiden bisherigen Correspondenten

Hr. Rudolph Roth in Tübingen,
— August Dillmann in Berlin, ferner
Sir Henry Rawlinson in London.

Zu Correspondenten:

Hr. Anton de Bary in Strassburg.
— Eduard Pflüger in Bonn.
— Wilh. Philipp Schimper in Strassburg.
— Max Schultze in Bonn.
— Felix Klein in Erlangen, seither Assessor.
— Sophus Lie in Christiania.
— August Mayer in Leipzig.
— Eduard Freeman zu Somerleaze, Engl.
— M. J. de Goeje in Leiden.
— Giulio Minervini in Neapel.
— William Stubbs in Oxford.

Zum Assessor in der mathematischen Classe wurde ernannt:

Hr. Eduard Riecke.

Bezüglich der für dieses Jahr von der physikalischen Classe gestellten anatomischen Preisfrage ist zu berichten, dass sie keinen Bearbeiter gefunden hat.

Für die nächsten Jahre werden von der K. Societät folgende Preisaufgaben gestellt:

Für den November 1873 von der mathematischen Classe:

Theoriam numerorum generalissime complexorum formarumque omnis gradus in factores lineares resolubilium.

Eine Theorie der allgemeinsten complexen Zahlen und der zerlegbaren Formen aller Grade.

Für den November 1874 von der historisch-philologischen Classe:

Ad doctrinam de linguis ulterius excolendam duo sunt ad quae animus nunc pracipue est attendendus: primum vivarum linguarum tractatio, ut virium et causarum, quarum effectus in linguarum emortuarum analysi magna cum diligentia indagati sunt, motus et actiones pariter atque reactiones ante oculos ponantur; cui fini eae imprimis inserviunt linguae vivae, quae cum veteribus sollerter exploratis affinitatis vinculo sunt conjunctae. Deinde perscrutandum est quomodo singulae ejusdem rami, vel stirpis, linguae ad se invicem referantur, quae servata sint ex lingua quae iis quasi pro fundamento fuit, quae perierint, quae nova accesserint, ex quibus ea fontibus sint hausta aut quo alio modo formata, ut uno verbo utamur: quae vel unius rami linguis vel unius stirpis ramis communia sint, quae singulis peculiaria; qua quidem ratione

fiet, ut definire possimus locum, quem quaeque lingua inter eas obtineat, quibus affinis est. Ad hujusmodi res exponendas imprimis apta videtur lingua Carduchorum (Kurden) quae cum reliquis linguis eranicis vinculo tam arcto est connexa, ut lumen ab iis non solum accipere sed iis etiam retribuere possit; eadem opera comparatione cum affinibus instituta locus potest definiri, quem inter eas obtinet.

Quibus quidem considerationibus permota Societas Regia eos, qui linguis indogermanicis operam navant, provocat ad elaborandam:

> Grammaticam Carduchorum linguae comparatae cum lingua vetere Bactrorum linguisque persicis (vetere Inscriptionum cuneatim scriptarum, media (Påzendica) et recentiore ejusque dialectis quae jam notae sunt) praecipue ad locum, quem inter eas obtinet, definiendum. Armeniae linguae comparatio grata illa quidem erit, sed necessaria non est.

Für die weitere Fortbildung der Sprachwissenschaft sind jetzt zwei Momente von besonderer Erheblichkeit. Zunächst gilt es das Spiel und die Wechselwirkung der sprachschaffenden und -entwickelnden Kräfte, deren Wirkungen in der Analyse der alten erstorbenen Sprachen erkannt sind, in den lebendigen Sprachen zur vollen Anschauung zu bringen. Dazu werden diejenigen lebenden Sprachen die besten Dienste leisten, welche mit alten, sorgfältig durchforschten, eng verwandt sind. Ferner gilt es seine ganze Aufmerksamkeit auf die Erforschung des Verhältnisses zu wenden, in welchem die Sprachen

eines Astes, oder Stammes, zu einander stehen, was sie von der ihnen zunächst zu Grunde liegenden Sprache bewahrt, was eingebüsst, was neugestaltet, welchen Mitteln und Einflüssen diese Neugestaltungen verdankt werden, mit einem Worte: was allen Sprachen eines Astes, den Aesten eines Stammes, gemeinsam und was den besonderten besonders eigen sei, was auf dem Grunde der gemeinsamen Unterlage die besondre Eigenthümlichkeit der Aeste und ihrer Sprachen bilde. Dadurch wird es möglich zu bestimmen, welche Stelle jede der besonderten Sprachen in dem Sprachkreis einnimmt, zu welchem sie gehört.

Zu derartigen Forschungen scheint die Sprache der Kurden besonders geeignet zu sein. Sie ist mit den übrigen eranischen Sprachen so eng verschwistert, dass sie nicht allein fähig ist, Licht von ihnen zu empfangen, sondern auch auf sie zurückzuwerfen; zugleich wird es möglich sein durch eingehende Vergleichung mit den verwandten Sprachen die Stelle zu bestimmen, welche sie im Kreise derselben einzunehmen berechtigt ist.

Diese Erwägungen haben die Königl. Ges. d. Wiss. bewogen, aufzufordern zu der Bearbeitung einer:

Grammatik der Kurdischen Sprache in Vergleich mit dem Altbactrischen und den persischen Sprachen (dem Altpersischen der Keilinschriften, dem Mittelpersischen [Pâzendischen] und Neupersischen sammt dessen schon bekannten Dialekten), insbesondre um die Stellung derselben im eranischen Sprachkreise genauer zu bestimmen. Gewünscht wird auch die Be-

rücksichtigung des Armenischen, doch wird diess nicht als unumgänglich gefordert.

Für den November 1875 von der physikalischen Classe:

Quibus conditionibus corpora crystallisata quae sulfur vel fluorem immixta habent, in venis illa metallorum reperta, orta sint, ut explicari possit, Regia Societas literarum experimenta institui vult, qua ratione mineralia crystallisata, qualia sunt quae a nostratibus lichtes et dunkles Rothgülden, Sprödglaserz, Fahlerz, Bleiglanz, Flussspaths appellantur, per artem progigni possint.

Um der Lösung der Frage näher zu kommen, unter welchen Bedingungen die in den Erzgängen vorkommenden krystallisirten Schwefel- und Fluor-Verbindungen entstanden sind, wünscht die K. Societät über die künstliche Darstellung solcher krystallisirter Mineralien, wie lichtes und dunkles Rothgülden, Sprödglaserz, Fahlerz, Bleiglanz, Flussspath, Versuche angestellt zu sehen.

Die Concurrenzschriften müssen vor Ablauf des Septembers der bestimmten Jahre an die K. Gesellschaft der Wissenschaften portofrei eingesandt sein, begleitet von einem versiegelten Zettel, welcher den Namen und Wohnort des Verfassers enthält und auswendig mit dem Motto zu versehen ist, welches auf dem Titel der Schrift steht.

Der für jede dieser Aufgaben ausgesetzte Preis beträgt funfzig Ducaten.

Zum Andenken an Rudolf Friedrich Alfred Clebsch.

Im Namen mehrerer Freunde und Schüler des Verstorbenen eingesendet

von

C. Neumann,
auswärtigem Mitgliede der Gesellschaft.

Rudolf Friedrich Alfred Clebsch wurde am 19. Januar 1833 zu Königsberg in Pr. geboren, wo sein Vater Regimentsarzt war. Auf dem Altstädtschen Gymnasium daselbst empfing er neben der ersten wissenschaftlichen insbesondere auch die erste mathematische Anregung. Clebsch gedachte noch im späteren Leben mit besonderer Vorliebe und Dankbarkeit seiner damaligen mathematischen Lehrer: Müttrich und Schumann, die nun ebenfalls im Grabe ruhen. Eben 17 Jahre alt (Ostern 1850) bezog Clebsch die Universität seiner Vaterstadt, wo er später (1854) das Doctor- und das Staats-Examen für Mathematik und Physik absolvirte.

In Königsberg war damals durch die Vereinigung von Neumann, Richelot, Hesse zur gründlichen und umfassenden Ausbildung in den mathematisch-physicalischen Disciplinen eine selten günstige Gelegenheit geboten. Während Clebsch unter Richelot's Anleitung die Hauptwerke von Euler und Jacobi mit rastlosem Eifer studirte, und in solcher Weise den Grund legte für seine späteren Arbeiten über partielle Differentialgleichungen und Variationsrechnung, wurde er gleichzeitig durch Hesse's meisterhafte Vorträge über analytische Geometrie zu zahlreichen

eigenen Versuchen angeregt, und mit besonderer Vorliebe für diejenigen Methoden der Forschung erfüllt, in deren Vervollkommnung er später so Ausserordentliches geleistet hat.

Von grösstem Einflusse auf Clebsch war Neumann, in dessen befreundetem Hause er anregenden Verkehr fand, und mit dessen gleichaltrigem Sohne ihn seit dem Gymnasium gleiches Streben und dauernde Freundschaft verband. Von den Vorlesungen Neumann's aufs Lebhafteste angezogen, beschäftigte Clebsch sich in eingehender Weise mit Problemen der mathematischen Physik, namentlich mit Optik und Hydrodynamik. Letzterem Gebiete gehörten seine ersten Publicationen an, sowohl seine Inauguraldissertation (Bewegung eines Ellipsoids in einer Flüssigkeit, eine Aufgabe, deren einfachster Fall schon von Dirichlet behandelt war), als auch mehrere andere Arbeiten, die im Crelle'schen Journal erschienen sind.

Im Jahre 1854 begab sich Clebsch nach Berlin, um zunächst in das mit dem Friedrich-Wilhelmstädtschen Gymnasium verbundene, unter Schellbach's Leitung stehende Lehrer-Seminar einzutreten, und sodann mehrere Jahre hindurch als Lehrer der Mathematik an verschiedenen Schulen Berlins thätig zu sein. Hier begann sich sein pädagogisches Talent zu entwickeln, das ihn später in so hervorragender Weise ausgezeichnet hat. Der mathematische Unterricht, so wollte Clebsch, sollte nicht mit einer Reihe schwerverständlicher abstracter Definitionen beginnen, sondern von der Anschauung ausgehen, und durch die Anschauung Interesse erwecken. Das eben war auch bei seinen späteren Universitäts-Vorträgen das Charakteristische: der Gegenstand des Vortrages erwuchs vor den Zuhö-

rern in organischem Aufbau. Und das in seinem ganzen Wesen und Denken zu Tage tretende, selbst in seinen einzelnen Abhandlungen erkennbare Streben nach plastischer Darstellung und künstlerischer Abrundung gab seinen Vorträgen eine seltene Vollendung und Anziehungskraft, und verwandelte den Gegenstand des Vortrags in ein Bild von wahrhaft idealer Schönheit. Es war, im höchsten Sinne des Wortes, ein ästhetischer Genuss, seinem Vortrage zu folgen.

Ende 1858 habilitirte sich Clebsch als Privatdocent an der Berliner Universität. Aber er hat als solcher merkwürdiger Weise nur eine Stunde gelesen; denn an demselben Tage, an dem er begonnen hatte, erhielt er einen Ruf an das Polytechnicum zu Carlsruhe für theoretische Mechanik.

Clebsch ist (ebenso wie später in Giessen) fünf Jahre in Carlsruhe gewesen. Bedenkt man, wie er während seines dortigen Aufenthaltes mit Vorlesungen, die einem unmittelbar praktischen Zwecke dienen sollten, überhäuft war, so wird man die zu jener Zeit von ihm ausgeführten wissenschaftlichen Arbeiten sowohl ihrem Inhalt wie ihrer Zahl nach, gleich bewunderungswürdig finden. Auch gelang es ihm einige Schüler des Polytechnicums näher zu sich heran zu ziehen und dieselben dauernd für rein mathematische Studien zu gewinnen. Was seine Schüler damals und später mit so unwiderstehlicher Gewalt an seine Persönlichkeit fesselte, war nicht nur die wissenschaftliche Anregung, die von ihm ausging; es war vor Allem auch der herzliche Antheil, den er allen ihren Bestrebungen entgegentrug. Er war nicht nur der Lehrer, er war auch der väterliche Freund seiner Schüler.

Clebsch fand in Carlsruhe bei mehreren sei-

ner Collegen, namentlich bei Wiener und Schell, lebhaftes Interesse für mathematische Bestrebungen; noch jetzt besteht das mathematische Kränzchen, in welchem sie allwöchentlich zusammen kamen, und von ihren wissenschaftlichen Bestrebungen einander erzählten; hier wurde Clebsch durch Schell in die eigenthümlichen Methoden der neueren Geometrie zum ersten Male eingeführt. Solcher Beziehungen zu gedenken, erscheint keineswegs unwesentlich; denn für Clebsch war der persönliche Gedankenaustausch, den er sehr liebte, das lebendige Mittel, um seinen Gesichtskreis zu erweitern, und neue ihm noch unbekannte wissenschaftliche Gebiete seiner Herrschaft zu unterwerfen. Clebsch hat stets das wärmste Interesse für die wissenschaftlichen Forschungen Anderer an den Tag gelegt. Er hielt seine eigenen Anschauungen selbst in solchen Gebieten, in denen er Meister war, niemals für abgeschlossen. Jede wissenschaftliche Unterhaltung erweckte in seinem selten beweglichen Geiste neue Reflexe; häufig die Ausgangspunkte neuer Gedankenreihen und wichtiger Arbeiten. In vorurtheilsloser und freudiger Anerkennung fremder Gedanken empfing er ebenso gerne, als er gab.

Bald nach seiner Niederlassung in Carlsruhe verheirathete sich Clebsch mit Fräulein Elise Heinel aus Königsberg. Seine Eltern waren auch zu ihm gezogen, so dass er eine behagliche Häuslichkeit um sich entstehen sah. Sie sollte nicht von langer Dauer sein. Bald nach seiner Uebersiedelung nach Giessen starben seine Eltern, nicht lange danach seine Frau, die ihm vier Knaben im zarten Kindesalter hinterliess.

Die Uebersiedelung nach Giessen erfolgte 1863. Erst hier in der freieren akademischen

Luft vermochte die doppelte Begabung von Clebsch als wissenschaftlicher Forscher und Lehrer zur vollen Geltung zu gelangen. Seine wissenschaftliche Production steigert sich von Jahr zu Jahr, und gleichzeitig umgiebt ihn ein mehr und mehr anwachsender Kreis von Schülern. In erster Beziehung war für Clebsch von höchster Bedeutung, dass sich damals Gordan in Giessen für Mathematik habilitirte. Clebsch hatte kurz zuvor aus Aronhold's Arbeiten die neuere Algebra kennen gelernt; er hatte dieselbe in Verbindung gebracht mit Hesse's und Cayley's analytisch-geometrischen Untersuchungen, und in solcher Weise begonnen, dasjenige Feld der Wissenschaft sich zu eröffnen, in welchem er fortan der Meister war, und in welchem seine Bedeutung für die Wissenschaft vielleicht ihre stärksten Wurzeln hat. Gordan führte er in diese neue Speculationen ein, während umgekehrt jener ihn mit Riemann's Arbeiten über Abel'sche Functionen bekannt machte. Beide haben seitdem zusammen gearbeitet, wie es selten geschehen mag. Als erste Frucht erschien Clebsch's Anwendung der Abel'schen Functionen auf Geometrie; und bald darauf (1866) die von beiden gemeinsam verfasste »Theorie der Abel'schen Functionen«. Sodann concentrirte sich ihr Interesse auf die neuere Algebra; und die »Theorie der binären Formen«, welche Clebsch später (1871) publicirte, ist als der Ausdruck der gemeinsam in dieser Richtung gewonnenen neuen Anschauungen anzusehen. Unabhängig hievon beschäftigte sich Clebsch in eifriger Weise mit mehr geometrischen Arbeiten, besonders mit der Theorie der Abbildung algebraischer Flächen auf der Ebene, zu der ihm Betrachtungen von Chasles die Anregung gegeben hatten. Erst einer spä-

teren Zeit wird es beschieden sein, alle diese Arbeiten ihrer ganzen Tragweite nach zu erkennen und ihren Zusammenhang mit den gleichzeitigen Bestrebungen Anderer darzulegen.

Im Herbste 1868 siedelte Clebsch nach Göttingen über. Einige Zeit vorher hatte er in Fräulein Minna Raiss aus Giessen zum zweiten Male eine Gefährtin seines Lebens und die Begründerin einer anmuthenden Häuslichkeit gefunden. Es ist hier nicht der Ort, um zu schildern, wie das Haus Clebsch für die jüngeren Glieder der Universität bald ein Mittelpunkt wurde, wo sie neben wissenschaftlicher Anregung gemüthlichen Anhalt fanden.

Die Zuneigung und das Vertrauen seiner Göttinger Collegen hatte Clebsch in so hohem Grade sich erworben, dass schon nach vierjähriger Anwesenheit das Prorectorat ihm übertragen wurde; er sollte es nicht länger als zwei Monate führen. Clebsch starb am 7. November dieses Jahres in der Blüthe seines Lebens, in wenigen Tagen von der Diphtheritis hinweggerafft.

Für seine wissenschaftliche Wirksamkeit hatte Clebsch 1868 mit C. Neumann zusammen in den »Mathematischen Annalen« ein neues Organ geschaffen, von dem zur Zeit die fünf ersten Bände vollendet vorliegen. Aber gleichzeitig wusste er die Abhandlungen der K. Gesellschaft der Wissenschaften mit grösseren Arbeiten zu schmücken, und die gelehrten Nachrichten durch seine vielfältigen Verbindungen in eine Zeitschrift zu verwandeln, welche für den Mathematiker fast unentbehrlich war. Ungemindert blieb darum seine Thätigkeit als Lehrer. Geometrie in erster Linie, neuere Algebra, elliptische und Abel'sche Functionen, Hamilton'sche Theorie sind diejenigen Gegenstände, über die er wiederholt ge-

lesen hat, und die er als ständige Vorlesungsthemata beizubehalten gedachte. Clebsch pflegte in seinen Vorlesungen rasch fortzuschreiten; er brachte die neuesten und schwierigsten Untersuchungen, die er durch seine Gabe, überall die leichtesten und naturgemässesten Wege zu finden, sowie überhaupt durch sein eminentes Darstellungstalent dennoch verständlich zu machen wusste. Kein Wunder, wenn die Anzahl der Zuhörer von Semester zu Semester sich hob.

Obwohl im Reiche der mathematischen Wissenschaft die Wege des weiteren Vordringens nicht weniger verschieden und mannigfaltig sind als die einzelnen Gebiete selber, so dürfte es dennoch von einem gewissen Gesichtspuncte aus, möglich sein, die ganze Mannigfaltigkeit dieser verschiedenen Wege in zwei Gruppen zu bringen, auf zwei Hauptrichtungen zu vertheilen. Clebsch selber in seiner Gedächtnissrede auf Plücker (in der er überhaupt mehr als sonst Gelegenheit genommen, über allgemeine wissenschaftliche Gesichtspuncte sich auszusprechen) hat diese beiderlei Richtungen mit folgenden Worten characterisirt:

»Es kann die Forschung von bestimmten »Problemen ausgehen, deren Wichtigkeit sie an»erkannt hat, deren Lösung mit allen Kräften »mehr oder weniger direct angestrebt wird. — »Aber ebenso berechtigt ist die andere Art der »Forschung, welche sich nur das Gebiet der Thä»tigkeit wählt, in diesem aber freie Umschau »hält, und, entgegengesetzt der ersten, nach Pro»blemen späht, deren Lösung sich ermögliche«.

»Ueber den relativen Werth dieser Forschungs»methoden werden verschiedene Individualitäten »immer verschiedener Ansicht sein. Wenn die »erstere zu grösserer Vertiefung führen kann, so

»ist sie auch der Unfruchtbarkeit nur zu leicht »ausgesetzt. Der andern schuldet man Dank für »die Erwerbung grosser und neuer Gebiete; wobei »dann im Einzelnen Vieles der ersten Methode »zu ergründen und zu begrenzen verbleiben mag.«

Was die Arbeiten von Clebsch betrifft, so werden seine Epoche machenden Untersuchungen über analytische Geometrie, über Algebra und Flächentheorie, ähnlich etwa wie die Arbeiten von Plücker und Möbius, als Repräsentanten der zweiten Richtung zu bezeichnen sein.

Nicht weniger entschieden aber sind andererseits seine Arbeiten über partielle Differentialgleichungen und Variationsrechnung als Repräsentanten der ersten Richtung anzuführen; sie stehen in engster Beziehung zu den Untersuchungen Jacobi's. Der geistige Nachlass dieses gewaltigen Mannes bestand nicht nur in bereits erschlossenen Schätzen des Wissens und Denkens, sondern (was nicht minder schätzbar) auch in einer grossen Anzahl neuer, noch ungelöster Probleme, welche er der Nachwelt vererbte. Clebsch, der die Werke Jacobi's mit besonderer Vorliebe studirt hatte, und demgemäss auch gerne als einen Schüler Jacobi's sich zu bezeichnen pflegte, richtete die ganze Kraft seines Nachdenkens und alle Mittel seines erfindungsreichen Geistes auf die Ueberwindung derjenigen Classe von Problemen, welche durch die Untersuchungen des grossen Meisters zu Tage getreten waren im Gebiete der partiellen Differentialgleichungen und der Variationsrechnung; und dass er aus diesem Kampfe, der schon vor ihm von höchst namhaften Mathematikern, aber nur mit theilweisem Erfolge aufgenommen war, in allen

Puncten als Sieger hervorging, zeigen seine betreffenden Abhandlungen.

Clebsch hat also in beiden Richtungen Ausserordentliches geleistet. Seine hiedurch documentirte Vielseitigkeit tritt vielleicht noch deutlicher hervor, wenn man die verschiedenen Gebiete seiner wissenschaftlichen Thätigkeit, der Zeitfolge nach, sich vergegenwärtigt. Er beschäftigt sich zu Anfang mit Problemen der mathematischen Physik; er wendet sodann eine Zeitlang denjenigen Problemen sich zu, welche die Theorie der partiellen Differentialgleichungen betreffen; es folgen die bahnbrechenden Untersuchungen über analytische Geometrie; er wendet sich zu den Abel'schen Functionen; dann wieder theilt er sein Interesse zwischen neuerer Algebra und Flächentheorie.

Gerade vermöge seiner Vielseitigkeit war Clebsch zu Entdeckungen befähigt, welche andernfalls unmöglich gewesen wären, nämlich zur Auffindung von Uebergängen zwischen solchen Gebieten der Wissenschaft, die bis dahin als völlig getrennt, als völlig heterogen betrachtet waren. Als eines glänzenden Beispiels in dieser Beziehung ist namentlich seiner Anwendung der Abel'schen Functionen auf Geometrie und der Entdeckung zu gedenken, dass von einem gewissen Standpunkte aus das Abel'sche Theorem identisch erscheint mit den Sätzen über die Schnittpunctsysteme algebraischer Curven. Ferner ist in dieser Beziehung zu erwähnen, wie er auf Hesse's Behandlung der Wendepuncte einer Curve dritter Ordnung fussend, die Gleichungen höheren Grades, zu denen geometrisch-algebraische Probleme Anlass gaben, mit der Theorie der Abel'schen Functionen und der allgemeinen Theorie algebraischer Gleichungen, wie sie durch

Galois geschaffen, von Kronecker und Camille Jordan weiter entwickelt war, in Verbindung zu setzen wusste.

An Anerkennung in Nähe und Ferne, namentlich auch im Auslande, hat es Clebsch nicht gefehlt. Er war correspondirendes Mitglied der Akademien in Berlin und München, in Mailand und Bologna, sowie in Cambridge; er war eines der wenigen Mitglieder der London Mathematical Society. Aber nicht nur in der äusserlichen Beziehung solcher Ehrenbezeugungen hat er zu seinen Fachgenossen gestanden; aufrichtige Freundschaft hat ihn mit den Gleichstrebenden verbunden. Denn so muss man die Beziehung nennen, die ihn (um von der grossen Anzahl der Einheimischen zu schweigen) z. B. mit Cremona in Mailand, mit Camille Jordan in Paris, mit Cayley in Cambridge verband. — Er ist vom Tode dahingerafft, zu früh für seine Familie, zu früh für seine Freunde, zu früh für die Wissenschaft!

Bei der fast unermesslichen Ausdehnung, welche die mathematische Wissenschaft allmählig erlangt hat, und bei der hiedurch hervorgerufenen Zersplitterung in viele einzelne Disciplinen, ist der Verlust, den die Wissenschaft durch seinen Tod erlitten hat, doppelt schmerzlich. Schien er doch berufen, die Vertreter jener verschiedenen Disciplinen mit einander zu versöhnen, — berufen, dereinst einzutreten in die Zahl jener grossen weit über das gewöhnliche Niveau hervorragenden Meister der Wissenschaft, deren Urtheil von Allen anerkannt, deren Rath und Leitung von Allen ersehnt wird!

Ueber eine neue Kyprisch-Phönikische Inschrift.

Von

H. Ewald.

Neulich wies ich in den Gel. Anz. auf eine neuentdeckte Kyprisch-Phönikische Inschrift hin, und erläuterte ihre Phönikische Hälfte nur mit einigen Worten, soweit nämlich bei ihrer leider ziemlich grossen Verstümmelung ihr Hauptinhalt nach dem heutigen Stande unserer Phönikischen Wissenschaft sich sogleich auf den ersten Blick erkennen liess [1]). Erscheint uns heute eine Inschrift in zwei noch wenig bekannten Sprachen und noch dazu in beiden sehr verstümmelt, so kann zwar die eine Inschrift zur Erläuterung der anderen die nützlichsten Dienste leisten; und streng genommen sollte man sie erst beide verstehen um über den Inhalt der einen oder der anderen sicherer urtheilen zu können. Allein da das Kyprische uns heute fast noch ganz verschlossen ist, so meinte ich man müsse wenigstens über die Phönikische sogleich sagen was man auf den ersten Blick über sie sagen könne.

Nachdem ich jedoch jetzt auf eine besondere Veranlassung hin meine eignen zwei kleinen Aufsätze wieder angesehen habe welche ich vor zehn Jahren zur Erklärung einer anderen damals in Kypros gefundenen Phönikischen Inschrift der K. Ges. der WW., vorlegte [2]), erlaube

1) Gel. Anz. 1872 S. 1582.

2) in den Nachrichten vom Jahre 1862 S. 457—468 und 543—549. Zu Anfange der ersten Zeilen der vierzeiligen Inschrift S. 460 steht ביבם durch einen Druckfehler für בימם.

ich mir hier einen Nachtrag zu jenen paar Worten der Gel. Anz. über die neueste Entdeckung einzureichen, und dabei zugleich einige schwierige Phönikische Worte auf beiden genauer zu erklären. Vergleicht man jene von mir vor 10 Jahren zuerst veröffentlichte und erläuterte Inschrift, so ist es leicht einige der Verstümmelungen der jetzt entdeckten auf ihren beiden Seiten zu heben und ihren gesammten Redefluss herzustellen. Man ersieht dann auch leicht dass das ־ר womit jetzt die vorne verstümmelte dritte und letzte Breitzeile der Inschrift beginnt, auf לאדני meinem Herrn hinweist, und dass darauf, wie ich schon in den Gel. Anz. erkannte, der Name des Kyprisch-Phönikischen Gottes folgt welchem diese Dankinschrift gilt. Allein nun lehrt auch die Vergleichung beider Inschriften dass man den Namen dieses Gottes auf der früher gefundenen רֶשֶׁף חֵץ, auf der jetzt gefundenen רֶשֶׁף מְכַל lesen muss. Denn der erste dieser Buchstaben auf *B* (um die jetzt gefundene so zu nennen) scheint zwar auch einem ב ähnlich zu seyn: *A* aber lehrt dass er trotzdem dass sein herabhangender Strich etwas gekrümmt ist, ein ר seyn muss; und wirklich sehen die vier ב welche sich sonst in der drei Zeilen des *B* finden, diesem Buchstaben den wir nun als ר lesen nicht ähnlich genug. Findet sich nun auf beiden ein Gottesname welcher mit רשף beginnt, so liegt die Wahrscheinlichkeit vor dass auf beiden derselbe Gott gemeint sei, trotzdem dass als die zweite Hälfte seines Namens auf *A* חץ, auf *B* מכל erscheint. Und lässt sich das erweisen, so fällt zwar die Vermuthung welche ich dort über den Namen dieses Gottes aufgestellt hatte, weil mir die jetzt entdeckte Inschrift noch nicht zugäng-

lich war: aber dieses kann jetzt der grösseren Gewissheit gegenüber nicht in Anschlag kommen.

Die Namen der vielerlei Phönikischen Götter in den Inschriften zuverlässig wiederzufinden und zu erklären, ist überhaupt eine der schwierigsten Aufgaben. Oertlich waren diese Götter offenbar sehr verschieden; und ein Gottesname welcher auf Kyprischen Inschriften erscheint, ist vielleicht sonst nirgends weiter zu finden. Von ganz besonderer Schwierigkeit ist es aber die zwei hier erscheinenden richtig zu deuten, insbesondere wegen der grossen Dunkelheit eines Wortes wie מנגל.

Indessen kann man mit grosser Gewissheit annehmen dass das Phönikische ein Wort רֶשֶׁף in der Bedeutung glühend hatte. Die übrigen Semitischen Sprachen ausser dem Hebräischen scheinen zwar die Wurzel in dieser Bedeutung nicht zu besitzen: vielmehr trägt sie bei ihnen ganz andere Bedeutungen, und weist dort in ganz andere Ursprünge zurück. Allein das Aethiopische ረሰነ halte ich dennoch nicht bloss in der Bedeutung sondern auch in den Lauten für ursprünglich dasselbe Wort, sobald man zugibt das *n* könne vermittelst seines möglichen Wechsels mit *m* durch dieses auf *f* zurückleiten. Solche stärkere Lautwechsel kommen aber gerade im Aethiopischen oft vor: und der Wechsel von *n* und *m* ist dazu in allen Semitischen Sprachen nirgends häufiger als am Ende der Wörter [1]. Während aber dies Aethiopische Wort in seiner Sprache ein ganz gewöhnliches für den Begriff glühen ist, hat es sich im Hebräischen nur dichterisch selten erhalten, konnte sich aber

1) vgl. über dies alles weiter *LB.* §. 51e.

auch im Phönikischen sehr wohl finden. Wir haben dann eins von den vielen Beispielen wie sich Aethiopisches und Hebräisch-Phönikisches mit Ausschluss aller übrigen Semitischen Sprachen zu einander finden.

Sehr denkwürdig scheint mir das Ergebniss auf welches mich die Untersuchung des schwierigen מנכל hingeführt hat. Da eine Wurzel מנכל im Semitischen wegen des Zusammentreffens der Laute נכ mit einem Lippenlaute unmöglich ist, so muss man dabei an eine Wurzel נול denken: diese kann wie das Arabische und wie es seine Verwandtschaft mit טול beweist, ein reichen, von einem Ende zum andern reichen, bedeuten; und hat sich als Thatwort نَوَّلَ in der mildern Bedeutung geben (wovon تناول empfangen als ein sich geben lassen), im Syrischen ܢܰܘܶܠ aber in der schlimmeren Bedeutung hin und her treiben oder quälen festgesetzt. Als Selbstwort aber hat sie den Begriff eines vom einem zum andern Ende reichenden oder zwei Abstände quer verbindenden Dinges angenommen: und so bedeutet, indem hier die Laute *l* und *r* wechseln können, ein uraltes Semitisches, jetzt im Arabischen sowohl als im Aramäischen erhaltenes نِيرَة, ܢܺܝܪܳܐ sehr vielerlei was von dem einem zum andern Ende quer läuft sei es der Faden im Gewebe, oder das Joch des Stiergespannes. Allein ein Werkzeug durch welches ein in solcher Weise querlaufendes erst seinen Zweck erfüllt, kann nach der Eigenthümlichkeit der Semitischen Wortbildung durch מַ־ bezeichnet werden: und nach diesem Wortbaue ist am Deutlichsten und Schärfsten das Arabische مِنْوَال

ausgebildet welches den **Weberbaum**, dann aber sehr oft auch allgemein bildlich die *norma* oder das Mass und die feste Richtung des menschlichen Handelns bezeichnet. Dieses selbe Wort ist aber im Syrischen zu ܢܘܠܐ verkürzt, welches wie der Griechische *ἱστός* (mit welchem das Lat. *stāmen* von derselben Wurzel verwandt ist) auch den von ihm auslaufenden Aufzug (*tela*) oder Aufschlag des Gewebes bezeichnet in welchen der Einschlag oder jener Querfaden einfällt. Während jedoch so im Arabischen und Aramäischen sich der Laut *l* bei dieser Wortbildung erhalten hat, sehen wir vielmehr jenes *r* in dem der Bedeutung nach ganz entsprechenden Hebräischen מָנוֹר wiederkehren [1]). Aber nach diesen Vorbereitungen haben wir auch garkeine Schwierigkeit mehr in unserm Phönikischen מנל (מְנֹל oder מְנֻל zu sprechen) zwar ganz dasselbe Wort zu finden trotzdem dass es anders als im Hebräischen das *l* beibehält, aber ihm die Bedeutung des Bogens mit seiner vom einem zum andern Ende laufenden Senne zu geben. Denn dass jenes מְנוֹר nicht schon an sich den Weberbaum bezeichnete, erhellet auch daraus dass ihm nach der alten Sprache אֹרְגִים hinzugefügt werden musste [2]); das Wort konnte also auch eine weitere Anwendung finden, und war dann wie מֵיתָר gebildet welches von יתר

1) Sehr verkehrt hat man bei diesem Worte an eine Ableitung von נִיר **Neubruch** (*novale*) gedacht: damit hat es weder seiner Bedeutung noch seiner Ableitung nach den geringsten Zusammenhang. Die Wurzel zu diesem hängt vielmehr mit dem Begriffe des **Jungen** נער zusammen.

2) denn die Worte 2 Sam. 21, 19 (wiederholt 1 Sam. 17, 7) entstammen einer sehr alten Schrift.

Senne abgeleitet ebenfalls den Bogen in diesem Sinne bezeichnet [1]).

In solcher Weise erklären sich diese heute für uns so dunkel gewordenen Semitischen Wörter. Wie uralt sie sind, erhellet auch daraus dass sie im Aethiopischen schon vollkommen fehlen. Dieses erweist sich auch hierin wie in so vielen anderen Fällen als eine zwar ächt Semitische, aber von ihrer ältesten Heimath früh völlig losgerissene Sprache, welche obwohl rein im Semitischen Geiste fortschreitend doch in Vielem ganz neue Wege eingeschlagen hat. Den Aufzug nennt es ምእናም, den Einschlag (*trama*) ፈእም d. i. Speisung, Füllung.

Kehren wir aber nun zu der Phönikischen Inschrift zurück, so ergibt sich dass wir hier einen Gott vor uns haben welcher ebenso leicht der vom glühender Pfeile wie der vom glühenden Bogen genannt werden konnte, und soviel wir bis jetzt sehen nur in Kypros unter diesem Namen verehrt wurde; und könnten wir dabei an einen obersten Gott denken welchem im Morgenlande nicht selten auch Bogen und Pfeile beigelegt werden, oder an einen Griechischen Apollo als den himmlischen Bogenschützen, so wird man doch gerade in Kypros mit seinen vielen Aphroditedienste am nächsten an den Liebesgott erinnert. Denn obwohl heute schon sehr viele Phönikische Inschriften fast aus allen Ländern rings um das Mittelmeer wieder entdeckt sind, so ist doch meines Wissens weder der eine noch der andere dieser beiden Namen eines Gottes irgendwo sonst aufgefunden. Da aber Kypros nach Allem was wir heute klar einsehen können ursprünglich eine der Phöniki-

1) doch nur in dichterischem Gebrauche, Ψ. 21, 13.

schen ebenso wie aller Semitischen ganz fremde Bevölkerung und Bildung hatte und die Phöniken dort mit ihrer Schriftsprache Kunst und Bildung sich erst später ansiedelten, so ist durchaus wahrscheinlich dass der Dienst eines Gottes welcher sich bei den Phöniken nur in Kypros fand, durch eine Mischung Kryprischer und Phönikischer Gottesdienste entstand; wie wir in Aegypten bei den Phöniken ähnlichen Mischungen begegnen [1]).

1) Nachschrift. Erst unter dem Drucke ersehe ich aus einem Aufsatze in der Berl. Akad. Monatsschrift 1872 S. 335 dass man auf sechs noch unbekannten Kyprisch-Phönikischen Inschriften nicht מנכל sondern מכל zu lesen meint. Dies würde auf etwas ganz anderes führen. Allein das Londoner Abbild hat deutlich מנכל: die Sache muss sich also zuvor weiter aufklären.

Nachrichten

von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G. A. Universität zu Göttingen.

25. December. №. 28. 1872.

Königliche Gesellschaft der Wissenschaften.

Ueber zusammengehörige Pole und ihre Darstellung durch Producte.

Von

H. Grassmann in Stettin.

An die Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.

Unter dem erschütternden Eindrucke, welchen der für die Wissenschaft unersetzliche Verlust eines der hervorragendsten Meister auf fast allen Gebieten der Mathematik auf mich, wie gewiss auf alle gemacht hat, welche seine bahnbrechenden Leistungen zu schätzen wissen, versuche ich einige der Gedanken niederzuschreiben, welche die letzten Arbeiten, die das unerschöpfliche Genie des Dahingeschiedenen hervorbrachte, und die er im letzten Hefte seiner Annalen so wie der Nachrichten unserer Gesellschaft niederlegte, in mir erregt haben. Nichts davon ahnend, dass A. Clebsch mitten aus seiner glänzenden Laufbahn, die er mit rüstiger Jugendkraft durch-

schritt, herausgerissen werden sollte, hatte ich ihm noch nicht zwei Wochen vor seinem Tode einen kurzen Aufsatz, der an eine jener Arbeiten (Annalen B. 5, S. 424) anknüpfte, übersandt, ihm die Art seiner Veröffentlichung anheimstellend, und ihm zugleich für die nächsten Wochen einen Aufsatz zugesagt, welcher sich auf eine mit jener ersteren eng verbundenen Arbeit (ebendas. S. 422) beziehen sollte. Ich nehme mir die Freiheit, diese letztere der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaft hiermit vorzulegen.

Clebsch hat in dem letzten Hefte seiner Annalen (S. 422—424) die von Hesse gefundene Eigenschaft der Polenpaare einer Curve dritter Ordnung und die daraus abgeleitete Schröter'sche Construction dieser Curve durch 3 gegebene Polenpaare behandelt und in gewohnter Weise durch wenige tief in das Wesen der Sache einschneidende Sätze und Bemerkungen die ganze Betrachtungsweise wesentlich gefördert. Indem ich den von ihm eingeschlagenen Weg verfolgte, gelang es mir, der Betrachtung noch eine andere Seite abzugewinnen, welche auch eine unmittelbare Anwendung auf Curven höherer Ordnungen gestattete, und für diese eine Reciprocität erkennen lässt, wie sie zwischen Pol und Polare eines Kegelschnittes herrscht.

Zu dem Ende wende ich eine Bezeichnung der Curve n. Ordnung an, welche der von Clebsch mit dem glücklichsten Erfolge gebrauchten symbolischen Darstellung einer solchen Curve nahe verwandt ist. Sind nämlich x_1, x_2, x_3 Dreieckscoordinaten, bezogen auf ein Dreieck, dessen Ecken l_1, l_2, l_3 seien, und man bildet die Potenz $(x_1+x_2+x_3)^n$ und multiplicirt jedes Glied in der Entwickelung dieser Potenz mit ei-

nem Coefficienten, so nenne ich mit Clebsch diese Coefficienten zugleich Coefficienten der so entstandenen Funktion φ. Aber statt nun die Potenz $(x_1+x_2+x_3)^n$ als Symbol dieser Funktion zu gebrauchen, wende ich, gemäss meiner Darstellung in der Ausdehnungslehre (von 1862, Nr. 358), ein beliebiges Zeichen α oder α_n in der Weise als Symbol derselben an, dass dies Zeichen mit beliebigen Potenzen jener Ecken l_1, l_2, l_3 multiplicirt denjenigen Coefficienten jener Funktion φ bezeichnet, welcher zu dem Produkte der entstehenden Potenzen von x_1, x_2, x_3 gehört. Also wenn $c_{i,k,l}\,\alpha_{i,k,l}\,x_1^i, x_2^k, x_3^l$ irgend ein Glied der Funktion φ ist, c_{ikl} der Coefficient von $x_1^i\,x_2^k\,x_3^l$ in der Entwickelung der Potenz $(x_1+x_2+x_3)^n$, α_{ikl} also nach dem Obigen der zugehörige Coefficient von φ, und α_n das Symbol von φ ist, so ist stets $\alpha_{ikl} = \alpha_n\,e_1^i\,e_2^k\,e_3^l$. Wird nun endlich der Punkt x, dessen auf das Dreieck $l_1\,l_2\,l_3$ bezogenen Coordinaten x_1, x_2, x_3 sind, $x = x_1\,e_2 + x_2 e_2 + x_3 e_3$ gesetzt (Ausdehnungslehre v. 1844 §. 116 und 117, Möbius barycentrischer Calcül), so leuchtet unmittelbar ein, dass die obige Funktion φ genau dargestellt wird durch $\alpha_n\,x^n$; z. B. wird die Funktion $\alpha_{11}x_1^2 + \alpha_{22}x_2^2 + \alpha_{33}x_3^2 + 2\alpha_{23}x_2x_3 + 2\alpha_{31}x_3x_1 + 2\alpha_{12}x_1x_2 = \alpha_2 x^2$ sein. Wird $\alpha_n\,x^n = 0$, so ist der Ort für x eine Curve $n$ter Ordnung, und wir können daher α_n

auch als Symbol dieser Curve auffassen. Sind nun a und b zwei beliebige Punkte und λ eine veränderliche Zahl, so stellt $a+\lambda b$ bekanntlich jeden beliebigen Punkt der Geraden ab dar, und die Gleichung $\alpha_n(a+\lambda b)^n=0$ liefert die n Durchschnittspunkte dieser Geraden mit der Curve α_n. Die Entwickelung giebt

$$1)\ \alpha_n a^n + n.\alpha_n a^{n-1} b.\lambda + \frac{n(n-1)}{2}\alpha_n a^{n-2} b^2.\lambda^2 + \ldots = 0.$$

Diese Gleichung zeigt, dass, wenn die m ersten Glieder derselben null sind, auch m Werthe von λ null sind, also die Gerade ab die Curve α_n in a m-punktig berührt, ferner dass, wenn die m ersten Glieder für jeden Werth von b verschwinden, auch jede durch a gezogene Gerade die Curve in a m-punktig trifft, d. h. a ein m-facher Punkt ist. Setzen wir nun ein Symbol α_m nur dann gleich null, wenn es mit beliebigen m Punkten multiplicirt null giebt, oder, anders ausgedrückt, wenn seine sämmtlichen Coefficienten null sind, so können wir sagen $\alpha_n a^{n-m} = 0$ drücke aus, dass der Punkt a ein $(m+1)$ facher Punkt der Curve α_n sei, namentlich $\alpha_n a^{n-1}=0$, dass a ein Doppelpunkt derselben sei. Die Glieder in der obigen Gleichung (1) stellen, wenn man b veränderlich setzt, die zu der Curve α_n gehörigen Polaren von a dar, namentlich ist $\alpha_n a$ Symbol der ersten Polare von a, welche ich schlechthin die Polare von a nen-

nen will, $\alpha_n a^2$ Symbol der zweiten Polare von α, welche ich die Polare von a^2 nennen will u. s. w. Ferner werde ich die durch das Symbol $\alpha_n a_1 a_2 \dots a_m$ dargestellte Curve n—$m$ter Ordnung die zu der Curve α_n gehörige Polare des Vereins der Punkte $a_1, a_2 \dots a_m$ oder kurz die Polare von $a_1 a_2 \dots a_n$ nennen.

Diese Bestimmungen genügen, um die Polenpaare einer Curve dritter Ordnung und die zusammengehörigen Pole von Curven höherer Ordnung auf die einfachste Weise abzuleiten. In der That bestimmt die Gleichung

2) $$\alpha_3 ab = 0$$

a und b als Polenpaar der Curve α_3. Setzt man die Polare von a also $\alpha_3 a = \alpha_2$; so sagt die Gleichung $\alpha_2 b = 0$ aus, dass b ein Doppelpunkt des Kegelschnittes α_2 ist, d. h. dass die Polare von a in zwei gerade Linien zerfällt, die sich in b schneiden. Diese Eigenschaft haben aber die Punkte a der Hessiana von α_3, d. h. a (und also auch b) liegt in dieser Hessiana, und jeder Punkt a der letzteren hat die Eigenschaft, dass $\alpha_3 ab = 0$ ist, wenn b den Doppelpunkt der Polare von a bezeichnet. Auch leuchtet sogleich ein, dass (falls nicht α_3 in 3 durch einen Punkt gehende Gerade ausartet) zu jedem Punkte a der zugepaarte b genau und eindeutig bestimmt ist. Die Gleichung (2) lehrt alle hierher gehörigen Aufgaben aufs einfachste lösen. So liefert sie sogleich die Gleichung der Hessiana. Denn sie sagt aus, dass $\alpha_3 ab$ mit jedem Punkte multiplicirt null giebt, dies wird erfüllt, wenn $\alpha_3 ab$ mit dreien ein Dreieck bildenden Punkten e_1, e_2, e_3

einzeln multiplicirt null giebt, also wenn $\alpha_3 ae_1 b = \alpha_3 ae_2 b = \alpha_3 ae_3 b = 0$ ist, d. h. wenn b der Durchschnitt der 3 Geraden $\alpha_3 ae_1$, $\alpha_3 ae_2$, $\alpha_3 ae_3$ ist; die einzige Bedingung für die Hessiana ist also, dass diese 3 Geraden sich in einem Punkte schneiden. Nun habe ich gezeigt (Ausdehnungslehre 1844 §. 144, 1862 Nr. 295), dass die Bedingung, dass 3 Gerade A, B, C sich in einem Punkte schneiden, durch die Gleichung $[ABC] = 0$ dargestellt werden kann, also ist die Gleichung der Hessiana $[\alpha_3 ae_1 . \alpha_3 ae_2 . \alpha_3 ae_3] = 0$, wie a der diese Curve beschreibende Punkt ist; ich werde die Hessiana von α_3 symbolisch mit β_3 bezeichnen. Es liegen also a und b in β_3, und zwar einer derselben darin ganz willkührlich; dann ist aber, vorausgesetzt, dass die Curve α_3 gegeben ist, der andere eindeutig bestimmt.

Die Aufgabe, welche der Schröter'schen Construction zu Grunde liegt, nämlich aus 2 Polenpaare (ab und cd) ein drittes abzuleiten, führt hiernach auf die einfache Aufgabe zurück aus 2 verschwindenden Produkten je zweier Punkte ein drittes solches abzuleiten, und zwar unter Anwendung der gewöhnlichen Multiplikationsgesetze. Hierbei ist vorauszusetzen, dass keine 3 der 4 Punkte a, b, c, d in g. Linie liegen. Wir können a, b, c, d als vielfache Punkte (Punkte mit einem Coefficienten versehen) setzen, dann lässt sich d als Summe der 3 andern darstellen, also $d = a + b + c$, die gesuchten Punkte seien $x = x_1 a + x_2 b + c$, $y = y_1 a + y_2 b + c$, so hat man, wenn $0 = ab = cd = xy$ sein soll, erstens $c(a + b + c) = 0$ d. h. $c^2 = -ac - bc$, und mit Benutzung dieser Gleichung erhält man $xy = x_1 y_1 a^2 + x_2 y_2 b^2 + (y_1 + x_1 - 1) ac + (y_2 + x_2 - 1) bc = 0$, wo die einzelnen Coefficienten null

sein müssen. Aus $x_1 y_1 = 0$ folgt beispielsweise $x_1 = 0$, dann darf aber nicht x_2 verschwinden weil sonst x mit d identisch wäre, also folgt dann aus $x_2 y_2 = 0$ nothwendig $y_2 = 0$, und aus den beiden andern $x_2 = 1$, $y_1 = 1$, d. h. einer der beiden gesuchten Punkte ist $c + b$, der andere $c + a$; der Punkt $c + b$ liegt aber erstens in der Geraden cb und zweitens, da $c + b = d - a$ ist, in der Geraden ad, also im Durchschnitt beider, und aus gleichem Grunde der andere in dem Durchschnitte der Geraden ca und db, was die Schröter'sche (schon von Hesse angedeutete) Construction ist. Fallen a und c in der Tangente t (an β_3) zusammen und d und b in der Tangente t_1, so ist der eine jener abgeleiteten Punkte der Durchschnittspunkt dieser Tangenten, also liegt auch dieser Durchschnittspunkt stets auf der Curve β_3.

Aus dieser Darstellung ergiebt sich die Eigenschaft zusammengehöriger Pole für Curven höherer Grade von selbst. Ist z. B. α_4 Symbol einer Curve vierter Ordnung, so stellt

$$3) \qquad \alpha_4 abc = 0$$

die Eigenschaft von drei zusammengehörigen Polen a, b, c einer Curve vierter Ordnung α_4 dar. Einer dieser Pole z. B. a ist ganz willkührlich; dann ist aber, wenn die Polare $\alpha_4 a$ von a gleich α_3 gesetzt wird, $\alpha_3 bc = 0$, d. h. b liegt willkührlich in der Hessiana β_3 von α_3, dann ist aber (falls nicht die Polare α_3 in 3 durch einen Punkt gehende Gerade zerfällt, was nur bei besonderen Arten von Curven 4ter Ordnung und auch hier nur für bestimmte Punkte a gilt) der dritte Punkt c eindeutig bestimmt. Ich will diese Curve β_3, da sie durch die Wende-

punkte von α_8 geht, der Kürze wegen die (zu α_4 gehörige) Wendelinie des Poles a nennen, d. h. Wendelinie des Punktes a nenne ich die Hessiana der Polare von a. Da man also die Faktoren a, b, c vertauschen kann, so haben jede 3 in Bezug auf eine Curve 4. Ordnung zusammengehörige Punkte die Eigenschaft, dass die Wendelinie jedes der 3 Punkte durch die beiden andern geht, oder, anders ausgedrückt: Bestimmt man zu einem beliebigen Pole a die Wendelinie, und nimmt auf dieser einen beliebigen Punkt b an, so geht dessen Wendelinie durch a, und beide Wendelinien gehen durch den Punkt c, welcher mit a und b einen Verein dreier zusammengehöriger Punkte bildet.

Um die entsprechenden Beziehungen für Curven höherer Ordnungen darzustellen, wird es genügen, sie noch für Curven 5ter Ordnung zur Anschauung zu bringen. Hier stellt die Gleichung

$$4) \qquad \alpha_5 a b c d = 0$$

die Eigenschaft von 4 zusammengehörigen Punkten dar. Die Hessiana β_8 zu der Polare $\alpha_3 = \alpha_5 ab$ des Punktenpaares ab heisse auch hier die Wendelinie des Punktenpaares ab (in Bezug auf die Curve α_5). Es haben also jede 4 in Bezug auf eine Curve 5. Ordnung zusammengehörigen Punkte die Eigenschaft, dass die Wendelinie je zweier unter ihnen durch die 2 andern geht, oder, anders ausgedrückt: Bestimmt man die Wendelinie zu zwei beliebigen Punkten a und b der Ebene, und nimmt auf dieser Wendelinie einen beliebigen Punkt c an und sucht dann zu a, b, c den dadurch bestimmten Punkt d, welcher mit ihnen einen Verein von 4 zusammengehörigen Punkten bildet, so geht jede Wende-

linie von zweien dieser Punkte durch die 2 andern. Hierbei ist vorausgesetzt, dass die zu zweien dieser Punkte gehörige Polare nicht in drei durch einen Punkt gehende Linien zerfällt, was nur für eine begränzte Anzahl von Punktenpaaren der Fall sein kann.

Es sind hier überall nur diejenigen Gleichungen in Betracht gezogen, wo das Symbol der Curven $n$ter Ordnung mit n—1 Punkten multiplicirt war, so dass überall nur e i n e der Faktorstellen unausgefüllt bleibt. Sollen mehr z. B. m der Faktorstellen unausgefüllt bleiben, so muss man, um zu einfachen Resultaten zu gelangen, zunächst einen andern Weg einschlagen, den ich hier nur andeuten will. Man hat nämlich dann eine Grösse P_m einzuführen, welche nicht unmittelbar aus m Punktfaktoren besteht, sondern vielmehr aus solchen Produkten numerisch abgeleitet ist, also z. B. $P_2 = a_{11}e_1{}^2 + a_{22}e_2{}^2 + a_{33}e_3{}^2 + a_{23}e_2e_3 + a_{31}e_3e_1 + a_{12}e_1e_2$ zu setzen, wo $a_{11}, a_{22}, \ldots$ Zahlen sind. Hat man dann z. B. $\alpha_5 aP = 0$, wo α_5 wieder Symbol einer Curve 5ter Ordnung ist, so hat man als Ort für a eine Curve 6ter Ordnung, welche die gleich Null gesetzte Determinante der 6 Gleichungen $\alpha_5 aP_2 e_1{}^2 = 0$, $\alpha_5 aP_2 e_2{}^2 = 0$, ... $\alpha_5 aP_2 e_1 e_2 = 0$ in Bezug auf die 6 Unbekannten $a_{11}, a_{22} \ldots a_{12}$ ist. Man sieht sogleich, dass diese Determinantengleichung für $\alpha_n a^{n-4} P_2 = 0$ vom $6(n—4)$ten Grade ist. Die durch sie dargestellte Curve entspricht genau der Hessiana. Man kann sie die zweite Determinantencurve nennen, wenn die Hessiana als die erste bezeichnet wird. Ganz auf dieselbe Weise ergiebt sich zu $\alpha_n a^{n-2m} P_m$

$= 0$ eine $m$te Determinantencurve, deren Ordnung $\frac{(m+1)(m+2)}{2}(n-2m)$ ist, und welche für $m=1$ in die Hessiana übergeht.

Stettin, den 15. November 1872.

Im Anschluss an die Mittheilungen der Herrn Neumann und Grassmann glaubt die Gesellschaft der Wissenschaften verpflichtet zu sein auch folgende Zuschrift zu veröffentlichen:

Hochgeehrter Herr Sekretär der K. Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen!

Mit dem schmerzlichsten Erstaunen erhalten wir die traurige Nachricht von dem frühzeitigen Ableben Professor's Alfred Clebsch. Es liegt darin ein bitterer Verlust für Deutschland im Allgemeinen, das in ihm einen der edelsten Söhne verliert, und in's Besondere für Ihre Universität, an welcher er als ein höchst thätiger Lehrer und rastloser und glücklicher Beförderer der Wissenschaft glänzte. Dieser Verlust ist nicht minder ein höchst schmerzliches Ereigniss für jeden Freund der Mathematik, ohne Unterschied von Nationalität, namentlich wird das Ableben von Clebsch in Italien am tiefsten gefühlt werden, wo seine Schriften einen grossen und wohlthätigen Einfluss ausgeübt haben, und wo er sich viele Freunde und Bewunderer gewonnen hatte. Unter diese wollen wir gerechnet sein; und da wir überdies die Ehre haben Ihrer gelehrten Gesellschaft anzugehören, so erlauben wir uns diese Zeilen an Sie, Herr Sekretär, zu richten, um

unsre Theilnahme an der Trauer der Collegen und der Schüler von Clebsch zu bezeugen.

Falls es in der Absicht Ihrer Gesellschaft oder der Universität, oder einfach der Freunde von Clebsch läge, eine Subscription zu fördern, um das Andenken des genialen Geometers zu ehren, sei es durch ein Denkmal oder durch die Herausgabe seiner Werke, bitten wir dabei als Theilnehmer mitgezählt zu werden.

Mit der Versicherung der aufrichtigsten Hochachtung

Ihre

Mailand

ergebensten

den 15. November 1872.

Fr. Brioschi.
L. Cremona.

Ueber die Flächen, welche gegebenen Flächen der Krümmungsmittelpunkte entsprechen.

Von

A. Enneper.

III.

Auf Seite 227 der Nachrichten aus d. J. 1871 sind die Flächen bestimmt, für welche eine der Schalen der Krümmungsmittelpuncte eine developpabele Fläche ist. Die dort gegebenen allgemeinen Gleichungen schliessen auch den Fall ein, dass die andere Schale eine Kugelfläche ist. Der letzte speciellere Fall bietet insofern eine besonderes Interesse dar, als sich derselbe durch

Integration einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung und zweiten Grades behandeln lässt, wobei sich Gleichungen ergeben, welche in Verbindung mit den oben bemerkten, zu einer eigenthümlichen Bestimmung der Elemente einer Raumcurve führen.

Sind die Coordinaten x, y, z eines Punctes einer Fläche Φ Functionen der Variabeln u und v, so sei:

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

der allgemeine Ausdruck des Bogenelements einer Curve auf Φ. Entspricht dem Puncte (x, y, z) von Φ der Punct (x_1, y_1, z_1) einer Fläche Φ_1, so sei für Φ_1 der allgemeine Ausdruck des Bogenelements einer Curve:

$$E_1\,du^2 + 2F_1\,du\,dv + G_1\,dv^2.$$

Die Länge der Verbindungslinie der Puncte (x, y, z) und $(x_1, y_1\, z_1)$ sei q, ferner seien a, b, c die Winkel, welche q mit den Coordinatenaxen bildet. Es ist dann:

$$\frac{x_1 - x}{\cos a} = \frac{y_1 - y}{\cos b} = \frac{z_1 - z}{\cos c} = q,$$

oder:

$$1)\qquad \left\{ \begin{aligned} x &= x_1 - q\cos a, \\ y &= y_1 - q\cos b, \\ z &= z_1 - q\cos c. \end{aligned} \right.$$

Ist durch die Winkel a, b, c die Richtung der Normalen zu Φ im Puncte (x, y, z) bestimmt, so geben die Gleichungen:

$$\frac{dx}{du}\cos a + \frac{dy}{du}\cos b + \frac{dz}{du}\cos c = 0,$$

$$\frac{dx}{dv}\cos a + \frac{dy}{dv}\cos b + \frac{dz}{dv}\cos c = 0,$$

in Verbindung mit den Gleichungen 1):

$$2)\quad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{du}\cos a + \dfrac{dy_1}{du}\cos b + \dfrac{dz_1}{du}\cos c = \dfrac{dq}{du}, \\ \dfrac{dx_1}{dv}\cos a + \dfrac{dy_1}{dv}\cos b + \dfrac{dz_1}{dv}\cos c = \dfrac{dq}{dv}. \end{cases}$$

Liegt die Verbindungslinie der Puncte (x, y, z) und (x_1, y_1, z_1) in der berührenden Ebene zur Fläche Φ_1 im Puncte (x_1, y_1, z_1), so ist:

$$3)\quad \cos a \cos a_1 + \cos b \cos b_1 + \cos c \cos c_1 = 0$$

oder:

$$4)\quad \begin{vmatrix} \cos a, & \cos b, & \cos c \\ \dfrac{dx_1}{du}, & \dfrac{dy_1}{du}, & \dfrac{dz_1}{du} \\ \dfrac{dx_1}{dv}, & \dfrac{dy_1}{dv}, & \dfrac{dz_1}{dv} \end{vmatrix} = 0,$$

wenn die Richtung der Normalen zur Fläche Φ_1 im Puncte (x_1, y_1, z_1) durch die Winkel a_1, b_1, c_1 bestimmt ist. Ist die Fläche Φ_1 gegeben, so ist dieselbe eine der Schalen der Krümmungsmittelpunkte der zu bestimmenden Fläche Φ.

Durch die Gleichungen 2) und 4) sind die

Werthe von $\cos a$, $\cos b$ und $\cos c$ bestimmt, durch deren Substitution in:

$$\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c = 1$$

sich zur Bestimmung von q die bekannte partielle Differentialgleichung:

$$5)\quad E_1 G_1 - F_1^2 = G_1 \left(\frac{dq}{du}\right)^2 + 2 F_1 \frac{dq}{du}\frac{dq}{dv} + E_1 \left(\frac{dq}{dv}\right)^2$$

ergiebt. Mittelst der Gleichungen 1), 2), 4) und 5) sind endlich x, y, z als Functionen von u und v bestimmt. Die Differentialgleichung der Krümmungslinien der Fläche Φ ist:

$$\begin{vmatrix} d\cos a, & d\cos b, & d\cos c \\ \cos a, & \cos b, & \cos c \\ dx, & dy, & dz \end{vmatrix} = 0$$

d. i. nach 1):

$$6)\quad \begin{vmatrix} d\cos a, & d\cos b, & d\cos c \\ \cos a, & \cos b, & \cos c \\ dx_1, & dy_1, & dz \end{vmatrix} = 0,$$

Mittelst der Gleichungen 2) und 4) folgt:

$$\cos b\, dz_1 - \cos c\, dy_1 = \left(\cos b \frac{dz_1}{du} - \cos c \frac{dy_1}{du}\right) du$$

$$+\left(\cos b \frac{dz_1}{dv}\right) - \cos c \frac{dy_1}{dv}\Big) dv = - T T_1,$$

wo:

$$T = \left(E_1 \frac{dq}{dv} - F_1 \frac{dq}{du}\right) du - \left(G_1 \frac{dq}{du} - F_1 \frac{dq}{dv}\right) dv$$

und:

$$T_1 = \frac{\frac{dy_1}{du}\frac{dz_1}{dv} - \frac{dy_1}{dv}\frac{dz_1}{du}}{E_1 G_1 - F_1^2}.$$

Der Factor T_1 ist $\cos a_1$ proportional, hieraus folgt, dass die Gleichung 6) in die beiden folgenden zerfällt:

$$7) \quad \left(E_1 \frac{dq}{dv} - F_1 \frac{dq}{du}\right) du - \left(G_1 \frac{dq}{du} - F_1 \frac{dq}{dv}\right) dv = 0,$$

$$\cos a_1 \, d\cos a + \cos b_1 \, d\cos b + \cos c_1 \, d\cos c = 0.$$

Die letzte Gleichung lässt sich nach 3) schreiben:

$$\cos a \, d\cos a_1 + \cos b \, d\cos b_1 + \cos c \, d\cos c_1 = 0,$$

d. i.:

$$\left(\cos a \frac{d\cos a_1}{du} + \cos b \frac{d\cos b_1}{du} + \cos c \frac{d\cos c_1}{du}\right) du$$

$$+ \left(\cos a \frac{d\cos a_1}{dv} + \cos b \frac{d\cos b_1}{dv} + \cos c \frac{d\cos c_1}{dv}\right) dv = 0.$$

Aus den Werthen von x, y, z lassen sich die beiden Hauptkrümmungshalbmesser der Fläche Φ im Puncte (x, y, z) berechnen, von denen natürlich der eine gleich q ist. Die auszuführenden Rechnungen sind ziemlich weitläufig, die-

selben lassen sich dadurch etwas vereinfachen, dass man die zweiten Differentialquotienten von q nach u und v mittelst der Gleichung 5) durch

$$\frac{d^2q}{du\,dv}$$

ausdrückt. Setzt man zur Vereinfachung:

$$N = \frac{d^2q}{du\,dv} - \tag{9}$$

$$\frac{\left(G_1 \frac{dq}{du} - F_1 \frac{dq}{dv}\right)\frac{1}{2}\frac{dE_1}{dv} + \left(E_1 \frac{dq}{dv} - F_1 \frac{dq}{du}\right)\frac{1}{2}\frac{dG_1}{du}}{E_1 G_1 - F_1^2},$$

so findet man:

$$\frac{d^2q}{du^2} - \cos a \frac{d^2x_1}{du^2} - \cos b \frac{d^2y_1}{du^2} - \cos c \frac{d^2z_1}{du^2} =$$

$$-\frac{E_1 \frac{dq}{dv} - F_1 \frac{dq}{du}}{G_1 \frac{dq}{du} - F_1 \frac{dq}{dv}} N,$$

$$\frac{d^2q}{dv^2} - \cos a \frac{d^2x_1}{dv^2} - \cos b \frac{d^2y_1}{dv^2} - \cos c \frac{d^2z_1}{dv^2} =$$

$$-\frac{G_1 \frac{dq}{du} - F_1 \frac{dq}{dv}}{E_1 \frac{dq}{dv} - F_1 \frac{dq}{du}} N.$$

Ohne weiter hier auf die speciellere Ausfüh-

rung der analytischen Rechnungen einzugehn, sei nur bemerkt, dass der zweite Hauptkrümmungshalbmesser der Fläche Φ im Puncte (x, y, z), welche durch τ bezeichnet werden möge, durch folgende Gleichung bestimmt:

$$\tau = q + \frac{\frac{dq}{du}\frac{dq}{dv} - F_1}{N}$$

Setzt man zur Abkürzung $\tau - q = t$, also:

10) $$t = \frac{\frac{dq}{du}\frac{dq}{dv} - F_1}{N},$$

ist (x_2, y_2, z_2) der Punct der zweiten Schale Φ_2 der Krümmungsmittelpuncte, welcher dem Puncte (x, y, z) der Fläche Φ entspricht, so ist:

11) $$\begin{cases} x_2 = x_1 + t\cos a, \\ y_2 = y_1 + t\cos b, \\ z_2 = z_1 + t\cos c. \end{cases}$$

Man kann sich dieser Gleichungen bedienen, für eine gegebene Schale Φ_1 die andere Schale Φ_2 gewissen Bedingungen zu unterwerfen, was natürlich zu einer Untersuchung der arbiträren Function führt, welche die Integration der Gleichung 5) involvirt. Ist die Normale zu Φ_2 im Punkte (x_2, y_2, z_2) durch die Winkel a_2, b_2, c_2 bestimmt, so ist:

$$\cos a_1 \cos a_2 + \cos b_1 \cos b_2 + \cos c_1 \cos c_2 = 0,$$

$$\cos a \cos a_2 + \cos b \cos b_2 + \cos c \cos c_2 = 0,$$

d. i.:

$$\frac{\cos a_2}{\frac{dx_1}{du}\frac{dq}{dv} - \frac{dx_1}{dv}\frac{dq}{du}} = \frac{\cos b_2}{\frac{dy_1}{du}\frac{dq}{dv} - \frac{dy_1}{dv}\frac{dq}{du}} =$$

$$\frac{\cos c_2}{\frac{dz_1}{du}\frac{dq}{dv} - \frac{dz_1}{dv}\frac{dq}{du}}.$$

Sind E_1, F_1 und G_1 nur von einer der Variabeln u und v, z. B. v abhängig, so giebt die Gleichung 5):

$$12)\quad q = P + pu + p\int\frac{F_1}{E_1}dv \pm \int\frac{\sqrt{E_1^2 - p^2}\sqrt{E_1 G_1 - F_1^2}}{E_1}dv,$$

$$13)\quad 0 = P' + u + \int\frac{F_1}{E_1}dv \mp \int\frac{p\sqrt{E_1 G_1 - F_1^2}}{E_1\sqrt{E_1 - p^2}}dv.$$

In diesen Gleichungen ist p ein Parameter P eine beliebige Function von p und P' die Derivirte von P. Aus 13) ist der Werth von p in Function von u und v in 12) zu substituiren zur Herstellung des vollständigen Ausdrucks von q. Ist p eine absolute Constante, so ist natürlich nur die Gleichung 12) allein zu nehmen. Dem Werthe von q aus 12) entsprechen folgende Gleichungen:

$$14)\begin{cases} \cos a\sqrt{E_1 G_1 - F_1^2} = W\frac{dx_1}{du} \pm \sqrt{E_1 - p^2}\frac{dx_1}{dv}, \\ \cos b\sqrt{E_1 G_1 - F_1^2} = W\frac{dy_1}{du} \pm \sqrt{E_1 - p^2}\frac{dy_1}{dv}, \\ \cos c\sqrt{E_1 G_1 - F_1^2} = W\frac{dz_1}{du} \pm \sqrt{E_1 - p^2}\frac{dz_1}{dv}, \\ WE_1 = p\sqrt{E_1 G_1 - F_1^2} \mp F_1\sqrt{E_1 - p^2}. \end{cases}$$

Setzt man den Werth von q aus 12) in die Gleichung 7), so geht dieselbe über in:

$$\pm\sqrt{E_1 - p^2}\,du \pm \frac{F_1}{E_1}\sqrt{E_1 - p^2}\,dv$$

$$-p\frac{\sqrt{E_1 G_1 - F_1^2}}{E_1}\,dv = 0$$

oder:

$$15)\qquad du + \frac{F_1}{E_1}\,dv \mp \frac{p\sqrt{E_1 G_1 - F_1^2}}{E_1\sqrt{E_1 - p^2}}\,dv = 0.$$

Es ist nun p Function von u und v, differentiirt man die Gleichung 12), so folgt nach 15):

$$[P'' \mp \int\frac{\sqrt{E_1 G - F_1^2}}{(E_1 - p^2)^{\frac{3}{2}}}\,dv]\,dp = 0,$$

alo $dp = 0$ oder p constant. Längs einer Krümmungslinie der Fläche Φ ist also p constant. In der letzten Gleichung ist P'' die zweite Derivirte von P nach p. Bedeutet g eine Con-

stante, ist die Fläche Φ_1 eine Kugelfläche, so kann man setzen:

$x_1 = g\cos u\sin v,\quad y_1 = g\sin u\sin v,\quad z_1 = g\cos v,$
also:
$$E_1 = g^2\sin^2 v,\quad G_1 = g^2,\quad F_1 = 0,$$

und aus 2) und 4):

$$16)\begin{cases} g\sin v\cos a = -\sin u\dfrac{dq}{du} + \cos u\sin v\cos v\dfrac{dq}{dv}, \\ g\sin v\cos b = \cos u\dfrac{dq}{du} + \sin u\sin v\cos v\dfrac{dq}{dv}, \\ g\sin v\cos c = -\sin^2 v\dfrac{dq}{dv}. \end{cases}$$

Die Gleichung 8) nimmt im vorliegenden Falle die einfache Form an:

$$\frac{dq}{du}du + \frac{dq}{dv}dv = 0,$$

also $dq = 0$, d. h. längs einer Krümmungslinie ist q constant.

Die Gleichung 5) wird:

$$(g\sin v)^2 = \left(\frac{dq}{du}\right)^2 + \left(\sin v\frac{dq}{dv}\right)^2,$$

also:

$$17)\begin{cases} \dfrac{q}{g} = P + pu \pm \displaystyle\int \frac{\sqrt{\sin^2 v - p^2}}{\sin v}dv, \\ 0 = P + u \mp \displaystyle\int \frac{p}{\sin v\sqrt{\sin^2 v - p^2}}dv, \end{cases}$$

wo P und P' analoge Bedeutungen wie in 12) und 13) haben. Nimmt man der Einfachheit halber die oberen Zeichen setzt:

18) $$-P+pP'+\frac{q}{g}=w,$$

so ist aus 17):

$$\cos v=\cos w\sqrt{1-p^2},$$

$$\frac{p\operatorname{cotang} v}{\sqrt{1-p^2}}=\cos(u+P').$$

oder:

19) $$\cos v=\cos w\sqrt{1-p^2},\quad \sin v=\Delta,$$

$$\Delta\cos u=p\cos w\cos P'+\sin w\sin P',$$

$$\Delta\sin u=-p\cos w\sin P'+\sin w\cos P',$$

$$\Delta^2=\sin^2 w+p^2\cos^2 w.$$

Mit Hülfe der Gleichungen 17) und 18) geben die Gleichungen 16):

$$\cos a=\cos w\sin P'-p\sin w\cos P',$$

$$\cos b=\cos w\cos P'+p\sin w\sin P'$$

$$\cos c=\qquad\qquad -\sin w\sqrt{1-p^2}.$$

Diese Gleichungen in Verbindung mit den Gleichungen 1) geben für x, y, z folgende Werthe in Functionen der Argumente p und q der Krümmungslinien:

20)

$$x=(g\cos w+q\sin w)p\cos P'+(g\sin w-q\cos w)\sin P',$$

$$y = -(g\cos w + q\sin w)p\sin P' + (g\sin w - q\cos w)\cos P',$$

$$z = (g\cos w + q\sin w)\sqrt{1-p^2}.$$

Mit Rücksicht auf den Werth von w aus 18) folgt:

$$\frac{dx}{dp}\frac{1}{\cos P'} = -\frac{dy}{dp}\frac{1}{\sin P'} = -\frac{\sqrt{1-p^2}}{p}\frac{dz}{dp}.$$

Nimmt man also:

$$\frac{\frac{dx}{dp}}{\cos\lambda} = \frac{\frac{dy}{dp}}{\cos\mu} = \frac{\frac{dz}{dp}}{\cos\nu},$$

so kann man setzen:

$$\cos\lambda = \sqrt{1-p^2}\cos P',$$

21) $$\cos\mu = -\sqrt{1-p^2}\sin P',$$

$$\cos\nu = -p.$$

Behält man die in II. gebrauchten Bezeichnungen bei, so gehen die Gleichungen 21) durch Differentation nach p:

22) $$\frac{1}{\varrho}\frac{ds}{dp}\cos\alpha + \frac{1}{r}\frac{ds}{dp}\cos l = \frac{p}{\sqrt{1-p^2}}\cos P' +$$

$$P''.\sin P'\sqrt{1-p^2},$$

$$\frac{1}{\varrho}\frac{ds}{dp}\cos\beta + \frac{1}{r}\frac{ds}{dp}\cos m = -\frac{p}{\sqrt{1-p^2}}\sin P'$$

$$+P''\cos P'\sqrt{1-p^2},$$

$$\frac{1}{\varrho}\frac{ds}{dp}\cos\gamma+\frac{1}{r}\frac{ds}{dp}\cos n=1.$$

Aus 21) und 22) ist endlich:

$$\frac{1}{r}\frac{ds}{dp}\cos\alpha-\frac{1}{\varrho}\frac{ds}{dp}\cos l=\frac{\sin P'}{\sqrt{1-p^2}}$$

$$-pP''\sqrt{1-p^2}\cos P',$$

23) $$\frac{1}{r}\frac{ds}{dp}\cos\beta-\frac{1}{\varrho}\frac{ds}{dp}\cos m=\frac{\cos P'}{\sqrt{1-p^2}}$$

$$+pP''\sqrt{1-p^2}\sin P',$$

$$\frac{1}{r}\frac{ds}{dp}\cos\gamma-\frac{1}{\varrho}\frac{ds}{dp}\cos n=-(1-p^2)P''.$$

Die Gleichung:

$$\left(\frac{1}{r}\frac{ds}{dp}\right)^2+\left(\frac{1}{\varrho}\frac{ds}{dp}\right)^2=\frac{1}{1-p^2}+P''^2(1-p^2),$$

ersetze man durch:

$$\frac{1}{\varrho}\frac{ds}{dp}=\frac{\cos\psi}{\sqrt{1-p^2}}\sqrt{1+P''^2(1-p^2)^2},$$

24)

$$\frac{1}{r}\frac{ds}{dp}=\frac{\sin\psi}{\sqrt{1-p^2}}\sqrt{1+P''^2(1-p^2)^2}.$$

Die letzten Gleichungen 22) und 23) geben dann:

$$\cos\gamma\sqrt{1+P''^2(1-p^2)^2}=$$
$$(\cos\psi-(1-p^2)P''\sin\psi)\sqrt{1-p^2}.$$

Stellt man aus dieser Gleichung durch Differentation nach p den Werth von $\cos\nu$ her, so geben die Gleichungen 21) und 24):

$$\frac{d\psi}{dp}+\frac{\frac{dP''(1-p^2)}{dp}}{1+P''^2(1-p^2)^2}=pP''$$

also:

$$\text{25)}\qquad \operatorname{tang}\psi=\frac{P''(1-p^2)\sin\theta+\cos\theta}{P''(1-p^2)\cos\theta-\sin\theta},$$

wo:

$$\frac{d\theta}{dp}=pP''=\frac{d(pP'-P)}{dp}.$$

Mit Weglassung einer Constanten ist:

$$\text{26)}\qquad \theta=pP'-P.$$

In den Gleichungen 22), 23) und 24) setze man nach 25):

$$P''(1-p^2)=\operatorname{cotang}(\psi-\theta).$$

Die Gleichungen 20)—23) geben dann, mit Rücksicht darauf, dass nach 18) und 26) $w-\theta=\frac{q}{g}$, zur Bestimmung von x, y, z die folgenden Gleichungen, welche den früher aufgestellten analog sind und in welchen die Quantitäten p, P, P' nicht mehr enthalten sind:

$$x\cos\lambda + y\cos\mu + z\cos\nu = 0,$$

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = g\sin\frac{q}{g} - q\cos\frac{q}{g},$$

$$x\cos l + y\cos m + z\cos n = g\cos\frac{q}{g} + q\sin\frac{q}{g}.$$

IV.

Die kürzeste Distanz $2k$ zweier Geraden werde zur Axe der z genommen, die Mitte der Distanz zum Anfangspunct der Coordinaten, endlich die Halbirungslinie des Winkels 2δ, welche die Projectionen der Geraden auf die xy-Ebene einschliessen, zur Axe der x. Unter dieser Voraussetzung sind die Gleichungen der Geraden:

1) $$\frac{X}{\cos\delta} = \frac{Y}{\sin\delta}, \quad Z = k$$

2) $$\frac{X}{\cos\delta} = \frac{Y}{-\sin\delta}, \quad Z = -k.$$

Die Gerade 1) sei die Axe einer Rotationsfläche und zwar einer Fläche Φ_1, welche eine der Schalen der Krümmungsmittelpuncte einer Fläche Φ ist. Man kann dann setzen:

$$x_1\cos\delta + y_1\sin\delta = V'\cos v + V\sin v,$$

3) $$-x_1\sin\delta + y_1\cos\delta = (V'\sin v - V\cos v)\cos u,$$

$$z_1 - k = (V'\sin v - V\cos v)\sin u.$$

In diesen Gleichungen ist V eine beliebige Function von v und V' die Derivirte von V. Ist die zweite Schale Φ_2 der Krümmungsmittelpuncte der Fläche Φ ebenfalls eine Rotationsfläche, ist ihre Axe durch die Gleichungen 2) bestimmt, so findet mit Rücksicht auf die in III. gebrauchten Bezeichnungen, folgende Gleichung statt:

$$[x_2 \cos c_2 - (z_2 + k) \cos a_2] \sin \delta$$

$$+ [y_2 \cos c_2 - (z_2 + k) \cos b_2] \cos \delta = 0.$$

Die in III. aufgestellten Gleichungen 11) in Verbindung mit den obigen Werthen von x_1, y_1, z_1 aus 3) geben mittelst der vorstehenden Gleichung eine weitere Gleichung zur Bestimmung von q. Die nähere Deduction dieser Gleichung ist nicht ohne Weitläufigkeit, wesshalb dieselbe hier nur einfach angemerkt werden soll. Mittelst der Gleichungen 3) und der in III. entwickelten Gleichungen findet man:

4)

$$(V' \sin v - V \cos v) \frac{dq}{dv}. \quad [(V' \sin v - V \cos v) \cos 2\delta$$

$$+ (V' \cos v + V \sin v) \cos u \sin 2\delta + 2k \sin u \cos 2\delta]$$

$$+ (\frac{dV'}{dv} + V) \frac{dq}{du} [- V \sin u \sin 2\delta$$

$$+ 2k \cos v \sin 2\delta + 2k \sin v \cos u \cos 2\delta]$$

$$+ t (\frac{dV'}{dv} + V) (V' \sin v - V \cos v) [\cos v \cos u \sin 2\delta$$

$$+ \sin v \cos 2\delta] = 0.$$

In den Gleichungen 9), 10), 12) und 13) von III. hat man im vorliegenden Falle zu setzen:

$$5)\quad \sqrt{E_1} = V'\sin v - V\cos v,\ \sqrt{G_1} = \frac{dV'}{dv} + V,$$

$$F_1 = 0.$$

Es ist dann:

$$6)\quad \frac{dq}{du} = p,\ \pm\frac{dq}{dv} = \sqrt{\frac{E_1 - p^2}{E_1}G_1}$$

$$t = \frac{\frac{dq}{du}\,\frac{dq}{dv}}{\frac{d^2q}{du\,dv} - \frac{1}{2E_1}\frac{dE_1}{dv}\frac{dq}{du}}$$

Zur Bestimmung von p dient die Gleichung:

$$7)\quad 0 = P' + u \mp p\int dv\sqrt{\frac{G_1}{E_1(E_1 - p^2)}}.$$

Die Gleichungen 4) — 7) involviren die Lösung des Problems die Fläche zu finden, deren beide Schalen der Krümmungsmittelpunkte Rotationsflächen sind. Fallen die Axen der beiden Rotationsflächen zusammen, nimmt man $k = 0$ und $\delta = 0$, so geben die Gleichungen 4) — 6) $\frac{d^2q}{du\,dv} = 0$ d. i. $\frac{dp}{dv} = 0$, in diesem Falle ist also p eine Constante. Man kann die Gleichungen 4) — 7) durch ein anderes System ersetzen, welches nicht ohne Interesse ist und nicht die Complication der obigen Gleichungen

bietet, welche einer weiteren Untersuchung derselben hinderlich in den Weg tritt.

Die Puncte (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) der Schalen der Krümmungsmittelpunkte Φ_1 und Φ_2, welche dem Puncte (x, y, z) der Fläche Φ entsprechen, seien durch die folgenden Gleichungen bestimmt:

$$x_1 = x + r' \cos a, \quad x_2 = x + r'' \cos a,$$

$$8) \quad y_1 = y + r' \cos b, \quad y_2 = y + r'' \cos b,$$

$$z_1 = z + r' \cos c, \quad z_2 = z + r'' \cos c.$$

Man nehme an, dass für die gesuchte Fläche Φ die Coordinaten x, y, z Functionen von u und v sind, wo u und v die Argumente der Krümmungslinien bedeuten. Mit Zuziehung der Gleichungen, welche auf pag. 237 — 239 der Nachrichten der K. G. d. W. vom Jahre 1867 angemerkt sind, gelangt man zu zwei bemerkenswerthen Gleichungen zur Bestimmung der Fläche Φ.

Die Puncte (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) mögen zwei Rotationsflächen angehören, deren Axen respective durch die Gleichungen 1) und 2) bestimmt sind. Dividirt man die erste der sich ergebenden Bedingungsgleichungen durch r' die zweite durch r'', so folgt:

$$\frac{x_1 \cos c' + (k - z_1) \cos a'}{r'} \sin \delta = \frac{y_1 \cos c' + (k - z_1) \cos b'}{r'} \cos \delta,$$

$$\frac{x_2 \cos c'' - (k + z_2) \cos a''}{r''} \sin \delta = \frac{y_2 \cos c'' - (k + z_2) \cos b''}{r''} \cos \delta.$$

In Folge der Gleichungen 8) ist also:

$$\left[\frac{x\cos c' + (k-z)\cos a'}{r'} + \cos a\cos c' - \cos a'\cos c\right]\sin\delta$$

9)

$$-\left[\frac{y\cos c' + (k-z)\cos b'}{r'} + \cos b\cos c' - \cos b'\cos c\right]\cos\delta = 0.$$

$$\left[\frac{x\cos c'' - (k+z)\cos a''}{r''} + \cos a\cos c'' - \cos a''\cos c\right]\sin\delta$$

10)

$$+\left[\frac{y\cos c'' - (k+z)\cos b''}{r''} + \cos b\cos c'' - \cos b''\cos c\right]\cos\delta = 0.$$

Multiplicirt man die Gleichung 9) mit $\sqrt{E}$, so ist die linke Seite derselben ein vollständiger Differentialquotient in Beziehung auf u, analoges gilt für die Variabele v, wenn die Gleichung 10) mit $\sqrt{G}$ multiplicirt wird. Bezeichnet also V eine Function von v allein, ist U nur von u abhängig, so leitet man aus den Gleichungen 9) und 10) unmittelbar die folgenden ab:

11)

$$[x\cos c + (k-z)\cos a]\sin\delta - [y\cos c + (k-z)\cos b]\cos\delta = V.$$

12)

$$[x\cos c - (k+z)\cos a]\sin\delta + [y\cos c - (k+z)\cos b]\cos\delta = U.$$

Sind d_1 und d_2 die kürzesten Distanzen der Normalen zur Fläche Φ im Puncte (x, y, z) von den beiden Rotationsaxen, bestimmt durch die Gleichungen 1) und 2), sind ferner ψ_1 und ψ_2 die Winkel, welche die Normale mit parallelen Richtungen zu den bemerkten Axen bildet, so geben die Gleichungen 11) und 12):

$$d_1 \sin\psi_1 = V, \quad d_2 \sin\psi_2 = U.$$

Die Gleichung 11) differentiire man nach v, ersetze $\frac{1}{r''}$ durch seinen Werth aus 10), drücke ferner x und y in Function von z mittelst der Gleichungen 11) und 12) aus. Dividirt man endlich die erhaltene Gleichung durch $\sqrt{G}$, so findet man:

$$\frac{V'}{2\sqrt{G}}[(\cos b' \sin \delta - \cos a' \cos \delta)(k+z) + U \cos c''] =$$

$$13) \qquad -k \cos^2 b' \sin^2 \delta + k \cos^2 a' \cos^2 \delta$$

$$-\frac{U+V}{2} \cos c'' \cos a' \cos \delta - \frac{U-V}{2} \cos c'' \cos b' \sin \delta.$$

Auf ähnliche Weise leitet man aus der Gleichung 12) durch Differentation nach u die folgende Gleichung ab:

$$\frac{U'}{2\sqrt{E}}[(\cos b'' \sin \delta + \cos a'' \cos \delta)(k-z) + V \cos c'] =$$

$$14) \qquad k \cos^2 b'' \sin^2 \delta - k \cos^2 a'' \cos^2 \delta$$

$$-\frac{U+V}{2} \cos c' \cos a'' \cos \delta - \frac{U-V}{2} \cos c' \cos b'' \sin \delta.$$

Sind U und V constant, so verschwinden die linken Seiten der Gleichungen 13) und 14). Bildet man die Differenz der rechten Seiten, so folgt:

$$-k \sin^2 \delta (1 - \cos^2 b) + k \cos^2 \delta. \; (1 - \cos^2 a)$$

$$+\frac{U+V}{2}\cos b\cos\delta-\frac{U-V}{2}\cos a\sin\delta)=0.$$

Soll durch die vorstehende Gleichung keine developpabele Fläche bestimmt sein, was nicht sein kann, da r' und r'' endliche Werthe haben sollen, so muss die Gleichung identisch verschwinden. Es ist also dann:

15) $k=0,\ (U+V)\cos\delta=0,\ (U-V)\sin\delta=0.$

Nimmt man $k=0$, $U=0$, $V=0$, so geben die Gleichungen 11) und 12):

$$\frac{x}{\cos a}=\frac{y}{\cos b}=\frac{z}{\cos c},$$

durch welche Gleichungen die Kugelfläche bestimmt ist. Die Gleichungen 15) geben ferner $U+V=0$ und $\sin\delta=0$, oder $\cos\delta=0$ und $U-V=0$, in beiden Fällen fallen die Rotationsaxen zusammen. Die Gleichungen 12) geben für $\delta=0$ und $k=0$:

$$z\cos b-y\cos c=-V,$$

wo V constant ist. Setzt man $V=-g$, vertauscht die Axe der z mit der Axe der x, so sind die Flächen, deren Schalen der Krümmungsmittelpunkte Rotationsflächen mit gemeinschaftlicher Rotationsaxe sind, durch folgende Gleichung bestimmt:

$$x\cos b-y\cos a=g.$$

Das allgemeine Integral dieser partiellen Dif-

ferentialgleichung lässt sich auf folgende Weise darstellen, wenn statt u und v zwei andere Variabele θ und φ genommen werden, welche folgende Bedeutung haben. Es ist θ der Winkel, welchen die Normale des Punctes (x, y, z) mit einer festen Geraden, der Axe der z, bildet; ferner φ der Winkel, welchen die Projection der Normale auf die xy-Ebene mit der Axe der x einschliesst. Bezeichnet Ω eine beliebige Function von θ, ist Ω' die Derivirte von Ω, so hat man folgende Gleichungen:

$$x = [(g\varphi + \Omega)\sin\theta + \Omega'\cos\theta]\cos\varphi - \frac{g}{\sin\theta}\sin\varphi,$$

$$y = [(g\varphi + \Omega)\sin\theta + \Omega'\cos\theta]\sin\varphi + \frac{g}{\sin\theta}\cos\varphi,$$

$$z = -(g\varphi + \Omega)\cos\theta + \Omega'\sin\theta.$$

Für die vorstehenden Gleichungen ist $\cos a = -\sin\theta\cos\varphi$, $\cos b = -\sin\theta\sin\varphi$ und $\cos c = \cos\theta$.

V.

Den Krümmungsmittelpuncten der Normalschnitte in jedem Systeme von Krümmungslinien einer Fläche Φ entspricht eine Schale der Krümmungsmittelpuncte, dem Systeme K_1 möge die Schale Φ_1, dem Systeme K_2 die Schale Φ_2 entsprechen. Den beiden Systemen von Krümmungslinien K_1 und K_2 entsprechen auf jeder Schale zwei Systeme von Curven, von denen ein System nach Monge aus geodätischen Linien besteht. Das andere System von Curven hat die

Eigenschaft, dass die berührenden Ebenen zur Schale längs derselben von developpabelen Flächen eingehüllt werden, deren Wendecurven auf der andern Schale liegen. Mit diesen Curvensystemen hat sich Curtis im Journ. de Mathém. Année 1858, t. III, p. 79 beschäftigt und ein Verfahren zur Aufstellung der Differentialgleichung derselben gegeben. Was die Untersuchung der Curven selbst betrifft, so möchte es wohl kaum ein einfacheres Mittel geben, als sich der Argumente der Krümmungslinien zu bedienen und die in IV. erwähnten Formeln anzuwenden. Nimmt man für die Schale Φ_1:

$$1)\quad x_1 = x + r' \cos a,\quad y_1 = y + r' \cos b,\quad z_1 = z + r' \cos c,$$

und lässt u allein variiren, so erhält man kürzeste Linien, wie sich auch leicht analytisch nachweisen lässt, variirt dagegen v allein, so erhält man die von Curtis betrachteten Curven. Die Gleichung der berührenden Ebene zur Fläche Φ_1 im Puncte (x_1, y_1, z_1) ist:

$$X - x_1) \cos a' + (Y - y_1) \cos b' + (Z - z_1) \cos c = 0,$$

oder:

$$(X - x) \cos a' + (Y - y) \cos b' + (Z - z) \cos c' = 0.$$

Lässt man in dieser Gleichung v allein variiren, so erhält man Gleichungen zur Bestimmung der Wendecurve der developpabeln Fläche, welche die berührenden Ebenen einhüllt. Ist (ξ, η, ζ) der Punct der Wendecurve, welcher dem Puncte (x_1, y_1, z_1) entspricht, so finden die Gleichungen statt:

$$(\xi - x) \cos a' + (\eta - y) \cos b' + (\zeta - z) \cos c' = 0,$$
$$(\xi - x) \cos a'' + (\eta - y) \cos b'' + (\zeta - z) \cos c'' = 0,$$
$$(\xi - x) \cos a + (\eta - y) \cos b + (\zeta - z) \cos c = r''.$$

folglich:

$$\xi = x + r'' \cos a, \quad \eta = y + r'' \cos b, \quad \zeta = z + r'' \cos c.$$

Aus diesen Gleichungen folgt unmittelbar, dass die Wendecurve auf der Fläche Φ_2 liegt. Lässt man in den Gleichungen 1) v allein variiren, so bietet die Untersuchung der entsprechenden Curven keine besondern Schwierigkeiten dar, ihre Krümmungsverhältnisse führen indessen zu keinen bemerkenswerthen einfachen Resultaten.

Ueber die Beziehungen zwischen den bei Centralbewegungen vorkommenden characteristischen Grössen;

von

R. Clausius.

In einer Abhandlung vom vorigen Jahre [1]) habe ich für die Bewegung eines materiellen Punctes um ein festes Anziehungscentrum und für die Bewegung zweier materieller Puncte um einander einige neue Beziehungen zwischen Umlaufszeit, lebendiger Kraft, Ergal und Energie abgeleitet, welche an die Bedingung geknüpft sind, dass die Bewegungen in geschlossenen Bahnen stattfinden. Da nun aber diese Bedingung nur bei besonderen Arten von Anziehungskräften allgemein erfüllt ist, so schien es mir von Interesse zu sein, dieselbe Behandlungsart des Gegenstandes auch auf den Fall auszudehnen,

1) Nachrichten der Königl. Gesellsch. der Wiss. vom 24. Mai 1871 und Math. Ann. von Clebsch und Neumann Bd. IV, S. 231.

wo die Bahnen keine geschlossenen Curven bilden, und ich erlaube mir, das Resultat dieser Untersuchung im Folgenden mitzutheilen.

1) Als Grundlage der Untersuchung dienen zwei von mir für stationäre Bewegungen aufgestellte neue Gleichungen. Ich will daher zunächst diese Gleichungen anführen, und da in neuester Zeit von verschiedenen Seiten der Zusammenhang derselben mit Gleichungen, die schon früher bekannt waren, zur Sprache gebracht ist, so wird es vielleicht zweckmässig sein, auch diesen Punct kurz zu erörtern, um einerseits den Zusammenhang und andererseits den Unterschied erkennen zu lassen.

Sei ein frei beweglicher Punct mit der Masse m gegeben, welcher zur Zeit t die Coordinaten x, y, z hat, und auf den eine Kraft wirkt, deren nach den Coordinatenrichtungen genommene Componenten X, Y, Z heissen, dann lässt sich aus der Differentialgleichung der Bewegung

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X$$

sehr leicht folgende Gleichung ableiten:

$$(1) \qquad \frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = -\frac{1}{2}Xx + \frac{m}{4}\frac{d^2(x^2)}{dt^2}.$$

Diese Gleichung habe ich auf den Fall angewandt [1]), wo die Bewegung stationär ist, d. h. wo die Coordinaten und Geschwindigkeiten sich nicht fortdauernd in gleichem Sinne än-

1) Sitzungsberichte der niederrhein. Gesellschaft für Natur- und Heilkunde 1870, S. 114 und Pogg. Ann. Bd. 141, S. 124.

dern, sondern nur innerhalb gewisser Grenzen variiren. In diesem Falle ist der auf eine Bewegungsperiode oder auf eine sehr lange Zeit bezogene Mittelwerth des Differentialcoefficienten zweiter Ordnung $\frac{d^2(x^2)}{dt^2}$ gleich Null. Wenn wir daher die Mittelwerthe der beiden anderen in der Gleichung vorkommenden Grössen dadurch andeuten, dass wir über die betreffenden Formeln horizontale Striche setzen, so geht die Gleichung über in:

$$(2) \qquad \frac{m}{2}\overline{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} = -\frac{1}{2}\overline{Xx}.$$

Die Gleichungen (1) und (2) gelten natürlich in derselben Form auch für die beiden anderen Coordinaten. Wenn wir ferner statt eines einzelnen frei beweglichen Punctes ein ganzes System von frei beweglichen Puncten haben, so gelten für jeden Punct dieses Systemes dieselben Gleichungen. Man kann die Letzteren daher auch sofort dahin erweitern, dass sie sich auf alle drei Coordinaten und das ganze System von Puncten beziehen. Wenden wir nämlich für den Radius vector eines Punctes den Buchstaben r und für seine Geschwindigkeit den Buchstaben v an, welche Buchstaben für die verschiedenen Puncte mit verschiedenen Indices versehen werden können, so gehen die beiden Gleichungen über in:

$$(1a) \quad \Sigma\frac{m}{2}v^2 = -\frac{1}{2}\Sigma(Xx + Yy + Zz) + \frac{1}{4}\frac{d^2(\Sigma mr^2)}{dt^2}$$

$$(2a) \qquad \Sigma\frac{m}{2}\overline{v^2} = -\frac{1}{2}\Sigma(\overline{Xx + Yy + Zz}).$$

Die unter (2) und in erweiterter Form unter (2a) angeführte Gleichung ist die *erste* meiner beiden oben erwähnten Gleichungen. Ich habe die Grösse, welche sich in (2a) an der rechten Seite befindet, das *Virial* des Systemes genannt, und habe dann den Sinn der Gleichung (2a) in folgendem Satze ausgesprochen: *die mittlere lebendige Kraft des Systemes ist gleich seinem Virial.* Dabei habe ich aber bemerkt, dass der Satz nicht blos für das ganze Punctsystem und für die drei Coordinaten zusammen gilt, sondern auch für jeden Punct und jede Coordinate einzeln. Wenn man die Grösse $\frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$ die auf die x-Richtung bezügliche lebendige Kraft des Punctes und ebenso die Grösse $-\frac{1}{2}\overline{Xx}$ das auf die x-Richtung bezügliche Virial nennt, und bedenkt, dass die x-Richtung ganz beliebig gewählt werden kann, so lässt sich der Satz folgendermaassen aussprechen: *für jeden Punct ist die auf eine beliebige Richtung bezügliche mittlere lebendige Kraft gleich dem auf dieselbe Richtung bezüglichen Virial.*

Ich bin nun darauf aufmerksam gemacht worden, dass eine von Jacobi und eine von Lipschitz aufgestellte Gleichung mit den von mir angestellten Betrachtungen im Zusammenhange stehe.

Die Gleichung von Jacobi befindet sich in Crelle's Journal Bd. 17 S. 121 und in Jacobi's »Vorlesungen über Dynamik« S. 22, wo sie unter (2) angeführt ist. Es ist dort angenommen, dass die in dem Systeme wirkenden Kräfte eine Kräftefunction haben, und noch specieller,

dass diese Kräftefunction U eine homogene Function der $k$ten Dimension sei, und die betreffende Gleichung lautet:

$$\frac{d^2(\Sigma m_i r_i^2)}{dt^2} = (2k+4)\,U + 4h,$$

worin h die zur Kräftefunction gehörende additive Constante ist. Diese Gleichung kann offenbar nur mit der Gleichung (1a), aber nicht mit (2a) verglichen werden, und auch von (1a) unterscheidet sie sich einerseits durch eine sehr abweichende Form, indem sie die lebendige Kraft gar nicht enthält, und andererseits noch wesentlich dadurch, dass sie nur für Kräfte von einer ziemlich beschränkten Art gilt, während (1a) für alle Kräfte gültig ist.

Viel allgemeiner ist die von Lipschitz aufgestellte Gleichung, welche sich in seiner Abhandlung »über einen algebraischen Typus der Bedingungen eines bewegten Massensystems« [1]) befindet. Lipschitz betrachtet ebenfalls ein System bewegter materieller Puncte P_1, P_2 ..... P_n, welche aber nicht frei zu sein brauchen, sondern Bedingungen unterworfen sein können, die durch Gleichungen von einer dort näher bestimmten Form ausgedrückt werden. Für jeden Punct nimmt er eine gewisse ausgezeichnete Lage an, und bezeichnet die Coordinaten derselben für den Punct P_α mit a_α, b_α, c_α, während P_α selbst zur Zeit t die Coordinaten x_α, y_α, z_α hat. Ferner führt er ausser der Kräfte-

1) Journ. für reine u. angew. Math. Bd. 66.

function U und der lebendigen Kraft T des ganzen Systemes noch eine Grösse G ein, welche durch folgende Gleichung bestimmt ist:

$$\sum_\alpha m_\alpha \left[(x_\alpha - a_\alpha)^2 + (y_\alpha - b_\alpha)^2 + (z_\alpha - c_\alpha)^2\right] = 2G,$$

und mit Hülfe dieser Grösse bildet er folgende Gleichung:

$$\frac{d^2G}{dt^2} - 2T = \sum_\alpha \left[(x_\alpha - a_\alpha)\frac{dU}{dx_\alpha} + (y_\alpha - b_\alpha)\frac{dU}{dy_\alpha} + (z_\alpha - c_\alpha)\frac{dU}{dz_\alpha}\right].$$

Diese Gleichung ist der Gleichung (1a) sehr ähnlich. In einigen Beziehungen ist sie noch allgemeiner. Erstens hat Lipschitz ihr eine allgemeinere Bedeutung gegeben, indem er sie nicht blos für freie Systeme aufgestellt hat, sondern auch für solche Systeme, die gewissen Bedingungen unterworfen sind, und zweitens ist in ihr für jeden Punct eine besondere ausgezeichnete Lage angenommen, über die noch verfügt werden kann, während in (1a) die entsprechende ausgezeichnete Lage für alle Puncte der Anfangspunct der Coordinaten ist. In anderer Beziehung dagegen ist sie beschränkter, indem in ihr die in (1a) nicht vorkommende Voraussetzung gemacht ist, dass die Kräfte eine Kräftefunction haben.

Weiter als bis zu dieser in seiner Abhandlung unter (6) angeführten Gleichung reicht aber die Uebereinstimmung der Betrachtungen von Lipschitz mit meinen Betrachtungen nicht, indem Lipschitz von hier an der Untersuchung eine ganz andere Wendung giebt. Während

ich schon die Gleichung (1), welche allgemeiner ist, als (1a), auf stationäre Bewegungen angewandt, und für diese die Gleichung (2) abgeleitet habe, verfährt Lipschitz folgendermaassen. Zunächst giebt er seiner Gleichung noch eine andere Gestalt, indem er mit Hülfe der Beziehung, welche zwischen der Kräftefunction und der lebendigen Kraft besteht, die letztere aus seiner Gleichung eliminirt. Sodann geht er dazu über, seine Gleichung dadurch weiter zu specialisiren, dass er über die Natur der Kräftefunction bestimmte Voraussetzungen macht, wohin insbesondere die gehört, dass die Kräftefunction eine algebraische homogene Function der Elemente $x_\alpha - a_\alpha$, $y_\alpha - b_\alpha$, $z_\alpha - c_\alpha$ sei. Für die durch diese Voraussetzungen beschränkten Fälle untersucht er dann, welche Bedingung nothwendig und hinreichend ist, damit die Bewegung stabil sei. Diese Untersuchung ist sowohl durch den Gegenstand, den sie behandelt, als auch durch die Behandlung selbst von hohem Interesse, aber von meinen Betrachtungen ist sie ganz verschieden, und demgemäss kommt auch das Resultat, welches ich abgeleitet und durch den Satz vom Virial ausgedrückt habe, in ihr nicht vor.

Den Umstand, dass Niemand vor mir diesen Satz ausgesprochen hat, obwohl die betreffende Gleichung (2) sich so leicht aus den Grundgleichungen der Bewegung ergiebt, glaube ich mir daraus erklären zu müssen, dass man bisher weniger Veranlassung hatte, den stationären Bewegungen als solchen seine Aufmerksamkeit zuzuwenden. Seit aber die neuere Ansicht über das Wesen der Wärme zur Geltung gekommen ist, haben wir es in der Wärmelehre mit einer

stationären Bewegung der kleinsten Bestandtheile der Körper zu thun, und da wir über die Natur dieser Bewegung noch sehr wenig wissen, so lag es nahe, wenigstens die Folgerung zu ziehen, welche sich schon aus der Bedingung, dass die Bewegung stationär ist, ziehen liess; und in der That ist der so gewonnene Satz auch für die Wärmelehre von besonderer Wichtigkeit.

2) Was nun meine zweite Gleichung anbetrifft, so will ich dieselbe hier nur in der Form anführen, welche sie für einen einzelnen beweglichen Punct hat, da diese Form für das Folgende ausreichend ist, und die Ausdehnung auf ein System von beliebig vielen Puncten Auseinandersetzungen erfordern würde, die hier zu weitläufig wären.

Diese Gleichung steht im Zusammenhange mit denjenigen, welche den Satz von der kleinsten Wirkung und die von Hamilton gegebene Erweiterung dieses Satzes ausdrücken, ist aber doch in einem wesentlichen Puncte von ihnen verschieden, was man sofort ersehen wird, wenn ich auch die letzteren beiden Gleichungen hierher setze, so dass man alle drei Gleichungen neben einander vor Augen hat.

Ein materieller Punct bewege sich unter dem Einflusse einer Kraft in freier Weise von einem gegebenen Anfangspuncte zu einem gegebenen Endpuncte. Sodann denke man sich statt dieser Bewegung eine andere Bewegung des materiellen Punctes, welche zwischen denselben beiden Grenzpuncten in einer unendlich wenig veränderten Bahn stattfindet. Wenn nun die auf den Punct wirkende Kraft eine Kräftefunction oder (nach einer von mir vorgeschlagenen Benennungsweise) ein Ergal hat, und

wenn ferner angenommen wird, dass bei beiden Bewegungen das Ergal durch eine und dieselbe Function der Raumcoordinaten dargestellt werde, und die Energie (die Summe aus Ergal und lebendiger Kraft) einen und denselben Werth habe, so gilt folgende, als Ausdruck des Satzes von der kleinsten Wirkung bekannte Gleichung:

$$(3) \qquad \delta\int v^2 dt = 0.$$

Wenn man die Zeit, welche der Punct zu seiner Bewegung bedarf, mit i bezeichnet, so kann man diese Gleichung auch so schreiben:

$$(3a) \qquad \delta(\overline{v^2}\, i) = 0.$$

Eben diese Gleichung gilt auch, wenn die Grenzpuncte, zwischen denen die veränderte Bewegung stattfindet, nicht dieselben sind, wie bei der ursprünglichen Bewegung, aber doch die Bedingung erfüllen, dass die Grösse

$$\frac{dx}{dt}\delta x + \frac{dy}{dt}\delta y + \frac{dz}{dt}\delta z$$

zu Ende der Bewegung denselben Werth hat, wie zu Anfang. Diese letztere Bedingung ist z. B. erfüllt, wenn beide Bewegungen in geschlossenen Bahnen stattfinden, und man bei jeder Bewegung einen ganzen Umlauf betrachtet, so dass ihr Endpunct mit ihrem Anfangspuncte zusammenfällt.

Sollte dagegen diese auf die Grenzpuncte bezügliche Bedingung nicht erfüllt sein, so würde an die Stelle der Gleichung (3a) die folgende treten müssen:

$$(3b)\qquad \delta(\overline{v^2}i) = \left(\frac{dx}{dt}\delta x + \frac{dy}{dt}\delta y + \frac{dz}{dt}\delta z\right)_1 - \left(\frac{dx}{dt}\delta x + \frac{dy}{dt}\delta y + \frac{dz}{dt}\delta z\right)_0,$$

worin die Indices $_0$ und $_1$ den Anfangs- und Endwerth der in Klammern geschlossenen Grösse andeuten. Der Einfachheit wegen wollen wir aber im Folgenden jene Bedingung immer als erfüllt ansehen, und demgemäss die an der rechten Seite der vorigen Gleichung stehende Differenz gleich Null setzen, so dass die Gleichung die Form (3a) behält.

Die von Hamilton eingeführte Erweiterung besteht nun darin, dass der Energie nicht bei beiden Bewegungen derselbe Werth zugeschrieben, sondern eine Veränderung der Energie als zulässig betrachtet wird, während jedoch das Ergal bei der veränderten Bewegung noch dieselbe Function der Raumcoordinaten sein muss, wie bei der ursprünglichen Bewegung. Die für diesen Fall von Hamilton aufgestellte Gleichung ist folgende [1]), worin E die Energie bedeutet:

$$(4)\qquad m\,\delta(\overline{v^2}i) = i\,\delta E.$$

Die von mir aufgestellte Gleichung [2]) lautet in ihrer ursprünglichsten Form:

1) Thomson and Tait: Treatise of Natural Philosophy, p. 235; Deutsche Uebersetzung von Helmholtz und Wertheim S. 263.

2) Sitzungsberichte der Niederrhein. Gesellsch. für Natur- und Heilkunde 1870, S. 174; diese Ann. Bd. 142. S. 442.

$$(5)\quad -(\overline{X\delta x+Y\delta y+Z\delta z})=\frac{m}{2}\delta\overline{v^2}+m\overline{v^2}\,\delta \log i.$$

Hierin ist die auf den Punct wirkende Kraft durch keine Bedingung beschränkt. Machen wir, wie vorher, die Voraussetzung, dass die Kraft ein Ergal habe, und bezeichnen dasselbe mit U, indem wir dabei den positiven und negativen Sinn des Ergals in der Weise festsetzen, dass die Summe aus lebendiger Kraft und Ergal bei der Bewegung constant ist, so geht die Gleichung über in:

$$(5a)\quad \overline{\frac{dU}{dx}\delta x+\frac{dU}{dy}\delta y+\frac{dU}{dz}\delta z}=\frac{m}{2}\delta\overline{v^2}+m\overline{v^2}\,\delta \log i;$$

aber es ist hierin nicht, wie in der Hamilton'schen Gleichung, vorausgesetzt, dass die durch U bezeichnete Function der Raumcoordinaten, welche das Ergal darstellt, unveränderlich sei, sondern diese Function kann beim Uebergange aus der einen Bewegung in die andere eine von der Veränderung der Coordinaten unabhängige Veränderung erleiden. Denken wir uns z. B., die Function enthalte irgend welche von den Coordinaten unabhängige und somit während der Bewegung constante Grössen, so müssen diese Constanten, damit die Hamilton'sche Gleichung gültig sei, auch bei der veränderten Bewegung dieselben Werthe haben, wie bei der ursprünglichen Bewegung. Für die Gültigkeit meiner Gleichung dagegen ist das nicht nöthig, sondern die Constanten können beim Uebergange aus der einen Bewegung in die andere ihre Werthe ändern.

Dadurch erhält die Summe

$$\frac{dU}{dx}\delta x+\frac{dU}{dy}\delta y+\frac{dU}{dz}\delta z,$$

deren Mittelwerth in meiner Gleichung (5a) vorkommt, eine eigenthümliche Bedeutung. Man darf sie nicht durch das Zeichen δU ersetzen, wenn man unter diesem Zeichen die vollständige Variation des Ergals versteht. Die vollständige Variation muss nämlich nicht blos den Unterschied enthalten, welcher durch die Verschiedenheit der Coordinaten bedingt ist, sondern auch denjenigen Unterschied, welcher von der Veränderung der Functionsform, also z. B. von der Veränderung gewisser in der Function vorkommender Constanten herrührt. Bezeichnen wir diese Constanten mit c, c_1 etc. und ihre veränderten Werthe mit $c+\delta c$, $c_1+\delta c_1$ etc., so müssen wir meine Gleichung, wenn wir das allgemeine Variationszeichen δU in ihr anwenden wollen, so schreiben:

$$(5b)\quad \delta\overline{U}-\frac{d\overline{U}}{dc}\delta c-\frac{d\overline{U}}{dc_1}\delta c_1-\text{etc.}=\frac{m}{2}\delta\overline{v^2}+m\overline{v^2}\delta\log i.$$

Um eine bequemere Schreibweise für die Gleichung zu gewinnen, wird es vielleicht zweckmässig sein, für den Theil der Variation, welcher sich nur auf die Veränderung der Coordinaten bezieht, ein besonderes Zeichen einzuführen, z. B. ein mit einem Index versehenes δ anzuwenden, indem man setzt:

$$\delta_1 U=\frac{dU}{dx}\delta x+\frac{dU}{dy}\delta y+\frac{dU}{dz}\delta z.$$

Dann lautet meine Gleichung:

$$(5c)\qquad \delta_1 \overline{U} = \frac{m}{2}\,\delta\,\overline{v^2} + m\overline{v^2}\,\delta\,log\,i \text{ [1]}.$$

3) Nach diesen Vorbemerkungen können wir nun zur Behandlung der Centralbewegungen schreiten.

Wenn wir die Bewegung eines Punctes um ein festes Anziehungscentrum auf Polarcoordinaten beziehen, deren Mittelpunct mit dem Anziehungscentrum zusammenfällt, so bieten sich uns zwei verschiedene Vorgänge zur Betrachtung dar, die Winkelbewegung des Radius vector und die Bewegung des Punctes im Radius vector. Die letztere besteht, sofern die ganze Bewegung überhaupt stationär ist, in abwechselnder Annäherung an das Centrum und Entfernung von demselben.

Wenn die zu einer Annäherung und Entfernung gebrauchte Zeit gleich der Umdrehungszeit des Radius vector ist, so kommt der bewegliche Punct nach jeder Umdrehung wieder an dieselce Stelle des Raumes, und beginnt von

1) In meiner ersten auf diesen Gegenstand bezüglichen Abhandlung habe ich allerdings die an der linken Seite meiner Gleichung stehende Summe durch das einfache Zeichen $\delta\overline{U}$ ersetzt, dort habe ich aber auch dem Buchstaben U ausdrücklich eine andere Bedeutung beigelegt, als es hier geschehen ist. Ich habe nämlich dort gesagt, mit U solle das Ergal für die ursprüngliche Bewegung bezeichnet werden. Die Veränderung in der Form des Ergals, welche beim Uebergange aus der einen Bewegueg in die andere eintritt, habe ich dann dadurch ausgedrückt, dass ich bei der veränderten Bewegung das Ergal mit $U + \mu V$ bezeichnet habe, worin V eine zweite Function der Coordinaten und μ eine unendlich kleine Constante bedeutet.

hier aus einen neuen Umlauf in derselben Bahn, und wir erhalten somit eine fortdauernde Bewegung in geschlossener Bahn. Dasselbe ist der Fall, wenn sich während einer Umdrehung irgend eine ganze Anzahl von Annäherungen und Entfernungen vollzieht. Finden ferner während einer Annäherung und Entfernung mehrere Umdrehungen statt, oder ist auch nur überhaupt die Zeit einer Annäherung und Entfernung mit der Umdrehungszeit commensurabel, so wird der Punct zwar nicht nach jeder Umdrehung, aber doch nach einer gewissen Anzahl von Umdrehungen wieder an dieselbe Stelle des Raumes kommen, und dann die eben vollendete Bewegung in gleicher Weise wiederholen, so dass eine geschlossene Bahn von mehreren Umläufen entsteht. Wenn dagegen, was der allgemeinste Fall ist, die Zeit der Annäherung und Entfernung mit der Umdrehungszeit des Radius vector incommensurabel ist, so wird jeder folgende Umlauf in anderer Bahn stattfinden als die vorhergegangenen, und wir haben es dann nicht mehr mit einer geschlossenen Bahn zu thun.

Um nun meine erste Gleichung auf die Centralbewegung eines Punctes anzuwenden, können wir zunächst dem Virial eine einfachere Form geben. Wenn die auf den Punct wirkende Kraft eine vom Anfangspuncte der Coordinaten ausgehende Anziehung oder Abstossung ist, deren Stärke durch die Function $F(r)$ dargestellt wird, wobei ein positiver Werth der Function Anziehung und ein negativer Werth Abstossung bedeuten soll, so ist

$$-\frac{1}{2}(Xx+Yy+Zz)=\frac{1}{2}rF(r),$$

und die Gleichung (2a) geht daher über in:

$$(6) \qquad \frac{m}{2}\overline{v^2} = \frac{1}{2}\overline{rF'(r)}.$$

Bei dieser Gleichung ist der Unterschied, ob die Bahn geschlossen ist, oder nicht, ohne Belang. Für ihre Anwendbarkeit ist es nur nöthig, dass die Bewegung stationär ist, so dass die Grössen v^2 und $rF'(r)$ sich nicht fortdauernd in gleichem Sinne ändern, sondern nur innerhalb gewisser Grenzen schwanken und daher bestimmte Mittelwerthe haben.

Anders ist es mit meiner zweiten Gleichung. In dieser kommt die Zeitdauer i der betrachteten Bewegung vor. Wenn nun die Bewegung in geschlossener Bahn stattfindet, und sich daher in ganz gleicher Weise regelmässig wiederholt, so können wir die Betrachtung auf die einmalige Durchlaufung dieser Bahn beschränken, und die dazu nöthige Zeit als die Grösse i annehmen. Diesen Fall habe ich in meinem vorigen Aufsatze behandelt. Wenn aber die Bewegung nicht in geschlossener Bahn stattfindet, und daher keine sich in gleicher Weise wiederholende Perioden darbietet, so lässt die Betrachtung sich nicht so einfach auf eine bestimmte Zeit beschränken, und es bedarf einer weiteren Untersuchung, um zu erkennen, ob und in welcher Weise meine zweite Gleichung auch auf einen solchen Fall angewandt werden kann.

4) Zu dem Zwecke wollen wir die schon oben angedeutete Trennung der ganzen Bewegung in zwei Vorgänge, die Winkelbewegung des Radius vector und die Hin- und Herbewe-

gung des Punctes innerhalb des Radius vector, noch etwas weiter durchführen.

Die Winkelbewegung des Radius vector wollen wir Drehungsbewegung nennen und unter Umdrehungszeit diejenige Zeit verstehen, während welcher der Radius vector den ganzen Winkelraum 2π durchläuft. Die Bewegung des Punctes innerhalb des Radius vector wollen wir radiale Schwingungsbewegung oder auch kurzweg Schwingungsbewegung nennen, und für die Zeit, während welcher eine Hin- und Herschwingung stattfindet, den Namen Schwingungszeit wählen. Die Umdrehungszeit möge mit i und die Schwingungszeit mit i_1 bezeichnet werden.

Die Schwingungsbewegung kann als eine von der Umdrehungsbewegung ganz unabhängige Bewegung behandelt werden, wenn man die Centrifugalkraft als eine besondere Kraft einführt. Sei der Winkel, welchen der Radius vector mit einer in der Drehungsebene festen Geraden zur Zeit t bildet, mit ϑ bezeichnet, so dass $\frac{d\vartheta}{dt}$ die Winkelgeschwindigkeit des Radius vector bedeutet, dann wird die durch die Drehung entstehende Centrifugalkraft durch das Product

$$mr\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2$$

dargestellt. Da nun für die Bewegung eines Punctes um ein festes Anziehungscentrum der Satz gilt, dass der Radius vector in gleichen Zeiten gleiche Räume beschreibt, so haben wir die Gleichung

(7) $$r^2 \frac{d\vartheta}{dt} = c,$$

worin c eine Constante ist, und hieraus ergiebt sich sofort weiter:

(7a) $$mr \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = m c^2 \frac{1}{r^3}.$$

Die durch diesen Ausdruck dargestellte Centrifugalkraft betrachten wir nun als eine vom Centrum ausgeübte Abstossungskraft, welche zu der vom Centrum wirklich ausgeübten und durch $F'(r)$ dargestellten Kraft hinzukommt. Dann erhalten wir für die Schwingungsbewegung folgende Differentialgleichung:

(8) $$m \frac{d^2 r}{dt^2} = -F'(r) + m c^2 \frac{1}{r^3},$$

mit Hülfe deren wir die Schwingungsbewegung als eine für sich allein bestehende Bewegung behandeln können. Auf diese so betrachtete Bewegung finden meine beiden Gleichungen ohne Weiteres Anwendung.

Die Gleichung (2) giebt, wenn wir x durch r und X durch $-F'(r) + mc^2 \frac{1}{r^3}$ ersetzen:

(9) $$\frac{m}{2} \overline{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2} = \frac{1}{2} \overline{r F'(r)} - \frac{m}{2} c^2 \overline{\frac{1}{r^2}}.$$

Die zweite Gleichung lautete in der unter (5c) gegebenen Form:

$$\delta_1 \overline{U} = \frac{m}{2} \delta \overline{v^2} + m \overline{v^2} \delta \log i.$$

Um diese Gleichung anzuwenden, haben wir zunächst den Ausdruck des Ergals U für die Schwingungsbewegung zu bilden. Gemäss der Gleichung (8) ist zu setzen:

$$U = \int \left(F'(r) - m c^2 \frac{1}{r^3}\right) dr,$$

woraus durch Ausführung der Integration, wenn wir das Integral von $F'(r)$ mit $F(r)$ bezeichnen, folgt:

$$U = F(r) + \frac{m}{2} c^2 \frac{1}{r^2}.$$

Dieses ist eine solche Function, wie sie oben erwähnt wurde, welche eine Grösse c enthält, die während jeder Bewegung constant ist, aber beim Uebergange aus einer Bewegung in die andere ihren Werth ändern kann. Diese Grösse muss bei der Bildung der Variation $\delta_1 U$ als constant angesehen werden, und es kommt somit:

$$\delta_1 U = \delta F(r) + \frac{m}{2} c^2 \delta \frac{1}{r^2}.$$

Wenn wir diesen Ausdruck in die Gleichung (5c) einführen und zugleich v^2 durch $\left(\frac{dr}{dt}\right)^2$ ersetzen und statt i das für die Schwingungszeit gewählte Zeichen i_1 benutzen, so geht die Gleichung über in:

$$(10)\quad \delta\overline{F(r)} + \frac{m}{2}c^2\delta\overline{\frac{1}{r^2}} = \frac{m}{2}\delta\overline{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2_i} + m\overline{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2}\delta \log i_1.$$

Aus den so gewonnenen beiden Gleichungen (9) und (10) können wir die Grösse $\overline{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2}$ eliminiren. Wir wollen aber für jetzt nur in der Variation von $\overline{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2}$ den in (9) gegebenen Ausdruck anwenden. Dabei ist zu beachten, dass diese Variation eine vollständige ist, bei der auch die Veränderung der Grösse c mit berücksichtigt werden muss. Wir erhalten demnach:

$$(11)\quad \frac{m}{2}\delta\overline{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2} = \tfrac{1}{2}\delta\overline{rF'(r)} - \frac{m}{2}c^2\delta\overline{\frac{1}{r^2}} - m\overline{\frac{1}{r^2}}c\,\delta c.$$

Dieses in (10) eingesetzt, giebt:

$$\delta\overline{F(r)} + \frac{m}{2}c^2\delta\overline{\frac{1}{r^2}}$$

$$= \tfrac{1}{2}\delta\overline{rF'(r)} - \frac{m}{2}c^2\delta\overline{\frac{1}{r^2}} - m\overline{\frac{1}{r^2}}c\,\delta c + m\overline{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2}\delta \log i_1$$

oder anders geordnet:

$$\delta\overline{F(r)} - \tfrac{1}{2}\delta\overline{rF'(r)}$$

$$= -mc^2\delta\overline{\frac{1}{r^2}} - m\overline{\frac{1}{r^2}}c\,\delta c + m\overline{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2}\delta \log i_1,$$

wofür wir auch schreiben können:

$$(12)\quad \delta[\overline{F(r)}-\tfrac{1}{2}\overline{rF(r)}]=-mc\delta(c\overline{\frac{1}{r^2}})+m\overline{(\frac{dr}{dt})^2}\,\delta\log i.$$

5) Wir wenden uns nun zur Drehungsbewegung.

Bei einer solchen Bewegung, bei der der bewegliche Punct am Ende einer Umdrehung nicht dieselbe Entfernung vom Centrum zu haben braucht, wie am Anfange, braucht auch die Umdrehungszeit des Radius vector für mehrere auf einander folgende Umdrehungen nicht ganz gleich zu sein; aber jedenfalls werden wir für eine grössere Reihe von Umdrehungen einen bestimmten Mittelwerth der Umdrehungszeit erhalten. Auf diesen wollen wir das Zeichen i beziehen. Nun können wir zufolge der Gleichung (7) schreiben:

$$d\vartheta=c\frac{1}{r^2}dt,$$

und wenn wir diese Gleichung für eine ganze Anzahl n von Umdrehungen, also zwischen den Grenzen $\vartheta=0$ und $\vartheta=n\,.\,2\pi$ integriren, so kommt:

$$n\,.\,2\pi=c\int_0^{ni}\frac{1}{r^2}dt=c\overline{\frac{1}{r^2}}ni$$

und somit:

$$(13)\qquad c\overline{\frac{1}{r^2}}=\frac{2\pi}{i}.$$

Wenn wir den hier gefundenen Werth von

$c\overline{\frac{1}{r^2}}$ in die Gleichung (12) einsetzen, so kommt:

$$(14)\quad \delta[\overline{F(r)}-\tfrac{1}{2}\overline{rF(r)}]=-2\pi mc\delta\frac{1}{i}+m\overline{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2}\delta\log i_1.$$

Dieser Gleichung können wir noch eine etwas mehr symmetrische Form geben. Das erste Glied an der rechten Seite kann nämlich unter Berücksichtigung der Gleichung (13) so umgeformt werden:

$$-2\pi mc\delta\frac{1}{i}=-mc^2\overline{\frac{1}{r^2}}i\delta\frac{1}{i}$$

$$=mc^2\overline{\frac{1}{r^2}}\delta\log i.$$

Dadurch geht die vorige Gleichung über in:

$$(15)\quad \delta[\overline{F(r)}-\tfrac{1}{2}\overline{rF(r)}]=mc^2\overline{\frac{1}{r^2}}\delta\log i+m\overline{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2}\delta\log i_1.$$

Die Hälfte des Factors $mc^2\overline{\frac{1}{r^2}}$ ist die mittlere lebendige Kraft der Drehungsbewegung, denn die durch die Drehung entstehende Geschwindigkeitscomponente ist $r\frac{d\vartheta}{dt}$, und der dieser Geschwindigkeitscomponente entsprechende Theil der lebendigen Kraft ist $\frac{m}{2}r^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2$, wofür man nach (7) auch setzen kann $\frac{m}{2}c^2\frac{1}{r^2}$. Ebenso ist

die Hälfte des Factors $m\overline{(\frac{dr}{dt})^2}$ die mittlere lebendige Kraft der Schwingungsbewegung. Demnach ist die Gleichung in Bezug auf Drehungs- und Schwingungsbewegung symmetrisch [1]).

Da nach (9) die Summe der beiden Factoren $mc^2\overline{\frac{1}{r^2}}$ und $m\overline{(\frac{dr}{dt})^2}$ gleich $\overline{rF'(r)}$ ist, so können wir der vorigen Gleichung auch folgende für manche Anwendungen bequemere Formen geben

$$(16)\quad \delta[\overline{F(r)}-\tfrac{1}{2}\overline{rF'(r)}]=\overline{rF'(r)}\delta\log i-m\overline{(\frac{dr}{dt})^2}\,\delta\log\frac{i}{i_1}$$

$$(17)\quad \delta[\overline{F(r)}-\tfrac{1}{2}\overline{rF'(r)}]=\overline{rF'(r)}\delta\log i_1+mc^2\overline{\frac{1}{r^2}}\delta\log\frac{i}{i_1}.$$

1) Man kann in Folge der Gleichung (13) auch nachstehende Gleichung bilden:

$$-\frac{m}{2}c^2\delta\overline{\frac{1}{r^2}}=\frac{m}{2}\delta(c^2\overline{\frac{1}{r^2}})+mc^2\overline{\frac{1}{r^2}}\delta\log i.$$

Da nun der Ausdruck $mc^2\frac{1}{r^2}$ eine der Centrifugalkraft gleiche Anziehungskraft repräsentirt, so kann man die durch Integration dieses Ausdruckes entstehende Grösse $-\frac{m}{2}c^2\frac{1}{r^2}$ als das auf die Drehungsbewegung bezügliche Ergal betrachten. Bedenkt man ferner, dass $\frac{m}{2}c^2\frac{1}{r^2}$ die lebendige Kraft der Drehungsbewegung darstellt, so sieht man, dass die vorstehende Gleichung für die Drehungsbewegung ganz dieselbe Bedeutung hat, wie (10) für die Schwingungsbewegung. Die Summe beider Gleichungen giebt unter Berücksichtigung von (9) die oben stehende Gleichung (15).

Diese unter (14), (15), (16) und (17) in verschiedenen Formen gegebene Gleichung ist der Ausdruck einer neuen, für Bewegungen um ein festes Anziehungscentrum allgemein gültigen Beziehung.

Wenn die Centralbewegung von der Art ist, dass zwischen der Umdrehungs- und Schwingungszeit ein constantes Verhältniss besteht, so ist der Bruch $\frac{i}{i_1}$ unveränderlich, und es wird daher $\delta \log \frac{i}{i_1} = 0$. Dadurch werden die beiden vorigen Gleichungen übereinstimmend und gehen über in

$$\delta [\overline{F(r)} - \tfrac{1}{2} \overline{r F'(r)}] = \overline{r F'(r)}\, \delta \log i,$$

wofür man, da $\overline{r F'(r)} = m \overline{v^2}$ ist, auch schreiben kann:

$$\delta \overline{F(r)} = \frac{m}{2} \delta \overline{v^2} + m \overline{v^2}\, \delta \log i.$$

Dieses ist die Gleichung, welche für Centralbewegungen in geschlossenen Bahnen gilt, und welche hier als specieller Fall allgemeinerer Gleichungen erscheint.

6) Nachdem wir die Gleichungen in der Weise aufgestellt haben, dass sie für jedes beliebige Kraftgesetz gelten, wollen wir sie auf eine specielle Gruppe von Kraftgesetzen anwenden, nämlich auf die, wo die Kraft *irgend einer Potenz der Entfernung proportional ist.* Dabei wollen wir indessen die minus erste Potenz ausschliessen, weil sie bei der Integration zum Logarithmus führt, und daher einige besondere Erörterungen erfordert,

welche die Uebersichtlichkeit der Auseinandersetzung beeinträchtigen würden.

Wir wollen demnach, indem wir mit k und n zwei Constanten bezeichnen, deren letztere von —1 verschieden ist, setzen:

$$(18) \qquad F'(r) = kr^n,$$

woraus folgt;

$$(19) \qquad F(r) = \frac{k}{n+1} r^{n+1}.$$

Diese Formeln haben wir in den obigen Gleichungen für $F(r)$ und $F'(r)$ zu substituiren. Es möge dazu die Gleichung (16) ausgewählt werden, welche durch die Substitution übergeht in:

$$(20) \qquad \frac{1-n}{2(n+1)} k \delta \overline{r^{n+1}} = k \overline{r^{n+1}} \delta \log i - m \overline{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2} \delta \log \frac{i}{i_1};$$

Des bequemeren Ausdruckes wegen werde nun die Grösse ϱ eingeführt mit der Bedeutung

$$(21) \qquad \varrho^{n+1} = \overline{r^{n+1}}.$$

Diese Grösse lässt sich sofort bestimmen, wenn die Energie (die Summe aus Ergal und lebendiger Kraft) bekannt ist, also wenn man für irgend eine Lage des beweglichen Punctes seine Geschwindigkeit kennt. Da nämlich die mittlere lebendige Kraft gleich dem Virial ist, so haben wir, wenn die Energie mit E bezeichnet wird, allgemein

$$E = \overline{F(r)} + \tfrac{1}{2} \overline{r F'(r)}$$

und für unser specielles Kraftgesetz

$$E = \frac{k}{n+1}\overline{r^{n+1}} + \frac{k}{2}\overline{r^{n+1}} = k\frac{n+3}{2(n+1)}\overline{r^{n+1}}$$

und somit unter Anwendung der Grösse ϱ

$$E = k\frac{n+3}{2(n+1)}\varrho^{n+1}$$

woraus folgt:

$$(22) \qquad \varrho = \left[\frac{2(n+1)}{k(n+3)}E\right]^{\frac{1}{n+1}}.$$

Nachdem mit Hülfe dieser Grösse ϱ der durch $\overline{r^{n+1}}$ dargestellte Mittelwerth einer Potenz durch eine einfache Potenz ϱ^{n+1} ersetzt ist, können wir auch die Variation derselben sofort ausführen und schreiben:

$$\delta\overline{r^{n+1}} = (n+1)\varrho^{n}\delta\varrho.$$

Die Gleichung (20) geht demnach durch Einführung der Grösse ϱ über in:

$$(23) \quad \frac{1-n}{2}k\varrho^{n}\delta\varrho = k\varrho^{n+1}\delta\log i - m\overline{\left(\frac{dr}{dt}\right)^{2}}\delta\log\frac{i}{i_1}.$$

In diese Gleichung wollen wir noch eine zweite vereinfachende Grösse p einführen. Da nämlich die mittlere lebendige Kraft der Drehungsbewegung und die mittlere lebendige Kraft

der radialen Schwingungsbewegung zusammen die ganze mittlere lebendige Kraft ausmachen, so können wir die beiden ersteren als Bruchtheile der letzteren darstellen, welche Bruchtheile wir mit p und $1-p$ bezeichnen wollen. Es ist dann also:

$$(24) \qquad \begin{cases} \frac{m}{2} c^2 \overline{\frac{1}{r^2}} = p \frac{k}{2} \varrho^{n+1} \\ \frac{m}{2} \overline{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2} = (1-p) \frac{k}{2} \varrho^{n+1} \end{cases}$$

Der Werth dieser Grösse p kann zwischen 0 und 1 variiren, und von ihm hängt es ab, welche Form die Bahn unter allen bei einem gegebenen Werthe von n möglichen Formen annimmt. Wenn $p=0$ ist, so bewegt sich der Punct geradlinig dem Centrum zu und vom Centrum fort, und wenn $p=1$ ist, so bewegt er sich in einem Kreise um das Centrum. Zwischen diesen beiden Grenzformen liegen alle anderen möglichen Formen.

Durch Einführung der Grösse p in die Gleichung (23) erhalten wir zunächst:

$$\frac{1-n}{2} k \varrho^n \delta\varrho = k\varrho^{n+1} \delta \log i - (1-p) k\varrho^{n+1} \delta \log \frac{i}{i_1}$$

und wenn wir diese Gleichung noch durch $k\varrho^{n+1}$ dividiren, so kommt:

$$(25) \qquad \frac{1-n}{2} \delta \log \varrho = \delta \log i - (1-p) \delta \log \frac{i}{i_1}.$$

Da zwei Glieder dieser Gleichung vollstän-

dige Variationen sind, so muss das dritte Glied

$$(1-p)\,\delta\log\frac{i}{i_1}$$

ebenfalls eine solche sein, woraus folgt, dass p eine Function $\frac{i}{i_1}$ allein oder auch umgekehrt $\frac{i}{i_1}$ eine Function von p allein ist. Indem wir dem Letzteren gemäss $\frac{i}{i_1}$ als Function von p behandeln, können wir aus dieser Function auch andere Functionen ableiten, und wir wollen eine durch J zu bezeichnende Function von p einführen, welche durch folgende Gleichung bestimmt wird:

$$(26)\qquad \log J = \int (1-p)\,\frac{d\log\frac{i}{i_1}}{dp}\,dp.$$

Dann ist

$$(1-p)\,\delta\log\frac{i}{i_1} = \delta\log J,$$

und die Gleichung (24) geht somit über in:

$$(27)\qquad \frac{1-n}{2}\,\delta\log\varrho = \delta\log i - \delta\log J$$

Durch Umstellung und Integration dieser Gleichung erhalten wir:

$$\log i = \frac{1-n}{2}\log\varrho + \log J + \text{Const.}$$

Welchen Werth wir der Integrationsconstanten beilegen, ist gleichgültig, da wir uns gemäss (26) jede beliebige additive Constante in $\log J$ mit einbegriffen denken können. Der für das Folgende zweckmässigste Werth ist $\log 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$. Wenn wir diese Grösse für die Constante einsetzen und dann die drei Logarithmen der rechten Seite vereinigen, so kommt:

$$\log i = \log\left(2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\,\varrho^{\frac{1-n}{2}}J\right)$$

und wir erhalten daher für die Umdrehungszeit i folgenden einfachen Ausdruck:

$$(28)\qquad i = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\,\varrho^{\frac{1-n}{2}}J.$$

Einen entsprechenden Ausdruck können wir auch für die Schwingungszeit i_1 ableiten. Die Gleichung (25) lässt sich nämlich auch in folgender Form schreiben:

$$\frac{1-n}{2}\,\delta\log\varrho = \delta\log i_1 + p\,\delta\log\frac{i}{i_1}.$$

Führen wir hierin die Function J_1 ein, welche durch nachstehende Gleichung bestimmt wird:

$$(29)\qquad \log J_1 = -\int p\,\frac{d\log\frac{i}{i_1}}{dp}\,dp,$$

so ergiebt sich in gleicher Weise, wie vorher:

$$(30)\qquad i_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\,\varrho^{\frac{1-n}{2}}\,J_1$$

Dabei besteht zwischen den in diesen beiden Ausdrücken vorkommenden Functionen J und J_1 gemäss den Gleichungen (26) und (29) folgende Beziehung:

$$(31)\qquad p\,\frac{d\log J}{dp} = (p-1)\,\frac{d\log J_1}{dp}.$$

Da sich mit Hülfe dieser Gleichung eine der beiden Functionen aus der anderen ableiten lässt, so kann man sagen, dass in den beiden Ausdrücken von i und i_1 nur Eine unbestimmte Function von p vorkommt.

7) In den Gleichungen (28) und (30) sind die Zeiten i und i_1 durch die beiden Grössen ϱ und p ausgedrückt. Die Grösse ϱ ist nach Gleichung (22) eine einfache Function der Energie E, welche während der ganzen Bewegung unveränderlich bleibt, und daher als bekannt angenommen werden kann. Anders ist es mit der Grösse p. Diese hat zwar eine einfache Bedeutung (die mittlere lebendige Kraft der Drehungsbewegung als Bruchtheil der ganzen mittleren lebendigen Kraft), aber ihr Werth lässt sich nicht so einfach angeben, weil man zur Berechnung des Mittelwerthes einer veränderlichen Grösse den ganzen Verlauf der Bewegung in Betracht ziehen muss. Es ist daher zweckmässig statt der Grösse p eine andere Grösse einzuführen, deren Werth sich unmittelbar aus den Datis ergiebt, welche man zur Bestimmung der Bewegung anzuwenden pflegt.

Diese Data sind die vorher erwähnte Energie E und die schon oben besprochene Grösse c, deren Hälfte den vom Radius vector während der Zeiteinheit beschriebenen Flächenraum darstellt, und welche ebenso, wie die Energie, während der ganzen Bewegung constant bleibt. Wir wollen nun eine Grösse q einführen, welche durch folgende Gleichung bestimmt wird:

$$(32)\qquad q = m^{\frac{1}{2}}\, k^{\frac{1}{n+1}}\, c \left[\frac{2(n+1)}{n+3}\, E\right]^{\frac{n+3}{2(n+1)}},$$

und sich also in einfacher Weise aus E und c berechnen lässt.

Um den Zusammenhang dieser neuen Grösse q mit der Grösse p zu finden, können wir zunächst den Ausdruck von q mit Hülfe der Gleichung (22) in folgenden umgestalten:

$$(33)\qquad q = \sqrt{\frac{m}{k}}\,\frac{c}{\varrho^{\frac{n+3}{2}}}.$$

Ferner gelten die schon unter (13) und (24) angeführten Gleichungen

$$c\,\overline{\frac{1}{r^2}} = \frac{2\pi}{i}$$

$$\frac{m}{2}\, c^2\, \overline{\frac{1}{r^2}} = p\, \frac{k}{2}\, \varrho^{n+1},$$

woraus durch Elimination von $\overline{\frac{1}{r^2}}$ folgt:

$$(34)\qquad i = 2\pi\frac{m}{k}\frac{c}{p\varrho^{n+1}}.$$

Setzt man hierin für i seinen Werth aus (28) ein, so erhält man:

$$(35)\qquad J = \sqrt{\frac{m}{k}}\frac{c}{p\varrho^{\frac{n+3}{2}}}$$

und aus der Verbindung dieser Gleichung mit der Gleichung (33) ergiebt sich:

$$(36)\qquad q = pJ.$$

Die Grösse q steht also zu p in sehr einfacher Beziehung.

Auch ist ihr Verhalten demjenigen von p sehr ähnlich. Sie kann ebenfalls nur zwischen den Grenzen 0 und 1 variiren, und nimmt diese Grenzwerthe mit p zugleich an. Wenn $c = 0$ ist, so ist nach (32) auch $q = 0$, und ebenso hat dann auch die lebendige Kraft der Drehungsbewegung und somit die Grösse p den Werth Null. Wächst nun c, so wachsen gleichzeitig p und q. Wenn p den Werth 1 erreicht hat so ist die Bahn kreisförmig geworden. Für diesen Fall haben wir in der für die Schwingungsbewegung geltenden Differentialgleichung

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -kr^n + mc^2\frac{1}{r^3}$$

den Differentialcoëfficienten $\frac{d^2r}{dt^2}$ gleich Null zu

setzen, und die dadurch entstehende Gleichung lässt sich in folgende Form bringen:

$$\frac{m}{k} \frac{c^2}{r^{n+3}} = 1.$$

Ferner kann man in dem Falle, wo r constant ist, die Grössen r und ϱ als gleichbedeutend betrachten, und die vorige Gleichung lässt sich daher auch so schreiben:

$$\frac{m}{k} \frac{c^2}{\varrho^{n+3}} = 1$$

und hieraus ergibt sich gemäss (33) für q der Werth 1.

Da nach (36) q durch das Product pJ dargestellt wird, worin J eine Function von p allein bedeutet, so ist q selbst ebenfalls eine Function von p allein, und demgemäss kann man auch umgekehrt p als Function von q allein betrachten. Daraus folgt weiter, dass J und J_1, welche wir bisher als Functionen von p bezeichneten, auch ebensogut als Functionen von q angesehen werden können, und es kommt nur noch darauf an, die in (31) ausgedrückte Beziehung zwischen J und J_1 so umzugestalten, dass nicht p, sondern q darin vorkommt.

Die Gleichung (31) lässt sich in folgender Form schreiben:

$$(37) \qquad \frac{d \log J_1}{dp} = p \frac{d}{dp} \left(\log \frac{J_1}{J} \right).$$

Führen wir die Differentiation der Logarithmen aus, so kommt:

$$\frac{1}{J_1}\frac{dJ_1}{dp} = p\frac{J}{J_1}\frac{d}{dp}\left(\frac{J_1}{J}\right).$$

Hierin hebt sich J_1 aus den beiden Nennern fort, und das Product pJ können wir nach (36) durch q ersetzen. Ferner können wir die beiden Differentialcoëfficienten nach p in solche nach q umwandeln durch Anwendung der allgemeinen Gleichung

$$\frac{dZ}{dp} = \frac{dZ}{dq}\frac{dq}{dp},$$

wobei sich der Differentialcoëfficient $\frac{dq}{dp}$, welcher an beiden Seiten vorkommt, forthebt. Wir erhalten also:

$$\frac{dJ_1}{dq} = q\frac{d}{dq}\left(\frac{J_1}{J}\right). \tag{38}$$

Dieses ist die gesuchte Beziehung zwischen J und J_1. Man sieht, dass die neue Gleichung in Bezug auf J_1, $\frac{J_1}{J}$ und q dieselbe Form hat, wie (37) in Bezug auf $\log J_1$, $\log\frac{J_1}{J}$ und p.

8) Es sind im Vorigen für Centralbewegungen, bei denen die Anziehungskraft irgend einer Potenz der Entfernung proportional ist, eine Reihe von Formeln aufgestellt, welche die den Bewegungsperioden entsprechenden Zeiten und verschiedene Mittelwerthe als Functionen zweier leicht bestimmbarer Grössen darstellen. Da diese Formeln unter den zu ihrer Ableitung ange-

wandten Gleichungen etwas zerstreut sind, so wird es der bequemeren Uebersicht wegen zweckmässig sein, sie hier noch einmal kurz neben einander anzuführen.

Wenn E die Energie des bewegten Punctes und c den doppelten Werth des vom Radius vector während der Zeiteinheit beschriebenen Flächenraums bedeutet, so bilden wir zunächst folgende zwei Grössen:

$$\varrho = \left[\frac{2(n+1)}{k(n+3)} E\right]^{\frac{1}{n+1}}$$

$$q = m^{\frac{1}{2}} k^{\frac{1}{n+1}} c \left[\frac{2(n+1)}{n+3} E\right]^{-\frac{n+3}{2(n+1)}} = \sqrt{\frac{m}{k}} \frac{c}{\varrho^{\frac{n+3}{2}}}.$$

Ferner führen wir zwei mit J und J_1 bezeichnete Functionen von q ein, welche unter einander durch folgende Gleichung zusammenhängen:

$$\frac{dJ_1}{dq} = q \frac{d}{dq}\left(\frac{J_1}{J}\right).$$

Dann gelten für die nachstehend angeführten Grössen die beigeschriebenen Gleichungen:

1) Das mittlere Ergal:

$$\frac{k}{n+1} \overline{r^{n+1}} = \frac{k}{n+1} \varrho^{n+1}.$$

2) Die mittlere lebendige Kraft:

$$\frac{m}{2}\overline{v^2} = \frac{k}{2}\varrho^{n+1}.$$

3) Die mittlere lebendige Kraft der Drehungsbewegung (gemäss (24), wenn darin p durch $\frac{q}{J}$ ersetzt wird):

$$\frac{m}{2}c^2\overline{\frac{1}{r^2}} = \frac{k}{2}\varrho^{n+1}\frac{q}{J}.$$

4) Die mittlere lebendige Kraft der radialen Schwingungsbewegung:

$$\frac{m}{2}\overline{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2} = \frac{k}{2}\varrho^{n+1}\left(1-\frac{q}{J}\right).$$

5) Die Umdrehungszeit:

$$i = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\,\varrho^{\frac{1-n}{2}}J.$$

6) Die Schwingungszeit:

$$i_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\,\varrho^{\frac{1-n}{2}}J_1.$$

Ausser den hier angeführten Grössen kann man nach den obigen Entwickelungen leicht auch noch andere Grössen ausdrücken, wie z. B. das mittlere Ergal der Umdrehungsbewegung und der Schwingungsbewegung; indessen mögen die vorstehenden Ausdrücke genügen.

9) In allen diesen Ausdrücken kommt nur Eine unbestimmte Function von q vor, da sich die beiden mit J und J_1 bezeichneten Functionen durch die zwischen ihnen bestehende Beziehung auf Eine zurückführen lassen. Auch diese Function noch zu bestimmen, lag ursprünglich nicht im Plane meiner Untersuchung, da ich nur diejenigen Folgerungen ableiten wollte, welche sich unmittelbar aus meinen neuen mechanischen Gleichungen ergeben. Nachdem ich aber die obigen Formeln aufgestellt hatte, schien es mir der Vollständigkeit wegen doch zweckmässig zu sein, wenigstens eine angenäherte Bestimmung jener Function vorzunehmen. Ich habe daher die Function J_1 in eine Reihe entwickelt und einige Glieder dieser Reihe berechnet.

Aus der schon oben angeführten Differentialgleichung

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -kr^n + mc^2\frac{1}{r^3}$$

erhält man durch erste Integration:

$$\frac{m}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = -\frac{k}{n+1}r^{n+1} - \frac{m}{2}c^2\frac{1}{r^2} + E,$$

worin E, wie bisher, die Energie der Bewegung bedeutet. Hieraus ergiebt sich zur Bestimmung der Zeit die Differentialgleichung:

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}E - c^2\frac{1}{r^2} - \frac{k}{m}\frac{2}{n+1}r^{n+1}}},$$

oder, wenn man Zähler und Nenner mit r multiplicirt:

$$(39)\quad dt = \frac{\frac{1}{2}d(r^2)}{\sqrt{-c^2 + \frac{2}{m}Er^2 - \frac{k}{m}\frac{2}{n+1}r^{n+3}}}.$$

Hierin wollen wir statt der Constanten E und c die Constanten ϱ und q einführen, indem wir nach den Gleichungen (22) und (33) setzen:

$$E = k\frac{n+3}{2(n+1)}\varrho^{n+1} \text{ und } c^2 = \frac{k}{m}q^2\varrho^{n+3}.$$

Dann kommt:

$$dt = \frac{\frac{1}{2}d(r^2)}{\sqrt{-\frac{k}{m}q^2\varrho^{n+3} + \frac{k}{m}\frac{n+3}{n+1}\varrho^{n+1}r^2 - \frac{k}{m}\frac{2}{n+1}r^{n+3}}}.$$

Nehmen wir den Factor $\frac{k}{m}\varrho^{n+3}$ aus dem Wurzelzeichen, so erhalten wir:

$$dt = \frac{\frac{1}{2}d(r^2)}{\sqrt{\frac{k}{m}}\varrho^{\frac{n+3}{2}}\sqrt{-q^2 + \frac{n+3}{n+1}\left(\frac{r}{\varrho}\right)^2 - \frac{2}{n+1}\left(\frac{r}{\varrho}\right)^{n+3}}}$$

oder anders geschrieben:

(40) $dt =$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}\varrho^{\frac{1-n}{2}} \frac{d\left(\frac{r^2}{\varrho^2}\right)}{\sqrt{-q^2+\frac{n+3}{n+1}\left(\frac{r}{\varrho}\right)^2-\frac{2}{n+1}\left(\frac{r}{\varrho}\right)^{n+3}}}.$$

Hirin wollen wir der Bequemlichkeit wegen für den Bruch $\frac{r}{\varrho}$ den Buchstaben x setzen also:

(41) $dt =$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}\varrho^{\frac{1-n}{2}} \frac{d\,(x^2)}{\sqrt{-q^2+\frac{n+3}{n+1}x^2-\frac{2}{n+1}x^{n+3}}}.$$

Diese Gleichung muss integrirt werden, um die Schwingungszeit zu erhalten. Dabei sind als Grenzen zwei Werthe von x zu nehmen, für welche der unter dem Wurzelzeichen stehende Ausdruck und demgemäss die radiale Geschwindigkeit $\frac{dr}{dt}$ gleich Null wird. Diese Werthe mögen mit x_0 und x_1 bezeichnet werden. Das Integral von dem einen Grenzwerthe zum anderen giebt die Zeit, welche der bewegliche Punct gebraucht, um vom kleinsten Werthe von r zum grössten zu gelangen; da wir nun aber unter der Schwingungszeit die Zeit verstehen, welche der Punct gebraucht, um vom kleinsten Werthe zum grössten und dann wieder zum kleinsten zu gelangen, so müssen wir das vorher erwähnte Integral doppelt nehmen. Wir erhalten also:

(42) $i_1 =$

$$\sqrt{\frac{m}{k}\varrho^{-\frac{1-n}{2}}}\int\limits_{x=x_0}^{x=x_1}\frac{d(x^2)}{\sqrt{-q^2+\frac{n+3}{n+1}x^2-\frac{2}{n+1}x^{n+3}}}.$$

Vergleichen wir diesen Ausdruck von i_1 mit dem in (30) gegebenen, so erhalten wir für die Function J_1 die Gleichung:

$$(43)\quad J_1=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{x=x_0}^{x=x_1}\frac{d(x^2)}{\sqrt{-q^2+\frac{n+3}{n+1}x^2-\frac{2}{n+1}x^{n+3}}}.$$

10) Um diese Integration auszuführen, wollen wir die Gleichung zuerst so schreiben:

(44) $J_1 =$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{x=x_0}^{x=x_1}\frac{d(x^2)}{\sqrt{1-q^2-\left(1-\frac{n+3}{n+1}x^2+\frac{2}{n+1}x^{n+3}\right)}}.$$

Hierin wollen wir nun eine neue Veränderliche z einführen, welche durch folgende Gleichung bestimmt wird:

$$(45)\qquad 1-\frac{n+3}{n+1}x^2+\frac{2}{n+1}x^{n+3}=z^2.$$

Wenn wir uns dann die Grösse x^2 in eine

Reihe nach steigenden Potenzen von z entwickelt denken, indem wir setzen:

(46) $$x^2 = a + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \text{etc.}$$

und die Coëfficienten dieser Reihe so bestimmen, dass dadurch der vorstehenden Gleichung genügt wird, so erhalten wir folgende Werthe, worin zur Abkürzung noch der Buchstabe μ mit der Bedeutung

(47) $$\mu = \frac{(n+2)(n-1)}{n+3}$$

eingeführt ist:

(48) $$\begin{cases} a = 1 \\ a_1 = \pm \frac{2}{\sqrt{n+3}} \\ a_2 = -\frac{n-1}{n+3} \cdot \frac{1}{3} \\ a_3 = \pm \frac{\mu}{\sqrt{n+3}} \cdot \frac{1}{2.3^2} \\ a_4 = -\mu \frac{n+5}{n+3} \cdot \frac{1}{3^3.5} \\ a_5 = \pm \frac{\mu}{\sqrt{n+3}} \cdot \frac{2^3.3+\mu}{2^4.3^3.5} \\ a_6 = -\mu \frac{n+5}{n+3} \cdot \frac{2.3^2-\mu}{3^5.5.7} \\ a_7 = \pm \frac{\mu}{\sqrt{n+3}} \cdot \frac{2^4.3^3.5^2-2^6.3^2\mu-139\mu^2}{2^6.3^5.5^2.7}. \end{cases}$$

Unter Anwendung der neuen Veränderlichen z geht die Gleichung (44) in folgende über, in welcher die Grenzen der Integration bestimmt angegeben sind:

$$(49)\ J_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{z=-\sqrt{1-q^2}}^{z=\sqrt{1-q^2}} \frac{d(a + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \text{etc.})}{\sqrt{1-q^2-z^2}}.$$

Das hierin angedeutete Integral zerfällt nach den Gliedern der Reihe in unendlich viele Integrale, deren Werthe sich leicht angeben lassen. Jedes Glied, welches eine gerade Potenz von z enthält, giebt als Integral den Werth Null. Für die Glieder mit ungeraden Potenzen gilt folgende allgemeine Gleichung, worin ν eine ungerade ganze Zahlen sein soll:

$$\int_{z=-\sqrt{1-q^2}}^{z=\sqrt{1-q^2}} \frac{d(z^\nu)}{\sqrt{1-q^2-z^2}} = \frac{1.3.5.7....\nu}{1.2.4.6....\nu-1}(1-q^2)^{\frac{\nu-1}{2}}\pi.$$

Wenden wir diese Formel auf die ungeraden Glieder der vorstehenden Gleichung an, so erhalten wir zunächst:

$$(50)\ J_1 = \tfrac{1}{2}\left[a_1 + \tfrac{3}{2}a_3(1-q^2) + \frac{3.5}{2.4}a_5(1-q^2)^2 + \text{etc.}\right].$$

In diese Gleichung haben wir für die Coëf-

ficienten a_1, a_3 etc. ihre Werthe aus (48) einzusetzen, wobei wir von den beiden Vorzeichen, welche vor den Wurzeln stehen, nur das obere zu berücksichtigen brauchen, indem das untere eine negative Zeit geben würde. Dadurch erhalten wir:

$$(51)\quad J_1 = \frac{1}{\sqrt{n+3}}\left[1 + \frac{\mu}{2^3.3}(1-q^2) + \mu\frac{2^3.3+\mu}{2^8 3^2}(1-q^2)^2 \right.$$
$$\left. + \mu\frac{2^4.3^3.5^2 - 2^6.3^2\mu - 139\mu^2}{2^{11}.3^5.5}(1-q^2)^3 + \text{etc.}\right]$$

Hierdurch ist die Grösse J_1 als Function von q soweit bestimmt, dass man sie für Werthe von q, die nicht zu weit von 1 abweichen, mit ziemlicher Annäherung berechnen kann.

Aus dieser Reihe lässt sich mit Hülfe von (38) auch die entsprechende Reihe für J ableiten.

11) Diese Ableitung und andere Rechnungen werden etwas bequemer, wenn man die Reihe nach steigenden Potenzen von $1-q$ entwickelt. Wir wollen dabei für die letztere Differenz einen besonderen Buchstaben einführen, indem wir setzen:

$$(52)\qquad s = 1 - q$$

Dann ist:

$$1 - q^2 = -(1-s)^2 = 2s - s^2,$$

und durch Einsetzung dieses Werthes geht die obige Reihe über in:

$$(53)\qquad J_1 = \frac{1}{\sqrt{n+3}}\Big[1 + \frac{\mu}{2^2.3}\, s + \frac{\mu^2}{2^6.3^2}\, s^2$$

$$- \mu\, \frac{2^4.3^3.5 + 2^2.3^2.31\mu + 139\mu^2}{2^8.3^5.5}\, s^3 + \text{etc.}\Big].$$

Um hieraus J zu berechnen, können wir die Gleichung (38) in folgender Form schreiben:

$$(54)\qquad \frac{d}{ds}\left(\frac{J_1}{J}\right) = \frac{1}{1-s}\,\frac{dJ_1}{ds}.$$

Setzen wir hierin für J_1 den vorstehenden Ausdruck, so erhalten wir zunächst den Differentialcoëfficienten von $\frac{J_1}{J}$ und dann durch Integration $\frac{J_1}{J}$ selbst. Die dabei hinzukommende Integrationsconstante kann leicht bestimmt werden, weil sich für $s = 0$, also für die Kreisbewegung, die Umdrehungszeit i und demgemäss der Werth der Function J direct bestimmen lässt. Es ergiebt sich nämlich, dass für diesen Fall $J = 1$ zu setzen ist, woraus folgt: $\frac{J_1}{J} = \frac{1}{\sqrt{n+3}}$. Unter Berücksichtigung dieses Werthes erhalten wir für den Bruch $\frac{J_1}{J}$ folgende Reihe:

$$(55)\quad \frac{J_1}{J} = \frac{1}{\sqrt{n+3}}\left[1 + \frac{\mu}{2^2.3}s + \mu\frac{2^3.3+\mu}{2^6.3^2}s^2 + \mu\frac{2^4.3^4.5 - 2^2.3^3.7\mu - 139\mu^2}{2^8.3^5.5}s^3 + \text{etc.}\right].$$

Da der Bruch $\frac{J_1}{J}$ gleich dem Bruche $\frac{i_1}{i}$ ist so stellt der vorstehende Ausdruck das Verhältniss zwischen der Schwingungszeit und der Umdrehungszeit dar.

Man könnte nun, um J zu bestimmen, einfach mit der Gleichung (55) in die Gleichung (53) dividiren. Dadurch würde man aber J nur bis zur dritten Potenz von s entwickelt erhalten, während noch das Glied mit der vierten Potenz erhältlich ist. Schreibt man nämlich die vorher angewandte Gleichung (54) in der Form

$$(56)\qquad \frac{d}{ds}\left(\frac{J_1}{J} - J_1\right) = s\frac{d}{ds}\left(\frac{J_1}{J}\right)$$

so kann man hieraus wegen des an der rechten Seite befindlichen Factors s die Differenz $\frac{J_1}{J} - J_1$, welche kein constantes Glied enthält, sondern gleich mit der zweiten Potenz von s beginnt, bis zur vierten Potenz von s bestimmen, obwohl $\frac{J_1}{J}$ nur bis zur dritten Potenz bekannt ist. Bilden wir dann weiter die identische Gleichung:

$$J = 1 - \frac{\frac{J_1}{J} - J_1}{\frac{J_1}{J}},$$

und wenden an der rechten Seite derselben für die im Zähler des zweiten Gliedes befindliche Differenz den bis zur vierten Potenz entwickelten Ausdruck an, so erhalten wir:

$$(57) \qquad J = 1 - \frac{\mu}{2^3.3} s^2 + \mu \frac{-2^2.3 + \mu}{2^4.3^3} s^3$$
$$+ \mu \frac{-2^4.3^4.5 + 2^2.3.7.29\mu + 89\mu^2}{2^{10}.3^4.5} s^4 + \text{etc.}$$

12) Wir haben somit für die Functionen J und J_1 Ausdrücke gewonnen, aus welchen sich ihre Werthe angenähert bestimmen lassen, und zwar um so genauer, je kleiner s ist, je weniger also die Bahn von der Kreisform abweicht. Sie gewähren in mancher Beziehung einen leichten Einblick in das Verhalten dieser Functionen.

Der in dem Ausdrucke von J_1 vor der Reihe stehende Factor $\frac{1}{\sqrt{n+3}}$, welcher für $n = -3$ unendlich gross, und für Werthe von n, die unter -3 liegen, imaginär wird, zeigt recht augenfällig, dass für Anziehungskräfte, welche einer negativen Potenz der Entfernung proportional sind, die minus dritte Potenz die Grenze bildet, bis wohin überhaupt noch stationäre Bewegungen möglich sind.

Ferner ist es an den beiden Ausdrücken characteristisch, dass sämmtliche Glieder, welche

s enthalten, mit dem gemeinsamen Factor μ versehen sind. Daraus folgt, dass für $\mu = 0$ beide Ausdrücke von der Grösse s unabhängig werden, indem die Gleichungen (53) und (57) in

$$J_1 = \frac{1}{\sqrt{n+3}} \text{ und } J = 1$$

übergehen. Da nun nach (47)

$$\mu = \frac{(n+2)(n-1)}{n+3}$$

ist, so tritt dieses einfache Verhalten in den beiden Fällen ein, wo n die Werthe -2 und 1 hat.

Diese beiden Werthe von n sind die einzigen, bei welchen die Bewegungen allgemein, d. h. für alle Werthe von s, in geschlossenen Bahnen stattfinden. Dieses kann nämlich nur dann der Fall sein, wenn das Verhältniss zwischen der Schwingungszeit und der Umdrehungszeit unveränderlich ist, und es muss daher der Bruch $\frac{i_1}{i}$, welcher mit $\frac{J_1}{J}$ identisch ist, von s unabhängig sein. Daraus folgt weiter, dass in der unter (55) mitgetheilten Reihe die Coëfficienten aller Potenzen von s, von der ersten an, gleich Null sein müssen, so dass das constante Glied allein übrig bleibt, was nur eintritt, wenn $\mu = 0$ und somit n entweder gleich -2 oder gleich 1 ist.

Der vorher erwähnte Bruch $\frac{i_1}{i}$ wird für $\mu = 0$

durch die Formel $\frac{1}{\sqrt{n+3}}$ dargestellt, welche, je nachdem $n = -2$ oder $n = 1$ ist, den Werth 1 oder $\frac{1}{2}$ annimmt. Dadurch wird ausgedrückt, dass während einer Umdrehung im ersteren Falle Eine radiale Schwingung stattfindet, so dass der Radiusvector Ein Maximum und Ein Minimum hat, im letzteren Falle dagegen zwei radiale Schwingungen stattfinden, so dass der Radiusvector zwei Maxima und zwei Minima hat.

Alle vorstehenden Betrachtungen beziehen auf die Bewegungen eines materiellen Punctes um ein festes Centrum. Ganz ähnliche Betrachtungen lassen sich anstellen in Bezug auf die Bewegungen zweier materieller Puncte um einander, und führen zu entsprechenden Resultaten. Da ich diese Erweiterung für den Fall, wo die Bewegungen in geschlossenen Bahnen stattfinden, schon in meinem vorigen Aufsatze durchgeführt habe, und bei Bewegungen in ungeschlossenen Bahnen die Erweiterung im Wesentlichen auf gleiche Art geschehen kann, so wird es nicht nöthig sein, hier wieder darauf einzugehen.

Register

über die

Nachrichten

von der

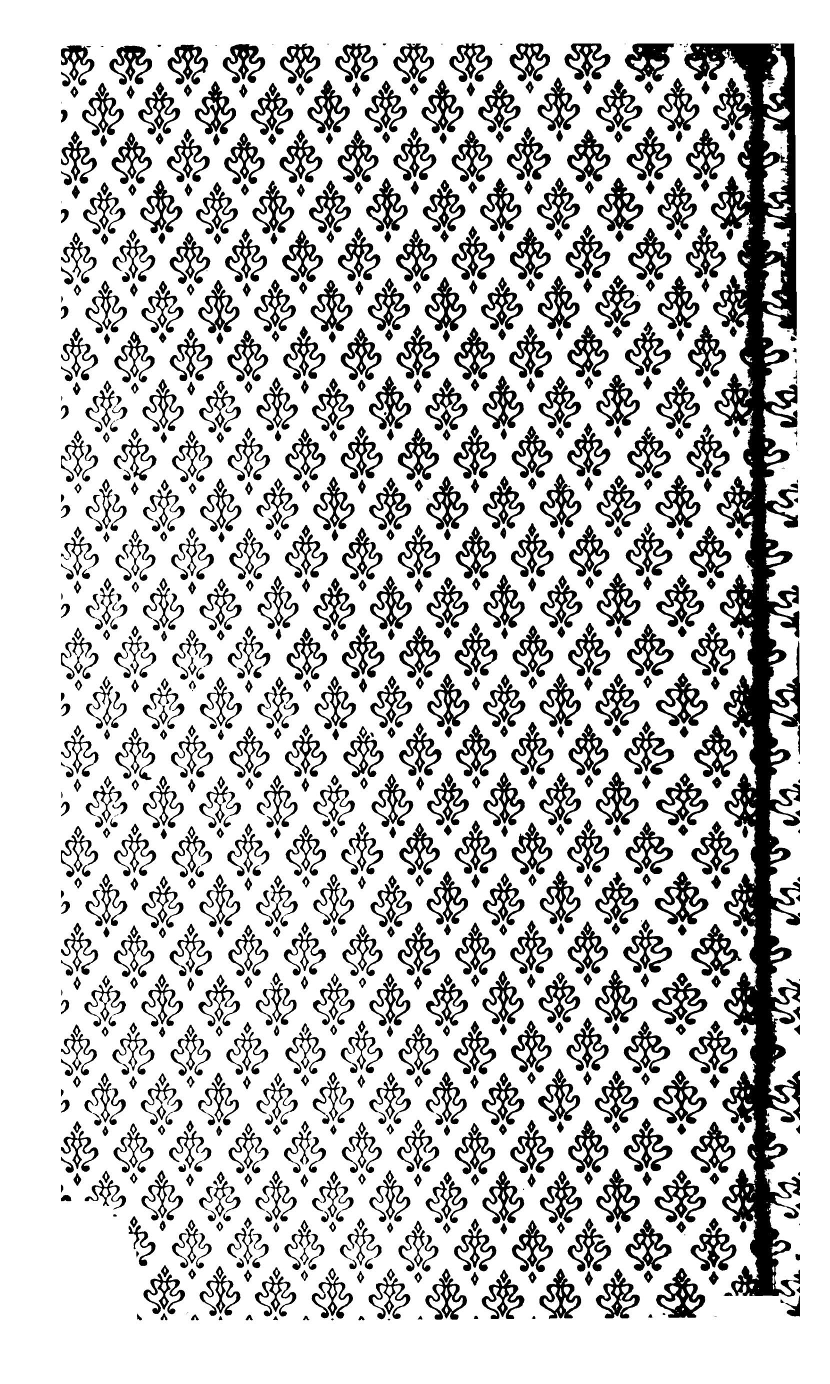
königl. Gesellschaft der Wissenschaften

und der

Georg-Augusts-Universität

aus dem Jahre 1872.

Göttingen,
Druck der Dieterichschen Univ.-Buchdruckerei.
W. Fr. Kaestner.




UNIVERSITY OF MICHIGAN
3 9015 06448 0950